СУВАНКУЛОВ

МАТЕМАТИКА: ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

С.А. Субханкулова

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ИЛЕКСА
Москва
2010

УДК 337.167.1:51
ББК 22.141я72
С89

Рецензенты:

Ю.З. Шайгарданов — Ученый секретарь института математики с ВЦ УНЦ РАН, канд.физ.-мат. наук;

И.С. Галимов — доцент кафедры теории функций и функционального анализа Башкирского госуниверситета, канд.физ.-мат. наук;

В.Н. Лукьянова — руководитель МО учителей математики СШ № 9 г. Уфы

Субханкулова С.А.

С89 Задачи с параметрами.— М.: ИЛЕКСА, 2010.— 208 с. (Серия «Математика: элективный курс»).

ISBN 978-5-89237-291-6

На ЕГЭ, вступительных экзаменах в вузы часто встречаются задачи с параметрами. В школьном курсе математики эти задачи рассматривают пока крайне редко, бессистемно, поэтому при решении таких задач у абитуриентов обычно возникают затруднения. Но в государственном стандарте образования по математике отмечается, что в ближайшем будущем задачи с параметрами будут введены в школьный курс математики.

Данное пособие может быть использовано при подготовке к экзаменам в вузы, а также окажет помощь студентам педагогических вузов, учителям, работающим в классах с углубленным изучением математики, при проведении факультативных занятий.

Пособие состоит из 13 параграфов, к каждому из которых приведены примеры решений задач, предлагавшихся в основном на вступительных экзаменах в различные вузы страны. Приведены также упражнения трех уровней сложности А, В, С для самостоятельного решения, отдельные из них снабжены указаниями или решениями. Для удобства работы с текстом все содержание материала разбито на 34 часа учебного времени.

УДК 337.167.1:51
ББК 22.141я72

ISBN 978-5-89237-291-6

Содержание

Введение

В пособии рассмотрены уравнения и неравенства вида

$$f(a, b, x) = \varphi(a, b, x), \tag{1}$$

$$f(a, b, x) > \varphi(a, b, x), \tag{2}$$

$$f(a, b, x) \geqslant \varphi(a, b, x), \tag{2a}$$

где a, b, x — переменные величины.

Любую систему значений переменных $a = a_0$, $b = b_0$, $x = x_0$, при которой обе части уравнения (1) или неравенства (2), (2а) принимают действительные значения, называют системой допустимых значений переменных a, b, x.

Переменные a, b, которые при решении уравнения или неравенства считаются постоянными, называют параметрами, а само уравнение (неравенство) называют уравнением (неравенством), содержащим параметры.

Условимся в дальнейшем обозначать параметры первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d, ..., а неизвестные — последними буквами x, y, z.

Пусть дано уравнение $F(x, a) = 0$. (3)

Если ставится задача отыскать все такие пары (x, a), которые удовлетворяют данному уравнению, то уравнение (3) — это уравнение с двумя переменными x и a.

Если ставится задача для каждого значения a из некоторого числового множества А решить уравнение (3) относительно x, то уравнение (3) называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество А — областью изменения параметра.

Решить уравнение с параметром — значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней заданного уравнения.

Для разбиения множества значений параметра А на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра будем называть контрольными.

Вторая постановка задачи: найти все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям.

В процессе решения уравнений существенную роль играют теоремы о равносильности. *Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называют равносильными, если:*

а) они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров;

б) каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот.

Приведем формулировки основных теорем о равносильности уравнений.

Теорема 1. Уравнения $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$ (1) и $f(a, b, x) + F(a, b, x) = \varphi(a, b, x) + F(a, b, x)$ равносильны, если $F(a, b, x)$ существует в области определения уравнения (1).

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$ (1) умножить на выражение $F(a, b, x) = 0$, существующее в области определения уравнения (1), то получим уравнение $f(a, b, x)\ F(a, b, x) = f(a, b, x) \cdot F(a, b, x)$ (4), равносильное данному.

Теорема 3. Уравнение $f^n(a, b, x) = \varphi^n(a, b, x)$ (5), где $n \geqslant 2$ (натуральное), равносильно уравнению $f(a, b, x) = \varphi(a, b, x)$.

§ 1. Линейные уравнения и уравнения, приводимые к линейным

I **Решите уравнение $2a(a-2)x = a-2$.** **(1)**

Решение

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в ноль. Такими значениями являются: $a = 0$ и $a = 2$. Эти значения разбивают множество значений параметра на три подмножества:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a \neq 0$, $a \neq 2$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней.

2) При $a = 2$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ из уравнения (1) получаем $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда $x = \dfrac{1}{2a}$.

Ответ:

1) если $a = 0$, то корней нет;

2) если $a = 2$, то x — любое действительное число;

3) если $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 2, \end{cases}$ то $x = \dfrac{1}{2a}$.

II **Решите уравнение $\left(a^2-2a+1\right)\cdot x=a^2+2a-3$.**

<u>Решение</u>

Находим контрольные значения параметра a: $a^2-2a+1=0$, $a=1$. Множество значений параметра разбивается на два подмножества:

1) $a=1$; 2) $a\neq 1$.

Решим уравнение на каждом из них.

1) $a=1$; $0\cdot x=0$, $x\in \boldsymbol{R}$.

2) $a\neq 1$; $x=\dfrac{(a+3)\cdot(a-1)}{(a-1)^2}=\dfrac{a+3}{a-1}$.

<u>Ответ:</u>

1) если $a=1$, то $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) если $a\neq 1$, то $x=\dfrac{a+3}{a-1}$.

III **Решите уравнение $\dfrac{3x-2}{a^2-2a}+\dfrac{x-1}{a-2}+\dfrac{2}{a}=0$.** **(2)**

<u>Решение</u>

Освободимся от знаменателя в уравнении, для этого умножим обе его части на $a\left(a-2\right)\neq 0$.

$3a-2+ax-a+2a-4=0$, $x(3+a)=6-a$.

Контрольными значениями будут: $a=0$, $a=2$, $a=-3$.

Рассмотрим решение уравнения на подмножествах:

1) $a=0$; 2) $a=2$; 3) $a=-3$; 4) $\begin{cases}a\neq -3,\\ a\neq 0,\\ a\neq 2.\end{cases}$

1) $a=0$. Уравнение (2) не имеет решений.

2) $a=2$. Уравнение (2) не имеет решений.

3) $a=-3$. $x\cdot 0=6+3=9$, $x\in\varnothing$.

4) $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2 \end{cases}$ $x = \dfrac{6-a}{3+a}$.

Ответ:

$\varnothing$ при $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$; $x = \dfrac{6-a}{3+a}$ при $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$

IV **При всех значениях параметра a решите уравнение $|x+2| + a|x-4| = 6$.** **(3)**

Решение

Разобьем числовую прямую на ряд промежутков нулями: $x = -2$, $x = 4$ и рассмотрим решение уравнения (3) на каждом из них.

1) $x < -2$; 2) $-2 \leqslant x < 4$; 3) $x \geqslant 4$.

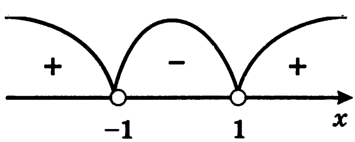
1) $x < -2$. $-x - 2 - ax + 4a = 6$, $x(a+1) = 4a - 8$.

а) $a + 1 = 0$, $a = -1$, $0 \cdot x = -12$; нет решений.

б) $a + 1 \neq 0$, $a \neq -1$, $x = \dfrac{4a-8}{a+1}$. Поскольку $x < -2$,

то $\dfrac{4a-8}{a+1} < -2$, $\dfrac{4a-8}{a+1} + 2 < 0$. $\dfrac{6a-6}{a+1} < 0$. (4)

Решаем неравенство (4) методом интервалов.



Его решение: $-1 < a < 1$. Итак, при $-1 < a < 1$ $x = \dfrac{4a-8}{a+1}$.

2) $-2 \leqslant x \leqslant 4,\ x+2-ax+4a=6,\ x(1-a)=4-4a.$

а) Если $a=1$, то $x \cdot 0=0$; x — любое действительное число, но так как $-2 \leqslant x \leqslant 4$, то при $a=1$ $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

б) Если $a \neq 1$, то $x=\dfrac{4(1-a)}{1-a}=4$.

3) $x \geqslant 4.\ x+2+ax-4a=6,\ x(a+1)=4+4a.$

а) $a+1=0,\ a=-1,\ x \cdot 0=0$, x — любое. Поскольку $x \geqslant 4$,

то при $a=-1$ $x \geqslant 4$.

б) $a+1 \neq 0,\ a \neq -1,\ x=4.$

Ответ:

$x=4$ при $a<-1$; $x \geqslant 4$ при $a=-1$; $x_1=4,\ x_2=\dfrac{4a-8}{a+1}$ при $-1<a<1$; $-2 \leqslant x \leqslant 4$ при $a=1$; $x=4$ при $a>1$.

Дидактические материалы

Решите уравнения:

● А. 1. $(a^3-a^2-4a+4)x=a-1$;

2. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{x+a}{a+3}=1$;

3. $\dfrac{x+a}{1+a}=\dfrac{x-a}{2+a}$.

Решите уравнения:

● Б. 1. $\dfrac{2(a+1)x}{a}=3(x+1)+\dfrac{7}{a}$;

2. $\dfrac{a+3}{a+2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{(a+2)x}$;

3. $\dfrac{b-5}{x+1}-\dfrac{7+3b}{x-2}=\dfrac{2bx-5}{x^2-x-2}$.

Решите уравнения:

● В. 1. $\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m(m-2)}=\frac{2}{(m-2)x}+\frac{1}{mx(m-2)}$;

2. $\frac{mx-n}{(m-2)n(x-1)}=\frac{2}{n(m-2)}+\frac{2+3x}{(m-2)(x-1)}$;

3. $(x+1)+a(x-2)=3$.

Ответы:

А. 1. $(-\infty;\infty)$ при $a=1$; $\varnothing$ при $a=-2$, $a=2$; $x=\frac{1}{a^2-4}$ при $\begin{cases}a\neq 1,\\ a\neq 2,\\ a\neq -2;\end{cases}$

2. $\varnothing$ при $a=-3$, $a=-1{,}5$, $a=0$; $-\frac{a(a^2+3a-9)}{3(2a+3)}$ при $\begin{cases}a\neq -3,\\ a\neq -1{,}5,\\ a\neq 0;\end{cases}$

3. $\varnothing$ при $a=-2$, $a=-1$; $x=-(2a^2+3a)$ при $\begin{cases}a\neq -2,\\ a\neq -1.\end{cases}$

Б. 1. $\varnothing$ при $a=0$, $a=2$; $x=\frac{7+3a}{2-a}$ при $a\neq 0$, $a\neq 2$;

2. $\varnothing$ при $a=-3$, $a=0{,}5$, $a=-2$;
$x=\frac{2a-1}{a+3}$ при $a\neq -3$, $a\neq -2$, $a\neq 0{,}5$;

3. $\varnothing$ при $b=-3$, $b=20$, $b=-1\frac{3}{13}$;
$x=\frac{8-5b}{4(b+3)}$ при $b\neq -3$, $b\neq 20$; $b\neq -1\frac{3}{13}$.

В. 1. $\varnothing$ при $m=-0{,}5$, $m=1$, $m=0$, $m=2$;
$x=\frac{2m+1}{m-1}$ при $m\neq 2$, $m\neq 0$, $m\neq -0{,}5$, $m\neq 1$;

2. При $m\neq 2$, $n\neq 0$, $m\neq 3n+2$, $m\neq 6n$ $x=\frac{3n-2}{m-3n-2}$;

при $m=4$, $n=\frac{2}{3}$ $\{x\in R/x\neq 1\}$;

при $m=3n+2$ $\left(n\neq\frac{2}{3}\right)$, $m=6n\left(n\neq\frac{2}{3}\right)$, $n=0$, $m=2$; решений нет;

3. $x = 2$ при $a < 1$; $x > 2$ при $a = -1$; $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2a-4}{a+1}$ при $-1 < a < 1$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$ при $a = 1$; $x = 2$ при $a > 1$.

§ 2. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным

Каждое из неравенств вида $Ax > B$, $Ax < B$, $AX \geq B$ или $AX \leqslant B$, где A и B — действительные числа или функции от параметров, а x — действительная переменная величина, называют линейным неравенством с одним неизвестным x.

Например, неравенство $(b-2)x < 4b$ — линейное относительно x. При $b = 2$ x — любое число, при $b > 2$ $x < \dfrac{4b}{b-2}$, при $b < 2$ $x > \dfrac{4b}{b-2}$.

Решите неравенство $\dfrac{(a+2)x}{a-1} - \dfrac{2}{3} < 2x - 1$.

По смыслу задачи $a \neq 1$. Преобразуем неравенство:

$$\frac{3ax + 6x - 2a + 2 + 3a - 6ax - 3 + 6x}{3(a-1)} < 0, \quad \frac{3x(4-a) + a - 1}{3(a-1)} < 0. \qquad (1)$$

При $a = 1$ решений нет.

1) $a - 1 > 0$, т. е. $a > 1$, тогда неравенство (1) равносильно неравенству $3x(4-a) + a - 1 < 0$ или $3x(4-a) < 1 - a$.

а) $4 - a = 0$, $a = 4$, $x \cdot 0 < -3$; решений нет.

б) $4 - a > 0$, $a < 4$, $x < \dfrac{1-a}{3(4-a)}$, $x < \dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

Отсюда при $1 < a < 4$ $x < \dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

в) $4 - a < 0$, $a > 4$ $x > \dfrac{a-1}{3(a-4)}$. Тогда при $a > 4$ $x > \dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

2) $a - 1 < 0$, т. е. $a < 1$, неравенство (1) равносильно неравенству $3x(4-a) + a - 1 > 0$ или $3x(4-a) > 1 - a$. (2)

а) $4 - a = 0$, $a = 4$, $0 \cdot x > -3$, x — любое, но так как $a < 1$, то неравенство (2) решений не имеет.

б) $4-a>0, a<4,\ x>\dfrac{1-a}{3(4-a)} \Rightarrow x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

Учитывая, что $a<1$, получим, что при $a<1$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$.

в) $4-a<0$, $a>4$, но так как $a<1$, то рассматривать неравенство (2) нет смысла.

Ответ:

при $a<1$ и при $a>4$ $x>\dfrac{a-1}{3(a-4)}$; при $1<a<4$ $x<\dfrac{a-1}{3(a-4)}$;
при $a=1$ и при $a=4$ решений нет.

III **Решите неравенство** $\dfrac{ax-3}{x-3}-\dfrac{a}{2}<a-1.$ **(3)**

Решение

По смыслу задачи $x\neq 3$.

Преобразуем неравенство (3):

$$\frac{2ax-6-ax+3a+2-2ax-6+6a}{2(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{-ax+9a+2x-12}{2(x-3)}<0, \qquad (4)$$

$$\frac{x(2-a)+9a-12}{2(x-3)}<0.$$

Неравенство (4) равносильно неравенству (3) и сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(2-a)<12-9a, & (4\text{ а})\\ x>3;\end{cases}\\ \begin{cases}(2-a)x>12-9a, & (4\text{ б})\\ x<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решаем систему (4 а). Рассмотрим первое неравенство $x(2-a)<12-9a$.

1) $a=2,\ x\cdot 0<-6$; нет решений.

2) $2-a>0$, $a<2$, $x<\dfrac{9a-12}{a-2}$.

Итак, при $a<2$ $\begin{cases}x<\dfrac{9a-12}{a-2},\\ x>3.\end{cases}$ (5)

3) $2-a<0,\ a>2,\ x>\dfrac{9a-12}{a-2}$.

Итак, при $a>2$ $\begin{cases} x>\dfrac{9a-12}{a-2}, \\ x>3. \end{cases}$ (6)

Для выбора решения каждой из систем сравним величины $\dfrac{9a-12}{a-2}$ и 3.

Для этого рассмотрим разность $\dfrac{9a-12}{a-2}-3=\dfrac{6a-6}{a-2}\cdot\dfrac{6a-6}{a-2}<0$

при $1<a<2$. $\dfrac{6a-6}{a-2}>0$ при $a<1$ и при $a>2$, следовательно,

$\dfrac{9a-12}{a-2}<3$ при $1<a<2$; $\dfrac{9a-12}{a-2}>3$ при $a<1$ и при $a>2$.

Тогда следует решение (5) и при $1<a<2$ нет решений, при $a<1$

$3<x<\dfrac{9a-12}{a-2}$.

Система (6) имеет решение при $a>2: x>\dfrac{9a-12}{a-2}$.

Аналогично рассмотрим решение системы (4б). $(2-a)x>12-9a$.

1) $a=2,\ 0\cdot x>-6$, x — любое число, кроме $x=3$.

2) $2-a>0,\ a<2\ x>\dfrac{-12+9a}{-2+a}$.

Итак, при $a<2$ $\begin{cases} x>\dfrac{-12+9a}{-2+a}, \\ x<3. \end{cases}$ (7)

3) $2-a<0,\ a>2,\ x<\dfrac{9a-12}{a-2}$.

При $a>2$ $\begin{cases} x<\dfrac{9a-12}{a-2}, \\ x<3. \end{cases}$ (8)

Решаем системы (7) и (8), зная, что $\dfrac{9a-12}{a-2}<3$ при $1<a<2$.

Если $a=1$, $1-\dfrac{1}{2}<1-\dfrac{1}{2}$; решений нет.

$\dfrac{9a-12}{a-2}>3$ при $a<1$ и при $a>2$.

При $1<a<2$ система (7) имеет решение $\dfrac{9a-12}{a-2}<x<3$.

При $a < 1$ система (7) не имеет решений.

При $a > 2$ система (8) имеет решение $x < 3$.

Ответ:

при $a < 1$ $3 < x < \dfrac{9a-12}{a-2}$; при $a = 1$ решений нет;

при $1 < a < 2$ $x \in \left(\dfrac{9a-12}{a-2};3\right)$ при $a = 2$ $x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$;

при $a > 2$ $x \in (-\infty;3)$ или $x \in \left(\dfrac{9a-12}{a-2};+\infty\right)$.

III **Решите неравенство $|2x-a| \leqslant x+1$.**

Решение

1) $2x-a>0$, $x>\dfrac{a}{2}$, $2x-a \leqslant x+1$, $x \leqslant 1+a$. $\begin{cases} x > \dfrac{a}{2}, \\ x \leqslant 1+a. \end{cases}$ (9)

Сравним величины $1 + a$ и $\dfrac{a}{2}$, найдем их разность: $1+a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}+1$;

$\dfrac{a}{2}+1>0$ при $a>-2$; $\dfrac{a}{2}+1<0$ при $a<-2$, $1+a=\dfrac{a}{2}$ при $a = -2$.

Итак, $1 + a > \dfrac{a}{2}$ при $a>-2$; $1+a< \dfrac{a}{2}$ при $a < -2$.

Решая систему (9), имеем при $a > -2$ $\dfrac{a}{2}<x\leqslant 1+a$; при $a < -2$ нет решений.

2) $2x-a \leqslant 0$, $x \leqslant \dfrac{a}{2}$; $a-2x \leqslant x+1$, $x \geqslant \dfrac{a-1}{3}$; $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{a}{2}, \\ x \geqslant \dfrac{a-1}{3}. \end{cases}$ (10)

Сравним величины $\dfrac{a-1}{3}$ и $\dfrac{a}{2}$; $-\dfrac{a-1}{3}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+2}{6}$; $\dfrac{a}{2}>\dfrac{a-1}{3}$ при $a>-2$; $\dfrac{a}{2}<\dfrac{a-1}{3}$ при $a<-2$.

Решая систему (10), имеем при $a>-2$ $\dfrac{a-1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{2}$, при $a<-2$ решений нет. Объединяя решения при $a>-2$, получим $\dfrac{a-1}{3}\leqslant x\leqslant 1+a$.

3) $a=-2$ $|2x+2|\leqslant x+1,\ 2|x+1|\leqslant x+1;$

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x+2\leqslant x+1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\leqslant -1;\end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ:

При $a<-2$ нет решений; при $a=-2$ $x=-1$; при $a>-2$ $x\in\left[\dfrac{a-1}{3};\ a+1\right]$.

Дидактические материалы

Решите неравенства:

● **А.** 1. $3(2a-x)<ax+1$;

2. $\dfrac{x}{x-2}<\dfrac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$;

3. $2ax+\dfrac{a-1}{2}\geqslant(a+2)x$.

● **Б.** 1. $\dfrac{2x-1}{m+1}-\dfrac{x+1}{2(m-1)}>\dfrac{2x-3}{m-1}$;

2. $\dfrac{ax}{a-2}-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{4}$;

3. $\dfrac{ax+1}{3}+\dfrac{4a-x}{2}<\dfrac{a^2}{6}$.

● **В.** 1. $\dfrac{2x+1}{(a-1)x}-\dfrac{a+5}{a-1}>\dfrac{3}{x}$;

2. $\dfrac{m}{mx+1}+\dfrac{1}{mx-1}<\dfrac{1}{1-m^2x^2}$, если $m>0$;

3. $|ax+1|\leqslant\dfrac{x}{2}$.

Ответы:

А. 1. При $a=-3$ $x\in R$; при $a<-3$ $x<\dfrac{6a-1}{a+3}$; при $a>-3$ $x>\dfrac{6a-1}{a+3}$;

2. При $b>3$ $x\in\left(2;\dfrac{2b+1}{b-3}\right)$; при $b<3$ $x\in\left(\dfrac{2b+1}{b-3};\ 2\right)$; при $b=3$ решений нет;

3. при $a < 2$ $x \in \left(-\infty;\ \frac{1-a}{2(a-2)}\right)$; при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$;

при $a > 2$ $x \in \left(\frac{1-a}{2(a-2)};\ +\infty\right)$.

Б. 1. При $m < -9$ и при $-1 < m < 1$ $x \in \left(\frac{7+3m}{m+9};\ +\infty\right)$; при $-9 < m < -1$ и при $m > 1$ $x \in \left(-\infty;\ \frac{7+3m}{m+9}\right)$; при $m = -9$ и при $m \neq \pm 1$ решений нет;

2. При $a < -10$ и при $a > 2$ $x \in \left(-\infty;\ \frac{5(a-2)}{2(a+10)}\right)$; при $a = -10$ $x \in R$;

при $-10 < a < 2$ $x \in \left(\frac{5(a-2)}{2(a+10)};\ +\infty\right)$;

3. При $a > 1{,}5$ $x \in \left(-\infty;\ \frac{a^2-12a-2}{2a-3}\right)$; при $a = 1{,}5$ решений нет;

при $a < 1{,}5$ $x \in \left(\frac{a^2-12a-2}{2a-3};\ +\infty\right)$.

В. 1) при $a < -3$ и при $a > 1\frac{1}{3}$ $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3}; 0\right)$; при $-3 < a < 1$ $x \in (-\infty; 0)$ или $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$; при $a = -3$ $x \in (-\infty;\ 0)$; при $1 < a < 1\frac{1}{3}$ $x \in \left(0;\ \frac{4-3a}{a+3}\right)$; при $a = 1\frac{1}{3}$ и при $a = 1$ решений нет.

Решение

Приведем неравенство к виду $\frac{(a+3)x+3a-4}{(a-1)x} < 0$. При $a = -3$ оно принимает вид: $\frac{0x-13}{-4x} < 0$, что верно при $x < 0$. При $a > -3$ получим $\frac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{(a-1)x} < 0$. Если $-3 < a < 1$, то полученное неравенство равносильно неравенству $\frac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{x} > 0$. $\frac{4-3a}{a+3} < 0$ при $a > \frac{4}{3}$ и при $a < -3$; $\frac{4-3a}{a+3} > 0$ при $-3 < a < 1\frac{1}{3}$; $\frac{4-3a}{a+3} = 0$ при $a = 1\frac{1}{3}$. Значит, при $-3 < a < 1$ получим:

$x \in \left(\frac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$ или $x \in (-\infty\ ; 0)$. Пусть $a > 1$. В таком случае получим неравенство $\dfrac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{x} < 0$. Отсюда, если $1 < a < 1\frac{1}{3}$, то $x \in \left(0;\ \frac{4-3a}{a+3}\right)$. При $a = 1\frac{1}{3}$ решений нет. При $a > 1\frac{1}{3}$ получим $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3};\ 0\right)$.

Остается рассмотреть случай $a < -3$.

Исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{(a-1)\,x} > 0$. Так как при этом $a-1<0$, то получим $\dfrac{x-\frac{4-3a}{a+3}}{x} < 0$. Отсюда $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3};\ 0\right)$.

2. $\left(-\infty;\ \frac{m-2}{m^2+m}\right) \cup \left(-\frac{1}{m};\ \frac{1}{m}\right)$ при $0 < m < \frac{1}{2}$;

$(-\infty; -2) \cup (-2; 2)$ при $m = \frac{1}{2}$; $\left(-\infty;\ -\frac{1}{m}\right) \cup \left(\frac{m-2}{m^2+m};\ +\infty\right)$ при $m > \frac{1}{2}$.

3. $\left(\frac{2}{1-2a};\ -\frac{2}{2a+1}\right)$ при $a < -\frac{1}{2}$; $\left(\frac{2}{1-2a};\ +\infty\right)$ при $-\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{1}{2}$;

$\varnothing$ при $a \geqslant \frac{1}{2}$.

§ 3. Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным

Уравнение вида $mx^2 + px + q = 0$, где x — неизвестное, m, p, q — выражения, зависящие только от параметров, и $m \neq 0$, называют квадратным уравнением относительно x.

Допустимыми будем считать только те значения параметров, при которых m, p, q — действительны.

I **Уравнение $mx^2 + 3mx - (m + 2) = 0$ (1)**

Имеет смысл при любых действительных значениях параметра m. Контрольным значением для m является $m = 0$, при котором уравнение становится линейным.

Итак, рассмотрим 2 случая: 1) $m = 0$; 2) $m \neq 0$.

1) При $m = 0$ уравнение принимает вид $0x^2 + 0x - 2 = 0$ и не имеет корней.

2) При $m \neq 0$ уравнение является квадратным. И если при этом $D = m(13m + 8) \geqslant 0$, т. е. $m \leqslant -\dfrac{8}{13}$ или $m > 0$, то оно имеет два действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{1}{2m}\left(-3m \pm \sqrt{m(13m+8}\right)$.

II **Решите уравнение $ax^2 - (1 - 2a)x + a - 2 = 0$. (2)**

Решение

Контрольным значением для a является $a = 0$, при котором уравнение (2) становится линейным.

Итак, рассмотрим 2 случая:

- 1) $a = 0$; 2) $a \neq 0$.

1) При $a = 0$ уравнение (2) примет вид $-x - 2 = 0$; $x = -2$.

2) При $a \neq 0$ значения параметра, при которых дискриминант квадратного уравнения обращается в 0, также относят к контрольным значениям.

$D = (-(1-2a))^2 - 4a(a-2) = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 + 8a = 4a + 1 = 0$,

$a = -\dfrac{1}{4}$ — второе контрольное значение параметра a.

Если $a = -\dfrac{1}{4}$, то $x^2 + 5x + 9 = 0$ и $x = -3$.

При этом, если $a < -\dfrac{1}{4}$, то $D < 0$ и уравнение (2) не имеет действительных корней.

Если $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{1}{4}, \text{то } D \geqslant 0, \\ a \neq 0 \end{cases}$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 - 2 \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$.

Ответ:

-2 при $a = 0$; -3 при $a = -\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1 - 2a \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$ при $\dfrac{1}{4} < a < 0, a > 0$.

Параметр обозначен буквой d.
Решите уравнение $dx^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение

1) Если $d = 0$, то уравнение $2x + 1 = 0$ имеет решение $x = -\dfrac{1}{2}$.

2) Если $d \neq 0$, то $D_1 = 1 - d$.

$D_1 = 0$, при $d = 1$ одно решение: $x = -\dfrac{1}{d} = -1$.

$D_1 < 0$, при $d > 1$ нет решений.

$D_1 > 0$, при $d < 1$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$. Так как $d \neq 0$, то при $d < 0$ или $0 < d < 1 x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$.

Ответ:

при $d = 0$ $x = -\dfrac{1}{2}$; при $d = 1$ $x = -1$; при $d > 1$ нет решений;

при $d < 0$ или $0 < d < 1$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$.

IV Решите уравнение $ax^2 + 2(a + 1)x + 2a = 0$

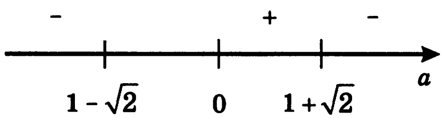
Решение

Контрольное значение $a = 0$.

1) Если $a = 0$, то $2x = 0$, $x = 0$ — одно решение.

2) Если $a \neq 0$, то получаем квадратное уравнение.

$D_1 = (a + 1)^2 - 2a^2 = 2a + 1 - a^2$.



Если $D_1 < 0$, то нет решений, при $a > 1 + \sqrt{2}$
или $a < 1 - \sqrt{2}$ $a^2 - 2a - 1 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

Если $D_1 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{2}$, одно решение $x = -\dfrac{a+1}{a}$.

При $a = 1 + \sqrt{2}$

$$x = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = -\left(2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

или при $a = 1 - \sqrt{2}$ $x = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = 2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2 = \sqrt{2}.$

Если $D_1 > 0$, то два решения:

$$x = \frac{-(a+1)\pm\sqrt{2a+1-a^2}}{a} \text{ при } 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2}.$$

Ответ:

при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 1 + \sqrt{2}$ или $a < 1 - \sqrt{2}$ нет корней;

при $a = 1 + \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$; при $a = 1 - \sqrt{2}$ $x = \sqrt{2}$;

при $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$ уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\frac{-(a+1)+\sqrt{D_1}}{a};\ x_2 = \frac{-(a+1)-\sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = 2a + 1 - a^2.$$

V **Рассмотрим уравнение** $\dfrac{x}{m(x+1)} - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{3-m^2}{(x+1)(x+2)m}$ **(3)**

Решение

При $m = 0$ уравнение не имеет смысла, значение x должно удовлетворять условиям $x \neq -1$, $x \neq -2$. Умножив обе части данного уравнения на $m(x+1)(x+2) \neq 0$, получим уравнение $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$, равносильное данному.

$D = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4$, $x = m - 1 \pm 2$.

Отсюда $x_1 = m + 1$, $x_2 = m - 3$.

Среди полученных корней могут быть и посторонние, а именно те, при которых произведение $(x + 2)(x + 1)$ обращается в 0. Чтобы выделить их, необходимо узнать, при каких значениях m полученные корни (или один из них) принимают значения -2 или -1:

$x_1 = m + 1 = -2$ при $m = -3$, при этом $x_2 = m - 3 = -6$;

$x_1 = m + 1 = -1$ при $m = -2$, при этом $x_2 = m - 3 = -5$;

$x_2 = m - 3 = -2$ при $m = 1$, при этом $x_1 = m + 1 = 2$;

$x_2 = m - 3 = -1$ при $m = 2$, при этом $x_1 = m + 1 = 3$.

Итак,

при $m \neq 0$, $m \neq -3$, $m \neq -2$, $m \neq 1$ $x_1 = m + 1$, $x_2 = m - 3$;

при $m = -3 x = -6$; при $m = -2 x = -5$; при $m = 1 x = 2$;

при $m = 2 x = 3$; при $m = 0$ уравнение не имеет смысла.

VI **Решите уравнение** $1 + \dfrac{3}{x-a-1} = \dfrac{5a+5}{(x-a-1)(x-2)}$. **(4)**

Решение

Значение x должно удовлетворять условиям: $x \neq a + 1$, $x \neq 2$, т. е. $a \neq -1$.

Преобразуем уравнение, умножив обе части на $(x - 2)(x - a - 1) \neq 0$, к виду

$$x^2 - ax - 3a - 9 = 0. \qquad (5)$$

Контрольными значениями параметра a будут те значения a, которые обращают D в 0.

$D = (-a)^2 + 4\,(3a + 9) = a^2 + 12a + 36 = (a + 6)^2 = 0$, $a = -6$.

1) $D \geqslant 0$, при любых $a \neq -1$ уравнение (5) имеет два корня

$x = \dfrac{a \pm (a+6)}{2}$; $x_1 = a + 3$; $x_2 = -3$. Проверим условия: $-3 \neq a + 1$; $a \neq -4$; $a + 3 \neq 2$; $a \neq -1$.

2) Если $a = -1$, то уравнение (5) примет вид $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ — не удовлетворяет условию $x \neq 2$.

3) Если $a = -4$, то уравнение (5) примет вид $x^2 + 4x + 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, но $x = -3$ при $a \neq -4$, поэтому остается одно решение: $x = -1$ при $a = -4$.

Ответ:

$a + 3$ и (-3) при $a \neq -1$, $a \neq -4$; (-3) при $a = -1$; (-1) при $a = -4$.

VIII **При каких значениях параметра a уравнение $(a - 1)\,x^2 + (a + 4)\,x - (a + 3) = 0$ имеет два различных корня?**

Решение

Уравнение имеет два различных корня, если $a - 1 \neq 0$ и $D > 0$:

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ (a+4)^2 + 4\,(a-1)(a+3) > 0. \end{cases}$$

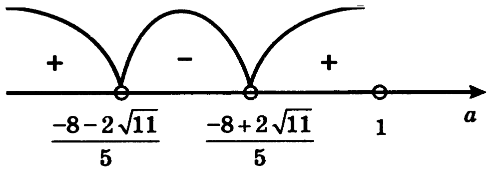
Решаем второе уравнение системы:

$$a^2 + 8a + 16 + 4a^2 + 8a - 12 > 0,\ 5a^2 + 16a + 4 > 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов:

$5a^2 + 16a + 4 = 0$, $D_1 = 64 - 20 = 44$; $\sqrt{D_1} = 2\sqrt{11}$,

$a_1 = \dfrac{-8 - 2\sqrt{11}}{5}$; $a_2 = \dfrac{-8 + 2\sqrt{11}}{5} \approx \dfrac{-8 + 2 \cdot 3{,}32}{5} = -0{,}276 < 1$.



Ответ:

уравнение имеет два различных корня при $a < \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}$ и при $\frac{-8+2\sqrt{11}}{5} < a < 1 \cup a > 1$.

VIII **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + \left(|a+2| - |a+10|\right)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.**

Решение

Известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня, только когда $\begin{cases} ac > 0, \\ b^2 - 4ac > 0; \\ ab < 0. \end{cases}$

для заданного уравнения получаем систему:

$$\begin{cases} (a+1)(a-5) > 0, \\ (|a+2| - |a+10|)^2 - 4(a+1)(a-5) > 0, \\ (a+1)\left(|a+2| - |a+10|\right) < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

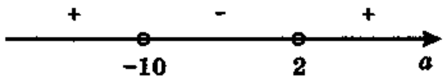
Решаем каждое из неравенств системы (6):

$(a+1)(a-5) > 0$, решением неравенства является $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Второе неравенство системы равносильно следующему:

$$a^2 + 4a + 4 - 2|a+2| \cdot |a+10| + a^2 + 20a + 100 - 4a^2 + 20a - 4a + 20 > 0,$$

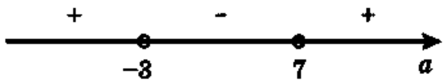
$$-2a^2 + 40a + 124 - 2|a+2||a+10| > 0.$$



1) $a < -10$, $-2a^2 + 40a + 124 - 2(a^2 + 12a + 20) > 0$,
$-2a^2 + 40a + 124 - 2a^2 - 24a - 40 > 0$, $-4a^2 + 16a + 84 > 0$,

$$a^2 - 4a - 21 < 0, \qquad (*)$$

$$a^2 - 4a - 21 = 0.$$



$a = 2 \pm 5$; $a_1 = -3$; $a_2 = 7$.

Решением неравенства (*) будут $-3 < a < 7$, но они не удовлетворяют условию $a < -10$.

2) $-10 \leqslant a < -2$. $-2a^2 + 40a + 124 + 2a^2 + 24a + 40 > 0$; $64a + 164 > 0$;

$$a > -\frac{164}{64} = -\frac{41}{16}.$$

Итак, $-\frac{41}{16} < a < -2$.

3) $a \geqslant -2$, $a^2 - 4a - 21 < 0$, $-3 < a < 7$. Решением будут $-2 \leqslant a < 7$.
Решаем третье неравенство системы (6):

$(a+1)(|a+2| - |a+10|) < 0$ на промежутках $a < -10$, $-10 \leqslant a < -2$, $a \geqslant -2$.

1) $a < -10$. $(a+1)(-a - 2 + a + 10) < 0$; $8(a+1) < 0$

$$\begin{cases} a < -10, \\ a < -1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -10.$$

2) $-10 \leqslant a < -2$. $(a+1)(-a - 2 - a - 10) < 0$, $(a+1)(a+6) > 0$.

$$\begin{cases} -10 \leqslant a < -2, \\ a < -6 \text{ или } a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leqslant a < -6.$$

3) $a \geqslant -2$. $(a+1)(a + 2 - a - 10) < 0{,}8(a+1) > 0$, $a > -1$.

$$\begin{cases} a \geqslant -2, \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow a > -1.$$

Итак, система (6) равносильна следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a>5; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{41}{16}<a<-2, \\ -2\leqslant a<7; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<-10, \\ -10\leqslant a<-6, \\ a>-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решив ее, получим $5 < a < 7$.

Ответ:

$5 < a < 7$.

IX **При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2 - 2(a + +1)x - 2a + 1 = 0$ отрицателен, а другой положителен?**

Решение

Так как уравнение имеет два решения, то $D > 0$ и по теореме Виета $-2a + 1 < 0$.

$$\begin{cases} (a+1)^2-(-2a+1)>0, \\ -2a+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a+1+2a-1>0, \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a>0, \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<-4, a>0, \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}.$$

Ответ:

при $a > \dfrac{1}{2}$.

Бывают задачи, в которых требуется найти все значения параметра, при которых между корнями уравнения выполняется то или иное соотношение. Можно было бы решать эти задачи, выразив корни через коэффициенты уравнения и выписав явно заданные в условии задачи соотношения. Получаемые при этом уравнения и неравенства с параметрами обычно бывают очень сложными. Более простой метод основан на использовании теоремы Виета.

X **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равен удвоенному второму корню.**

Решение

Пусть параметр a принимает одно из искомых значений. Обозначив корни исходного уравнения через x_1, x_2, по теореме Виета и согласно условию задачи получаем следующую систему равенств: $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = a + 2$, $x_1 = 2x_2$.

Из первого и третьего равенств системы находим $x_1 = -\frac{2}{3}a$, $x_2 = -\frac{1}{3}a$.

Подставляя эти выражения для x_1 и x_2 во второе равенство системы, получаем равенство $\frac{2}{9}a^2 = a + 2$, которое можно переписать так: $2a^2 - 9a - 18 = 0$. Все искомые значения параметра находятся среди корней этого квадратного уравнения. Оно имеет два корня: $a_1 = -\frac{3}{2}$ и $a_2 = 6$. При $a = -\frac{3}{2}$ исходное уравнение принимает вид $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ удовлетворяют условию задачи. При $a = 6$ исходное уравнение имеет вид $x^2 + 6x + 8 = 0$. Его корни $x_1 = -4$ и $x_2 = -2$ также удовлетворяют условию задачи.

Ответ:

$-\frac{3}{2}$ и 6.

Иногда бывает необходимо знать расположение корней квадратного трехчлена по отношению к некоторому числу или числам. Можно найти сами корни, выписав систему неравенств, которым они должны удовлетворять, и из нее найти условия на параметры. Однако и в этом случае более простое решение может быть получено с помощью теоремы Виета.

XI **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни квадратного трехчлена $x^2 + ax + 1$ различны и лежат на отрезке [0; 2].**

Решение

Дискриминант D заданного квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + 1$ равен $D = a^2 - 4$. Для существования различных корней необходимо условие $D > 0$, т. е. $a^2 - 4 > 0$. Обозначим эти корни буквами x_1 и x_2. Согласно теореме Виета справедливо равенство $x_1 + x_2 = -a$. Из условия задачи следует, что вместе с корнями промежутку [0; 2] должна принадлежать и абсцисса вершины параболы — середина отрезка с концами x_1 и x_2, т. е. число $\frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{a}{2}$. Поэтому еще одно необходимое условие на параметр дают неравенства $0 < -\frac{a}{2} < 2$. Коэффициент при x^2 в заданном трехчлене положителен, поэтому точки 0 и 2, лежащие вне интервала, содержащего корни, должны удовлетворять неравенствам $f(0) = 1 \geqslant 0$ и $f(2) = 2a + 5 \geqslant 0$. Итак, искомые значения параметра a удовлетворяют системе неравенств.

$$a^2 - 4 > 0,\ 0 < -\frac{a}{2} < 2,\ 2a + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \quad \text{или} \quad a > 2, \\ -4 < a < 0, \\ a \geqslant -\dfrac{5}{2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Легко видеть, что эти условия и достаточны, т. е. если параметр удовлетворяет условиям (7), то заданный квадратный трехчлен имеет различные корни, принадлежащие отрезку [0; 2]. Решая систему неравенств (7), находим искомое множество значений параметра: $-\frac{5}{2} \leqslant a < -2$.

Ответ:

$-\frac{5}{2} \leqslant a < -2$.

XII

Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$ (1)

Решение

При $a < 0$ решений нет. При $a = 0$ $|x^2 - 2x - 3| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. $D_1 = 1 + 3 = 4 > 0$ — два решения.

При $a > 0$ $x^2 - 2x - 3 = a$ или $x^2 - 2x - 3 = -a$.

$x^2 - 2x - (3 + a) = 0$ или $x^2 - 2x - (3 - a) = 0$,

$D_1 = 1 + 3 + a = 4 + a$ или $D_1 = 1 + 3 - a = 4 - a$.

1) $D_1 < 0$, $4 + a < 0$, $a < -4$ или $4 - a < 0$, $a > 4$. Нет решений.

При $a > 4$ уравнение (1) имеет два решения, так как $x^2 - 2x - 3 = a$ имеет два решения, а $x^2 - 2x - 3 = -a$ не имеет решений.

2) $D_1 = 0$, $a = -4$ или $D_1 = 0$, $a = 4$. Нет решений.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 4 \text{ — два решения,} \\ x^2 - 2x - 3 = -4 \text{ — одно решение.} \end{array}\right.$$ Итак, при $a = 4$ три решения.

3) $D_1 > 0$, $4 + a > 0$, $a > -4$ или $4 - a > 0$, $a < 4$.

Два решения.

Итак, $\begin{cases} a > 0, \\ a > -4 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0$ — два решения.

Объединяя эти два случая, получаем, что при $0 < a < 4$ — четыре решения.

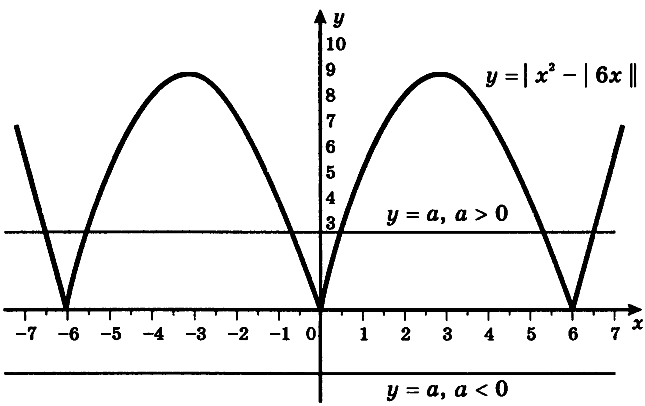
Ответ:

если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$, то два решения;
если $0 < a < 4$, то четыре решения; если $a = 4$, то три решения;
если $a > 4$, то два решения.

XIII **Определить число решений уравнения $|x^2 - 6|x|| = a$ в зависимости от значений параметра a.**

Решение

Решаем уравнение графически: в одной системе координат xOy строим графики функций $y = |x^2 - 6|x||$ и $y = a$ и находим абсциссы их точек пересечения.



Ответ:

при $a < 0$ уравнение не имеет корней;

при $a = 0$ уравнение имеет три корня;

при $0 < a < 9$ уравнение имеет шесть корней;

при $a = 9$ уравнение имеет четыре корня;

при $a > 9$ уравнение имеет два корня.

Дидактические материалы

● А. 1. При каких значениях параметра a равны между собой корни квадратного уравнения $x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$?

2. Найдите значения p, при которых уравнение $3x^2 - 2px - p + 6 = 0$ имеет два корня.

3. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2 - 2ax + 4 = 0$ не имеет действительных корней.

4. При каких значениях параметра a уравнение $a(x^2 + x + 1) = x^2 - 4x - 7$ имеет один корень?

5. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ равен удвоенному другому?

6. В уравнении $2x^2 + ax - 6 = 0$ один из корней равен 3. Найдите a и второй корень.

7. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a - 1)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительны?

8. При каких значениях параметра m оба корня уравнения $x^2 + 2(m - 1)x + 4m - 7 = 0$ отрицательны?

9. Решите уравнение $(k - 5)x^2 + 3kx - (k - 5) = 0$.

10. Решите уравнение $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}$.

● **Б. 1.** Уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет ровно три корня. Найдите значение параметра a.

2. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^4 - 2x^2 + 0{,}125a = 0$ имеет четыре действительных различных корня.

3. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a^2 + 1 = 0$ принимает наименьшее значение?

4. Решите уравнение $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n} - \dfrac{1}{2-nx} = -\dfrac{x}{n}$.

5. Решите уравнение $\dfrac{2a-x}{x+a-3} + \dfrac{3x-2a}{x-a+1} = 4$.

6. Решите уравнение $\dfrac{x}{2a+3} + \dfrac{2a-1}{x} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+3}$.

7. $\dfrac{(m-2)x}{m-1} - 1 = \dfrac{m+2}{m-1} - \dfrac{2x^2+m+1}{(m-1)x}$.

8. Решите уравнение $\dfrac{x-a}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} + \dfrac{44}{x^2-4} = 0$.

9. Решите уравнение $\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{x-k} + \dfrac{2k+1}{x(x-k)} = \dfrac{1}{kx(x-k)}$.

10. Решите уравнение $\dfrac{3x^2-2}{a^2+3a} + \dfrac{x-1}{a+3} + \dfrac{2}{a} = 0$.

11. При каких значениях параметра a разность корней уравнения $2x^2 - (a+2)x + (2a-1) = 0$ равна их произведению?

● **В. 1.** Решите уравнение $1 + \dfrac{5a-3}{x-a} = \dfrac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}$.

2. Сколько решений может иметь уравнение $|x| - 5 = -\dfrac{a-4}{|x|}$ в зависимости от параметра a?

3. Решите уравнение $3 + \dfrac{2a-3}{(x-2)(x+a)} = \dfrac{2x+5a}{x+a}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{x}{n} + \dfrac{1}{n(x-2)} = \dfrac{x(x+2)}{m(x-2)} + \dfrac{1}{m(x-2)}$.

5. Решите уравнение $\dfrac{2a}{x^2-1} = \dfrac{b}{a-bx}\left(\dfrac{a}{x-1} - b\right)$.

6. Решите уравнение $\dfrac{7a-b+x}{7b-a+x} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a+5b+x}{b+5a+x}$.

7. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2-(3a+1)x+(2a^2+4a-6)=0$ а) больше 1; б) меньше -1?

8. При каких значениях a один из корней уравнения $(a^2-2)x^2+$ $+(a^2+a-1)x-a^3+a^2=0$ больше a, а другой меньше a?

9. При каких значениях a корни уравнения $ax^2-(2a+1)x+$ $+2a-1=0$ больше 1?

Ответы и решения:

А. 1. $a=\frac{1}{2}$;

2. $(-\infty;-6]\cup[3;+\infty)$;

3. 1;

4. 1; 2; $-\frac{22}{3}$;

5. -4;

6. $a=-4$; $x=-1$;

7. $(\infty;-3)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$;

8. $\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[4;+\infty)$;

9. При $k=5$ $x=0$; при $k\neq5$ $x=\frac{1}{2(k-5)}\cdot\left(-3k\pm\sqrt{9k^2+4(k-5)^2}\right)$;

10. При $a\neq3$, $a\neq-1$ $x_1=a+3$, $x_2=a-1$, при $a=3$ $x=6$.

Б. 1. 4;

2. 7;

3. $\frac{4}{5}$;

4. $x_1=\frac{n+1}{n-1}$, $x_2=-1$ при $n\neq2$; 0; 1; $x=\frac{1}{3}$ при $n=-2$; $x=-1$ при $n=3$;

5. $x_1=2a-3$; $x_2=2$ при $a\neq1$; 2; $\frac{5}{2}$; 3; $x=-1$ при $a=1$; $x=2$ при $a=2$ и $a=\frac{5}{2}$; $x=3$ при $a=3$;

6. При $a\neq0{,}5$, $a\neq-1{,}5$ $x_1=2a-1$, $x_2=2a+3$; при $a=-1{,}5$ решений нет;

7. При $m \neq 0, m \neq \pm 1$ $x_1 = \dfrac{m+1}{m}, x_2 = 1$, при $m = 0$ и при $m = -1$ $x = 1$; при $m = 1$ решений нет;

8. При $a \leqslant 4, 12 \leqslant a < 13$ и при $a > 13$ $x = 0{,}5\left(a - 12 \pm \sqrt{a^2 - 16a + 48}\right)$; при $a = 13$ $x = -1$;

9. При $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$, $k \neq 0{,}5$ $x_1 = 2k - 1$, $x_2 = k + 1$; при $k = 0{,}5$ $x = 1{,}5$; при $k = 1$ $x = 2$; при $k = -1 x = -3$; при $k = 0$ решений нет;

10. $\varnothing$ при $6 - 2\sqrt{21} < a < 6 + 2\sqrt{21}$; $\dfrac{-a \pm (a^2 - 12a - 48)^{\frac{1}{2}}}{6}$ при $a \leqslant 6 - 2\sqrt{21}$; $a \geqslant 6 + 2\sqrt{21}$;

11. $1; -\dfrac{11}{3}$.

В. 1. $a - 2$ и $4 - 2a$ при $a \neq -\dfrac{1}{2}$, $a \neq 1$, $a \neq \dfrac{4}{3}$; 5 при $a = -\dfrac{1}{2}$; (-1) при $a = 1$; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ при $a = \dfrac{4}{3}$;

2. При $a < -\dfrac{9}{4}$ — решений нет; при $a = -\dfrac{9}{4}$ или при $a = 4$ — два решения; при $-\dfrac{9}{4} < a < 4$ — четыре решения;

3. $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 3$ при $a \neq -3$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{3}{2}$; 2; $x = -7$ при $a = -3$; $x = 3$ при $a = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{3}{2}$; 2;

4. При $mn \neq 0$ и $m \neq n$ $x = 0$; при $m = 9n$ $(n \neq 0)$ $x = 0{,}5$; при $m \neq n$, $m \neq 9n$, $mn > 0$, $x = \dfrac{1}{(m-n)} - \left(m + n \pm 2\sqrt{mn}\right)$.

5. **Решение.** При $a = b = 0$ уравнение не имеет смысла, при $b = 0$ и $a \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0$. При $x \neq \pm 1$, $x \neq \dfrac{a}{b}$ это уравнение равносильно уравнению $b^2x^2 - 3abx + 2a^2 - ab - b^2 = 0$. Поскольку $b \neq 0$, то $x_1 = \dfrac{2a+b}{b}$, $x_2 = \dfrac{a-b}{b}$.

Выделим те значения a и b, при которых $x = \pm 1$ или $x = \dfrac{a}{b}$.

$x_1 = \dfrac{2a+b}{b} = -1$ при $a = -b$, при этом $x_2 = \dfrac{a-b}{b} = -2$.

$x_1 = \dfrac{2a+b}{b} = 1$ при $a = 0$, при этом $x_2 = -1$.

$x_2 = \dfrac{a-b}{b} = -1$ при $a = 0$, при этом $x_1 = 1$.

$x_2 = \dfrac{a-b}{b} = 1$ при $a = 2b$, при этом $x_1 = 5$; значений a и b, при которых $x_2 = \dfrac{a}{b}$, не существует.

Ответ:

при $b \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq -b$, $a \neq 2b$ $x_1 = \dfrac{2a+b}{b}$, $x_2 = \dfrac{a-b}{b}$;

при $a = -b \neq 0$ $x = -2$; при $a = 2b \neq 0$ $x = 5$; при $ab = 0$ нет решений.

6. Решение. По смыслу задачи $b \neq 0$, $x \neq a - 7b$, $x \neq -(b + 5a)$. Применив производную пропорцию, получим: $\dfrac{8a-8b}{7b-a+x} = \dfrac{a^2-b^2+(a-b)x}{b(b+5a+x)}$, или $\dfrac{8(a-b)}{7b-a+x} = \dfrac{(a-b)(a+b+x)}{b(b+5a+x)}$. При $a = b \neq 0$ — любые числа, кроме $x = -6b$. При $a \neq b$ получим уравнение $\dfrac{8b}{7b-a+x} = \dfrac{a+b+x}{b+5a+x}$. Записав его в виде $\dfrac{7b-a+x}{8b} = \dfrac{b+5a+x}{a+b+x}$ и опять применив производную пропорцию, получим: $\dfrac{-b-a+x}{8b} = \dfrac{4a}{a+b+x}$, или $\dfrac{(b+a)-x}{8b} = \dfrac{-4a}{a+b+x}$. Отсюда $(b+a)^2 - x^2 = -32ab$, т. е. $x = \pm\sqrt{b^2+a^2+34ab}$ при $b^2 + a^2 + 34ab \geqslant 0$.

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений a и b, при которых $x = a - 7b$ или $x = -(b + 5a)$.

Найдем значения a и b, при которых хотя бы один из корней уравнения $x^2 - (b^2 + a^2 + 34ab) = 0$ равен $a - 7b$.

При $x = a - 7b$ уравнение принимает вид: $(a-7b)^2 - (b^2+a^2+34ab) = 0$ или $48b(b-a) = 0$, что невозможно, так как $b \neq 0$ и $a \neq b$. При $x = -(b + 5a)$ придем к равенству $24a(a - b) = 0$, верному при $a = 0$. Таким образом, при $a = 0$ один из корней равен $-(b + 5a) = -b$ (посторонний). При этом второй корень равен b.

Ответ:

при $ab \neq 0$ и $a \neq b$, $a^2 + b^2 + 34ab \geqslant 0$ $x = \pm\sqrt{b^2+a^2+34ab}$; при $a = b \neq 0$ x — любое число, кроме $x = -6a$; при $a = 0$, $b \neq 0$ $x = b$; при $b = 0$ решений нет.

7. а) $a > \frac{3}{2}$; б) $a < -4$.

8. $-\sqrt{2} < a < 0$; $1 < a < \sqrt{2}$. Число a лежит между корнями квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, только когда $f(a) < 0$.

9. $1 < a \leqslant \frac{(2+\sqrt{6})}{2}$. Корни уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ больше числа a, только когда $b^2 - 4ac \geqslant 0$; $-\frac{b}{2a} > a$, а $f(a) > 0$.

§ 4. Квадратные неравенства

Каждое из неравенств вида $mx^2 + px + q > 0$, $mx^2 + px + q < 0$ $(\leqslant 0)$ *или* $mx^2 + px + q \leqslant 0$, *где* $m \neq 0$, *называют квадратным относительно* x *(*m, p, q *— действительные числа или функции от некоторых параметров).* Допустимыми являются те значения параметров, при которых m, p, q — действительны.

I **Рассмотрим решение неравенства $x^2 - 2x + b > 0$. (1)**

Пусть D — дискриминант трехчлена $x^2 - 2x + b$. При $D = 0$, т. е. при $b = 1$, неравенство (1) принимает вид: $(x - 1)^2 > 0$. Оно верно при любых действительных значениях x, кроме $x = 1$. При $D < 0$, т. е. при $b > 1$, неравенство (1) справедливо при любых действительных значениях x.

При $D > 0$, т. е. при $b < 1$, трехчлен $x^2 - 2x + b$ имеет два корня: $1-\sqrt{1-b}$ и $1+\sqrt{1-b}$, — и решением неравенства является $\left(-\infty;\ 1-\sqrt{1-b}\right) \cup \left(1+\sqrt{1-b};\ +\infty\right)$.

Ответ:

при $b = 1$ x — любое, кроме $x = 1$; при $b > 1$ x — любое; при $b < 1$ $x \in \left(-\infty;\ 1-\sqrt{1-b}\right) \cup \left(1+\sqrt{1-b};\ +\infty\right)$.

II **Решим неравенство $ax^2 - 2x + 4 > 0$.**

Решение

Приравнивая к нулю коэффициент при x^2 и дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 - 2x + 4$, находим первое контрольное значение параметра $a = 0$ и второе контрольное значение $a = \frac{1}{4}$ (причем если $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$; если $a \leqslant \frac{1}{4}$, то $D \geqslant 0$).

Решим данное неравенство для каждого из следующих четырех случаев:

1) $a > \frac{1}{4}$; 2) $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $a = 0$; 4) $a < 0$.

1) Если $a > \frac{1}{4}$, то трехчлен $ax^2 - 2x + 4$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент. Значит, трехчлен положителен при любых x, т. е. решением исходного неравенства в этом случае является множество всех действительных чисел.

2) Если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то трехчлен $ax^2 - 2x + 4$ имеет следующие корни: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{a}$, причем $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a} \leqslant \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$. Значит, решением исходного неравенства является следующая совокупность: $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$; $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$.

3) Если $a = 0$, то данное неравенство принимает вид $-2x + 4 > 0$, откуда получаем $x < 2$.

4) Если $a < 0$, то имеем $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

Значит, в этом случае решением неравенства является следующая система: $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

Ответ:

если $a > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < \infty$; если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$; $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$;

если $a = 0$, то $x < 2$; если $a < 0$, то $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

III **Решим неравенство $mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0$.** **(2)**

Решение

При $m = 0$ (контрольное значение) оно принимает вид $2x + 2 < 0$, и решением его служит $x < -1$.

Введем обозначение $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + (m+2)$, где $m \neq 0$. В этом случае неравенство $f(x) < 0$ — квадратное относительно x. Пусть D — дискриминант $f(x)$. $0{,}25D = 1 - 4m$.

Если $D < 0$, т. е. если $m > 0,25$, то знак $f(x)$ совпадает со знаком m при любых действительных значениях x, т. е. $f(x) > 0$ при любых $x \in \boldsymbol{R}$. Значит, при $m > 0,25$ неравенство $f(x) < 0$ не имеет решения.

Если $D = 0$, т. е. $m = 0,25$, то $f(x) = (0,5x + 1,5)^2$, т. е. $f(x) \geqslant 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, при $m = 0,25$ неравенство $f(x) < 0$ тоже не имеет решения.

Рассмотрим случай, когда $D > 0$, т. е. $m < 0,25$ $(m \neq 0) \Rightarrow m < 0$ или $0 < m < 0,25$. $f(x) = 0$ при двух действительных значениях x:
$x_1 = \dfrac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right)$ и $x_2 = \dfrac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right)$.

Здесь могут представиться два случая:

1. $m < 0$.

Решить неравенство $f(x) < 0$ — значит найти те значения x, при которых знак $f(x)$ совпадает со знаком m. Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что $-\sqrt{1-4m} < \sqrt{1-4m}$,

т. е. $m-1-\sqrt{1-4m} < m-1+\sqrt{1-4m}$, но так как $m < 0$,

то $\dfrac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right) > \dfrac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right)$.

Поэтому решением неравенства (2) является:

$$\left(-\infty; \frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right)\right) \cup \left(\frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right); +\infty\right).$$

2. $0 < m < 0,25$.

Теперь для решения неравенства (2) достаточно указать те значения m, при которых знак $f(x)$ противоположен знаку m. Поскольку при $0 < m < 0,25$ $x_1 < x_2$, то $x \in (x_1; x_2)$.

Ответ:

при $m = 0$ $x < -1$; при $m < 0$ $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$; при $0 < m < 0,25$ $x \in (x_1; x_2)$; при $m \geqslant 0,25$ решений нет.

IV **Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geqslant 0$.**

Решение

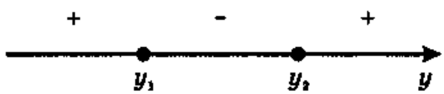
Левая часть неравенства представляет собой многочлен как относительно x, так и относительно параметра a. Степени соответственно равны 4 и 3. Однако если умножить многочлен на a, а затем сделать замену $y = ax$, то в новом многочлене максимальная степень параметра a будет равна 2. Случай $a = 0$ дает нам ответ $x \geqslant \frac{1}{4}$. Будем теперь считать, что $a > 0$. Умножив обе части неравенства на a и сделав замену $y = ax$, получим: $4y^4 + 4ay^2 + 32y + a^2 + 8a \geqslant 0$.

Левая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно a:

$a^2 + (4y^2 + 8)\,a + 4y^4 + 32y \geqslant 0$, $\frac{1}{4}D = (2y^2 + 4)^2 - 4y^4 - 32y = 16\,(y - 1)^2$;
$a = -(2y^2 + 4) \pm 4\,(y - 1)$.

Раскладывая левую часть неравенства на множители, получим: $(a + {}$ $+ 2y^2 + +4y)(a + 2y^2 - 4y + 8) \geq 0$, или $(2y^2 + 4y + a)(2y^2 - 4y + 8 + a) \geqslant 0$. Приравняем к нулю второй множитель левой части неравенства: $2y^2 - 4y + 8 + a = 0$.

$\frac{1}{4}D = 4 - 16 - 2a = -12 - 2a < 0$. Если $a > 0$, корней нет, значит, $2y^2 - 4y + 8 + a > 0$ при любом y. Если $a > 0$, приходим к неравенству $2y^2 + 4y + a \geqslant 0$. Решим его методом интервалов: $2y^2 + 4y + a = 0$, $\frac{1}{4}D = 4 - 2a$. Если $\frac{1}{4}D > 0$, $0 < a < 2$, то квадратный трехчлен имеет два корня: $y_1 = \dfrac{-2-\sqrt{4-2a}}{2}$ и $y_2 = \dfrac{-2+\sqrt{4-2a}}{2}$.



Решением неравенства будет $y \leqslant \frac{1}{2}\left(-2-\sqrt{4-2a}\right)$
или $y \geqslant \frac{1}{2}\left(-2+\sqrt{4-2a}\right)$; если $D \leqslant 0$, $a \geqslant 2$, y — любое. Возвращаясь к x, получим ответ.

Ответ:

если $a = 0$, то $x \geqslant \frac{1}{4}$; если $0 < a < 2$, то $x \leqslant \frac{1}{2a}\left(-2-\sqrt{4-2a}\right)$
или $x \geqslant \frac{1}{2a}\left(-2+\sqrt{4-2a}\right)$; если $a \geqslant 2$, то x — любое.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $16x^2 + axy - y \geqslant x - 16y^2 - \dfrac{1}{64}$ выполняется для всех пар чисел $(x;\,y)$ таких, что $|\,x\,| = |\,y\,|$.

Решение

Условие $|\,x\,| = |\,y\,|$ равносильно условию $x = y$ или $x = -y$. Поэтому неравенство принимает вид $16x^2 + ax^2 - x - x + 16x^2 + \dfrac{1}{64} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (32 + \text{a})\, x^2 - 2x + \dfrac{1}{64} \geqslant 0$ или $16x^2 - ax^2 + x - x + 16x^2 + \dfrac{1}{64} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (32 - a)x^2 + \dfrac{1}{64} \geqslant 0.$

Полученные неравенства должны одновременно выполняться для любых значений x, тогда a должно удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} 32 + a > 0, \\ 32 - a \geqslant 0, \\ 1 - (32 + a)\,\dfrac{1}{64} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -32, \\ a \leqslant 32, \\ a \geqslant 32 \end{cases} \Leftrightarrow a = 32.$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{a}{64} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a}{64} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \geqslant 32.$$

Ответ:

$a = 32.$

Дидактические материалы

- **А.** 1. Решите неравенство $x^2 + 3ax - a > 0$.

2. Решите неравенство $x^2 - 8ax < -15a^2$.

3. Решите неравенство $ax^2 + 2x + 1 \geqslant 0$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x^2}{m} - 2x - \dfrac{x}{m} + m + 1 > 0$.

5. Решите неравенство $x^2 - (a + 5)\, x + (2 - a)\,(2a + 3) < 0$.

6. Решите неравенство $ax^2 + (2a-1)x + 1 - 3a \geqslant 0$.

7. При каких значениях параметра a неравенства:

а) $x^2 + 2x + a > 0$; б) $ax^2 + 2ax + a \leqslant 0$; в) $ax^2 + 2x + 2 - a^2 \geqslant 0$ выполняются при всех x?

● **Б.** 1. Найдите такие значения m, при которых неравенство $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ справедливо при любых действительных значениях x.

2. При каких значениях a неравенство $ax^2 + 4x > 1 - 3a$ справедливо при всех $x > 0$?

3. При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)x^2 - 4x < a + 4$ справедливо при всех $x > 0$?

4. Найдите все значения параметра a, такие, что неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется при всех положительных x.

5. При каких значениях a неравенства:

а) $\dfrac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3}<1$; б) $-1\leqslant\dfrac{ax^2+x+1}{x^2+x+1}\leqslant 1$; в) $\dfrac{x-2}{ax^2-2x+a-2}<1$ выполняются при всех x?

Ответы:

А. 1. При $a \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{9}\right) \cup (0; +\infty)$ $x \in \left(-\infty; -0{,}5\left(3a+\sqrt{9a^2+4a}\right)\right) \cup$

$\cup \left(-0{,}5\left(3a+\sqrt{9a^2+4a}\right) + \infty\right)$.

При $a = \dfrac{4}{9}$ x — любое число, кроме $x = \dfrac{2}{3}$; при $a = 0$ x — любое число, кроме $x = 0$; при $a \in \left(-\dfrac{4}{9}; 0\right)$ x — любое число.

2. Если $a < 0$, то $x \in (5a; 3a)$; если $a > 0$, то $x \in (3a; 5a)$; если $a = 0$, то решений нет.

3. $x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right]$ при $a < 0$; $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ при $a = 0$.

$x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right)$ при $0 < a < 1$;

x — любое при $a \geq 1$.

4. При $m > 0$ $x \in (-\infty; m) \cup (m + 1; +\infty)$; при $m < 0$ $x \in (m; m + 1)$.

5. $x \in (2a + 3; 2 - a)$ при $a < -\dfrac{1}{3}$; нет решений при $a = -\dfrac{1}{3}$; $x \in (2 - a;$ $2a + 3)$ при $a > -\dfrac{1}{3}$.

6. $x \in \left[1; \dfrac{1-3a}{a}\right]$ при $a < 0$; $x \in (-\infty; 1]$ при $a = 0$;

$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{1-3a}{a}; +\infty\right)$ при $0 < a < \dfrac{1}{4}$; x — любое число при $a = \dfrac{1}{4}$;

$x \in \left(-\infty; \dfrac{1-3a}{a}\right] \cup [1; +\infty)$ при $a > \dfrac{1}{4}$.

7. а) $a > 1$; б) $a \leqslant -1$; в) $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Б. 1. $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$.

2. $a \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

3. $a \in (-3; 0)$.

4. $a \in (1; +\infty)$.

5. $a \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. Поскольку знаменатель дроби положителен, неравенство эквивалентно неравенству $x^2 - (a + 2)x + 4 > 0$, которое справедливо при всех x, только когда:

а) $D = (a + 2)^2 - 16 < 0$; б) $-\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$; в) $a < -\dfrac{3}{2}$ и $a > 1 + \sqrt{2}$.

Знаменатель не равен нулю ни при каком x. Поэтому $1 - a^2 + 2a < 0$. Случаи $a > 0$ и $a < 0$ следует рассматривать отдельно.

§ 5. Квадратный трехчлен, расположение корней квадратного трехчлена

1. *Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда $p^2 - 4q \geqslant 0$, $p < 0$, $q > 0$.*

Геометрическая интерпретация. Для того чтобы данная парабола — график функции $y = x^2 + px + q$ — пересекала положительную полуось OX в точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (где $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$), необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) Вершина параболы — точка $\left(-\frac{p}{2};\ -\frac{p^2-4q}{4}\right)$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2 - 4q \geqslant 0$).

2) Ось симметрии параболы — прямая $x = -\frac{p}{2}$ — лежит правее оси OY (условие $p < 0$);

3) Парабола пересекает ось OY в точке $(0; q)$, лежащей в верхней полуплоскости (условие $q > 0$).

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, каждый из которых больше некоторого числа c, только когда

$$\begin{cases} p^2 - 4q \geqslant 0, \\ -\frac{p}{2} > c, \\ c^2 + pc + q > 0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Для того чтобы парабола — график функции $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}$ — пересекала ось OX в точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$, лежащих правее точки $(c; 0)$, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) Вершина параболы — точка $\left(-\frac{p}{2};\ \frac{p^2-4q}{4}\right)$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2 - 4q \geqslant 0$).

2) Ось симметрии параболы — прямая $x = -\frac{p}{2}$ — лежит правее прямой $x = c$ (условие $-\frac{p}{2} > c$).

3) Парабола пересекается с прямой $x = c$ в точке $(c;\ c^2 + pc + q)$, лежащей в верхней полуплоскости (условие $c^2 + pc + q > 0$).

3. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, каждый из которых меньше некоторого числа c, тогда и только тогда, когда $p^2 - 4q \geqslant 0$, $-\frac{p}{2} < c$, $c^2 + pc + q > 0$.

Геометрическая интерпретация. Для того чтобы парабола — график функции $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}$ — пересекала ось OX в точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$, лежащих левее точки $(c;\ 0)$, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

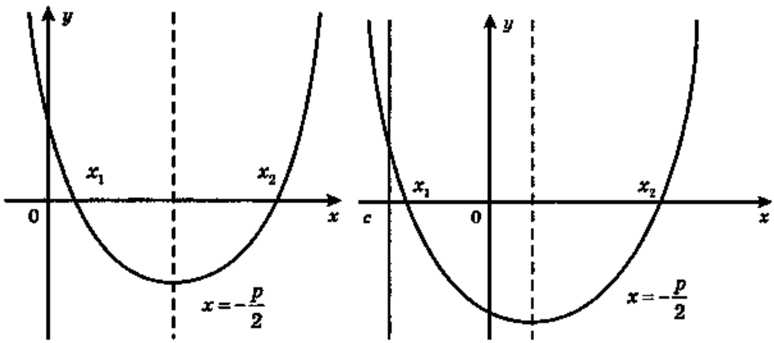
1) Вершина параболы — точка $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p^2 - 4q}{4}\right)$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2 - 4q \geqslant 0$).

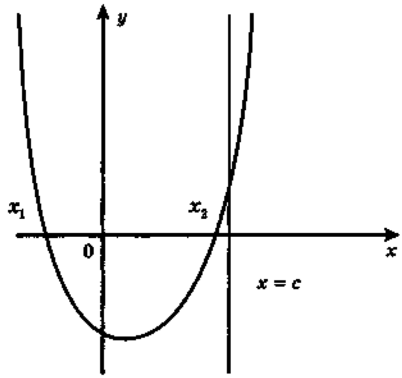
2) Ось симметрии параболы — прямая $x = -\frac{p}{2}$ — лежит левее прямой $x = c$ (условие $-\frac{p}{2} < c$).

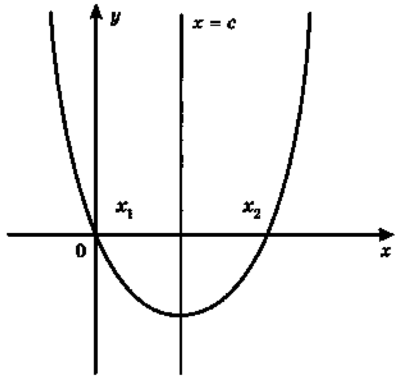
3) Парабола пересекается с прямой $x = c$ в точке $(c;\ c^2 + pc + q)$, лежащей в верхней полуплоскости (условие $c^2 + pc + q > 0$).

4. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше числа c, а другой меньше c тогда и только тогда, когда $c^2 + pc + q < 0$.

Геометрическая интерпретация. Для того чтобы парабола пересекала ось OX в точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$, между которыми лежит точка $(c;\ 0)$, необходимо и достаточно, чтобы парабола пересекалась с прямой $x = c$ в точке $(c;\ c^2 + pc + q)$, которая лежит в нижней полуплоскости (условие $c^2 + pc + q < 0$).

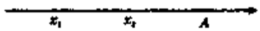
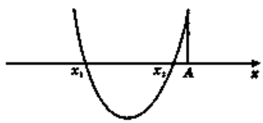
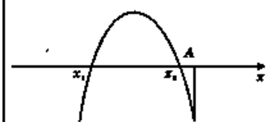
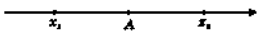
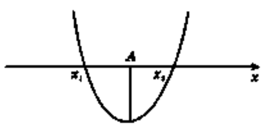
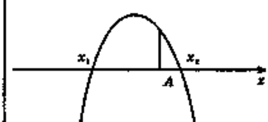
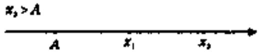
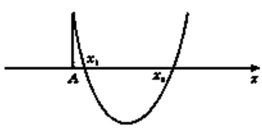
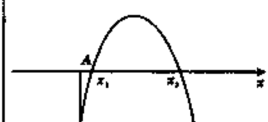
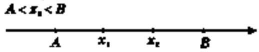
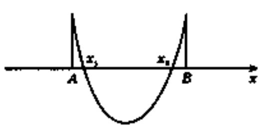
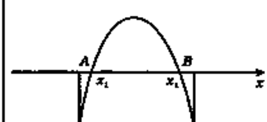


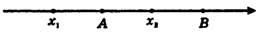
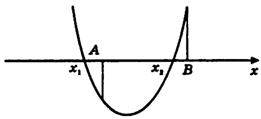
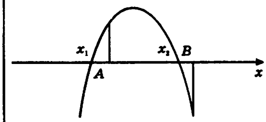
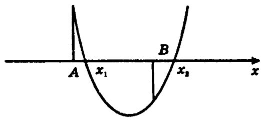
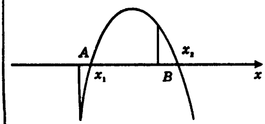
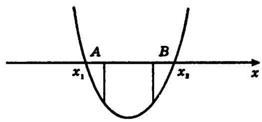
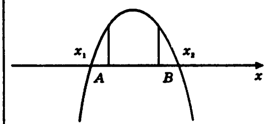




В таблице приведены условия расположения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ относительно чисел A и B.

x_1 и x_2 — корни многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$ 0, $a \neq 0$

Условия на корни	$a > 0$	$a < 0$
$x_1 < A$, $x_2 < A$ 		
$x_1 < A < x_2$ 		
$x_1 > A$ $x_2 > A$ 		
$A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 		

$x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 		
$B < x_2$ $A < x_1 < B$ 		
$x_1 < A$ $x_2 > B$ 		

Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2(a-1)x + (2a+1) = 0$ имеет положительные корни

Решение

Для того чтобы оба корня x_1 и x_2 уравнения были положительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 2(a-1)x + (2a+1)$ был неотрицательным, а произведение $x_1 \cdot x_2$ и сумма $x_1 + x_2$ были положительными. Из теоремы Виета получаем, что все a, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} (-2(a-1))^2 - 4(2a+1) \geqslant 0, \\ 2(a-1) > 0, \\ 2a+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-4) \geqslant 0, \\ a-1 > 0, \\ 2a+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant 4.$$

Система может быть получена из геометрических соображений. При каждом a функции $y = x^2 - 2(a-1)x + (2a+1)$ на плоскости соответствует парабола, ветви которой направлены вверх, пересекающая ось OY в точке $(0;\ 2a+1)$, имеющая ось симметрии $x = a - 1$ и вершину в точке $(a-1;\ -a(a-4))$. Для того чтобы парабола пересекла положительную полуось OX в двух точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$ или касалась ее, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) Вершина параболы — точка $(a-1;\ -a(a-4))$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $a(a-4) \geqslant 0$).

2) Ось симметрии параболы — прямая $x = a - 1$ — лежит правее оси OY (условие $a - 1 \geqslant 0$).

3) Парабола пересекает ось OY в точке $(0;\ 2a + 1)$, которая лежит в верхней полуплоскости (условие $2a + 1 > 0$).

II **При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2)x^2-2ax+(a+3)=0$ положительны?**

Решение

Первый способ. Выделим контрольное значение параметра $a = 2$. Тогда уравнение примет вид $-4x + 5 = 0$, откуда $x=\frac{5}{4}>0$.

Значит, $a = 2$ является одним из ответов на вопрос задачи.

Пусть $a \neq 2$, так как заданное квадратное уравнение должно иметь корни, то $D \geqslant 0$, т. е. $6 - a \geqslant 0$.

По теореме Виета $x_1x_2=\frac{a+3}{a-2}$, а $x_1+x_2=\frac{2a}{a-2}$. Тогда условия $x_1>0$, $x_2>0$ равносильны условиям $x_1 \cdot x_2>0$, $x_1+x_2>0$.

В результате задача сводится к решению системы неравенств:

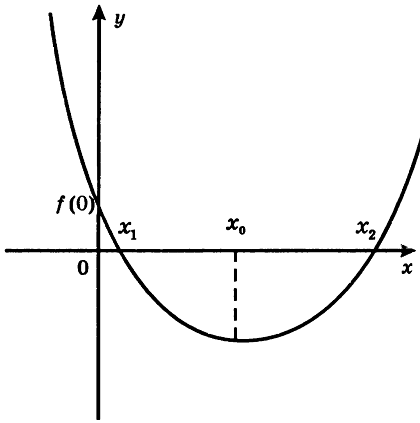
$$\begin{cases} 6-a \geqslant 0, \\ \dfrac{a+3}{a-2}>0, \\ \dfrac{2a}{a-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 6, \\ a<-3,\ a>2, \\ a<0,\ a>2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a<-3,\ 2<a \leqslant 6.$$

Добавив отмеченное выше значение $a = 2$, получаем $a < -3$, $2 \leqslant a \leqslant 6$.

Второй способ. Снова фиксируем $a = 2$ как один из ответов на вопрос задачи.

Пусть $a \neq 2$. Тогда перепишем уравнение в виде $x^2-\frac{2a}{a-2}x+\frac{a+3}{a-2}=0$ и рассмотрим квадратный трехчлен $f(x)=x^2-\frac{2a}{a-2}x+\frac{a+3}{a-2}$.

Его графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку должно быть $x_1>0$, $x_2>0$, то парабола пересекает ось X в двух точках в правой полуплоскости (или касается оси X правой полуплоскости).



Теперь от построенной геометрической модели нужно перейти к аналитической, т. е. описать эту геометрическую модель адекватной ей системой условий.

1) Так как имеются точки пересечения (или точки касания) параболы с осью X, то $D \geqslant 0$, т. е. $6 - a \geqslant 0$.

2) Замечаем, что $f(0) > 0$, т. е. $\dfrac{a+3}{a-2} > 0.$

3) Замечаем, что вершина параболы расположена в правой полуплоскости, т. е. ее абсцисса x_0 положительна. Для параболы $y = ax^2 + bx + c$ абсцисса вершины x_0 находится по формуле $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; значит, в данном случае $x_0 = \dfrac{a}{a-2}$.

Итак, $\dfrac{a}{a-2} > 0$. В результате приходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} 6 - a \geqslant 0, \\ a + 3 > 0, \\ \dfrac{a}{a-2} > 0. \end{cases}$$

Замечание. Еще один вариант аналитической модели:

1) $D \geqslant 0$.

2) $f(0) > 0$. Теперь отметим, что в точке $x = 0$ функция $f(x)$ убывает, т. е. $f'(x) < 0$. Значит, $-\dfrac{2a}{a-2} < 0$.

III **При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + (a+3) = 0$ меньше, чем 3?**

Решение

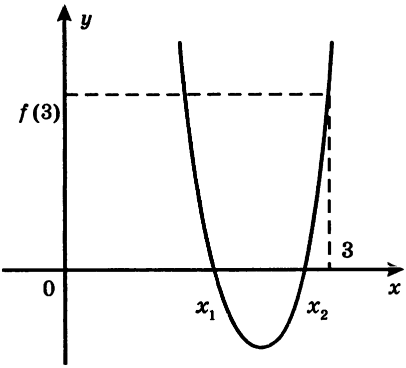
При $a = 2$ получаем $-4x + 5 = 0$, откуда $x = \dfrac{5}{4} < 3$.

Значит, $a = 2$ удовлетворяет требованию задачи.

Пусть $a \neq 2$. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2} = 0$

и рассмотрим график функции $f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2}$.

Дадим аналитическое описание этой модели:



1) $D \geqslant 0$.

2) $f(3) > 0$.

3) $x_0 < 3$ или $f'(3) > 0$.

Расшифруем эти условия:

1) $\frac{D}{4} = 6 - a$; значит, $6 - a \geqslant 0$.

2) $f(3) = 9 - \frac{2a}{a-2} \cdot 3 + \frac{a+3}{a-2} = \frac{4a-15}{a-2}$.

3) $x_0 = \frac{a}{a-2}$.

Таким образом, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 6 - a \geqslant 0, \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0, \\ \frac{a}{a-2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow a < 2;\ \frac{15}{4} < a \leqslant 6.$$

Ответ:

$a < 2; \frac{15}{4} < a \leqslant 6$.

IV **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - ax + a^2 - 6a \geqslant 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$.**

Решение

Если дискриминант $D = 3a(8 - a)$ квадратного трехчлена

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 6a$ неположителен, т. е. $D \leqslant 0$, то указанное в условии задачи неравенство выполняется при любом значении переменной x, и в частности на отрезке $[-1; 1]$. Следовательно, все решения неравенства $3a(8-a)\leqslant 0$, т. е. значения $a\leqslant 0, a\geqslant 8$, удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь a удовлетворяет неравенствам $0< a<8$. Для таких значений параметра a выполнено неравенство $D>0$, и, значит, трехчлен $f(x)$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. Условие задачи означает, что на координатной прямой оба корня лежат или не правее точки -1, или не левее точки 1. Этим двум случаям соответствуют системы неравенств (см. таблицу):

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}<-1,\\ f(-1)=a^2-5a+1\geqslant 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\dfrac{a}{2}>1,\\ f(1)=a^2-7a+1\geqslant 0.\end{cases}$$

Из первого неравенства первой системы следует, что $a<-2$, вопреки условию, что рассматриваются значения a из интервала $0<a<8$.

Следовательно, оба корня не могут лежать не правее точки -1. Множество решений второй системы задается неравенством $a\geqslant\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$. Значит, оба корня лежат не левее точки 1 для значений параметра, удовлетворяющих неравенствам $\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}\leqslant a<8$. Все значения a из этого промежутка удовлетворяют условию задачи. Объединяя найденные множества значений a, получаем ответ: $a\geqslant\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$, $a\leqslant 0$.

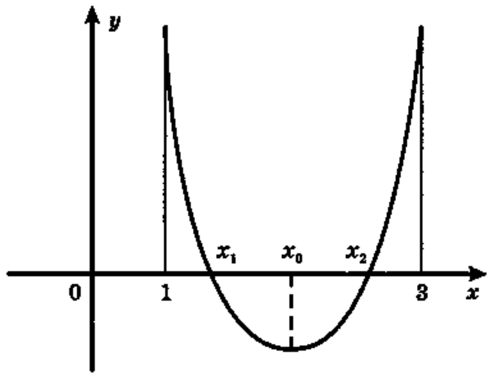
Ответ:

$a\geqslant\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$, $a\leqslant 0$.

V **При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2)x^2-2ax+a+3=0$ заключены в интервале $(1, 3)$?**

Решение

При $a=2$ имеем $x=\dfrac{5}{4}$, так как $\dfrac{5}{4}\in(1;3)$, то $a=2$ удовлетворяет требованию задачи. Если $a\neq 2$, то, как и в предыдущих примерах, рассмотрим функцию $f(x)=x^2-\dfrac{2a}{a-2}x+\dfrac{a+3}{a-2}$.



Расшифруем условия:

1) $D \geqslant 0$,	1) $6-a \geqslant 0$.
2) $f(1) > 0$,	2) $f(1) = 1-\frac{2a}{a-2}+\frac{a+3}{a-2}=\frac{1}{a-2}$.
3) $f(3) > 0$,	3) $f(3)=\frac{4a-15}{a-2}$.
4) $1 < x_0 < 3$,	4) $x_0=\frac{a}{a-2}$.

Таким образом, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 6-a \geqslant 0, \\ \frac{1}{a-2} > 0, \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0, \\ \frac{a}{a-2} > 1, \\ \frac{a}{a-2} < 3. \end{cases}$$ Решив ее, находим $\frac{15}{4} < a \leqslant 6$.

Ответ:

$a = 2,\ \frac{15}{4} < a \leqslant 6$.

VI **Найдите все значения a, при которых уравнение $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ имеет корни x_1, x_2, удовлетворяющие условию $x_1<a<x_2$.**

Решение

В задаче требуется выяснить, при каких a данное уравнение имеет два корня, а само число a лежит между этими корнями.

Из утверждения 4 получаем решение этой задачи: все числа a, удовлетворяющие неравенству $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)<0$, т. е. неравенству $-a^2-3a<0 \Leftrightarrow a<-3,\ a>0$.

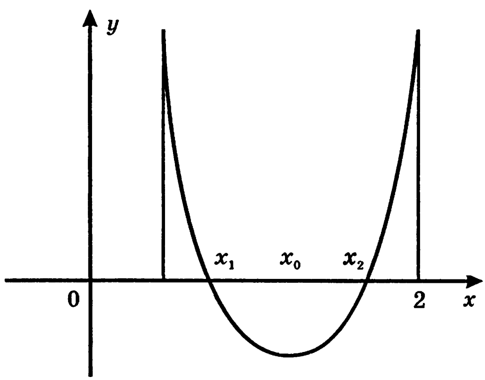
Ответ:

$a<-3,\ a>0$.

VII **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни квадратного трехчлена x^2+ax+1 различны и лежат на отрезке [0; 2].**

Решение

Дискриминант D заданного квадратного трехчлена $f(x)=x^2+ax+1$ равен $D=a^2-4$. Для существования различных корней необходимо условие $D>0$, т. е. $a^2-4>0$. Обозначим эти корни буквами x_1 и x_2. Вершина параболы $x_0=-\dfrac{a}{2}$ также принадлежит отрезку [0; 2].



Коэффициент при x^2 в заданном трехчлене положителен, поэтому точки 0 и 2, лежащие вне интервала, содержащего корни, должны удовлетворять и равенствам $f(0)=1\geqslant 0$ и $f(2)=2a+5\geqslant 0$. Искомые значения параметра a удовлетворяют системе неравенств:

$$a^2-4>0,\ 0<-\frac{a}{2}<2,\ 2a+5\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} a>2 \text{ или } a<-2, \\ -4<a<0, \\ a\geqslant -\dfrac{5}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\leqslant a<-2,$$

Ответ:

$-\dfrac{5}{2}\leqslant a<-2.$

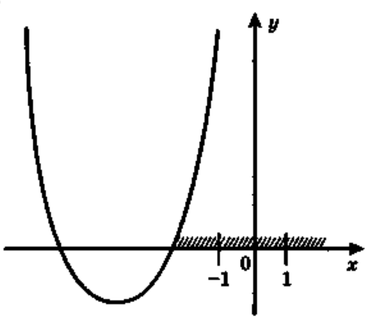
VIII **Найдите все значения параметра a, при каждом из кото рых неравенство $x^2-ax+a^2-6a\geqslant 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1\leqslant x\leqslant 1$**

Решение

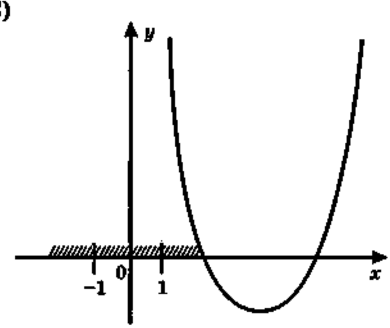
Если дискриминант $D=3a(8-a)$ квадратного трехчлена $f(x)=x^2-$ $-ax+a^2-6a$ неположителен, т. е. $D\leqslant 0$, то указанное в условии задачи неравенство выполняется при любом значении переменной x, и в частности на отрезке $[-1;\ 1]$. Следовательно, все решения неравенства $3a(8-a)\leqslant 0$, т. е. значения $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 8$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь a удовлетворяет неравенствам $0< a < 8$. Для таких значений параметра a выполнимо неравенство $D> 0$ и, значит, трехчлен $f(x)$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. Условие задачи означает, что на координатной прямой оба корня лежат не правее точки -1 или же не левее точки 1.

1)



2)



Этим двум случаям соответствуют системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} < -1, \\ f(-1) = a^2 - 5a + 1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и 2)} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{2} > 1, \\ f(1) = a^2 - 7a + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства первой системы следует, что $a < -2$, вопреки условию, что рассматриваются значения a из интервала $0 < a < 8$. Следовательно, оба корня не могут лежать не правее точки -1. Множество решений второй системы задается неравенством $a \geqslant \dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$. Значит, оба корня лежат не левее точки 1 для всех значений параметра, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{7+\sqrt{45}}{2} \leqslant a < 8$. Все значения a из этого промежутка удовлетворяют условию задачи. Объединяя найденные множества значений a, получаем ответ.

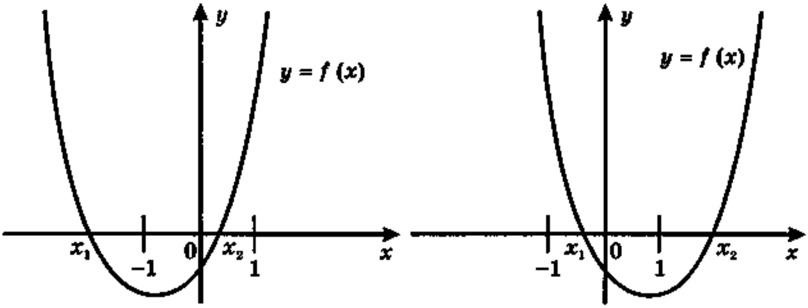
Ответ:

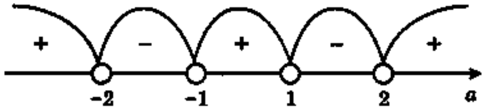
$a \leqslant 0$ и $a \geqslant \dfrac{7+\sqrt{45}}{2}$.

IX **При каких значениях параметра a один из корней уравнения $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ по абсолютной величине больше 1, а другой меньше 1?**

Решение

Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a один из двух корней квадратного трехчлена $f(x) = a^2x^2 + ax - 2$ принадлежит на вещественной оси интервалу $(-1;\ 1)$, а второй расположен вне этого интервала и по модулю не равен единице? Ровно один корень трехчлена $f(x)$ принадлежит интервалу $(-1;\ 1)$ только в том случае, когда числа $f(-1)$ и $f(1)$ имеют разные знаки (корни по модулю не равны единице!). Приходим к выводу, что требование задачи выполняется только при условии $f(-1)\,f(1) < 0$, которое в нашем случае записывается в виде $(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0$.





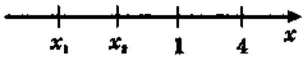
Ответ:

$a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

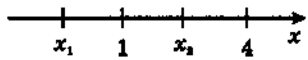
Расположите в порядке возрастания числа 1, 4 и корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$

Решение

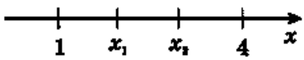
1) $x_1 \leqslant x_2 < 1$



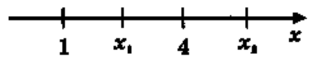
2) $x_1 \leqslant 1 \leqslant x_2 \leqslant 4$



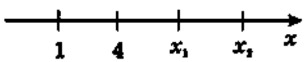
3) $1 < x_1 \leqslant x_2 < 4$



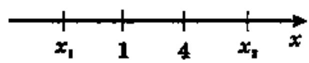
4) $1 < x_1 < 4 < x_2$



5) $4 < x_1 \leqslant x_2$



6) $x_1 < 1,\ x_2 > 1$



Эти возможные случаи расположения на вещественной оси корней квадратного трехчлена описываются соответственно условиями:

1) $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 4, \\ a\,f(1) > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a\,f(1) \leqslant 0, \\ a\,f(4) \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ 1 < -\dfrac{b}{2a} < 4, \\ a\,f(1) > 0, \\ a\,f(4) > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} a\,f(1) > 0, \\ a\,f(4) < 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 4, \\ a\,f(4) > 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} a\,f(1) < 0, \\ a\,f(4) < 0. \end{cases}$

Первая серия условий в разбираемом конкретном случае записывается в виде:

$$\begin{cases} -4(a^2-4a+3) \geqslant 0, \\ a < 1, \\ 2(a^2-3a+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

К аналогичному результату приходим при рассмотрении случаев 4, 5, 6.

Вторая серия условий подробнее записывается так:

$\begin{cases} 2(a^2-2a+2) \leqslant 0, \\ 2a^2-12a+19 \geqslant 0. \end{cases}$ **Эта система совместна при** $a \in [1; 2]$.

Рассмотрим третий случай. Здесь приходим к системе:

$$\begin{cases} -4(a^2-4a+3) \geqslant 0, \\ 1 < a < 4, \\ 2(a^2-3a+2) > 0, \\ 2a^2-12a+19 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow a \in (2; 3].$$

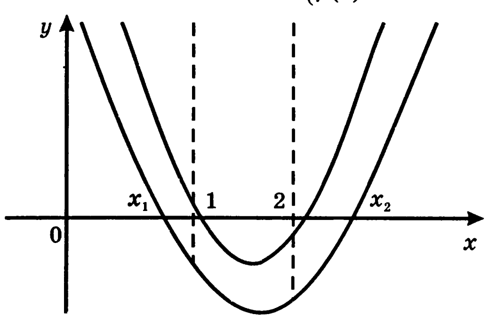
Ответ:

Если $a \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, **то** $\varnothing$; **если** $a = 1$, **то** $1 = x_1 = x_2 < 4$; **если** $a \in (1; 2)$, **то** $x_1 < 1 < x_2 < 4$; **если** $a = 2$, **то** $x_1 = 1 < x_2 < 4$; **если** $a \in (2; 3)$, **то** $1 < x_1 < x_2 < 4$; **если** $a = 3$, **то** $1 < x_1 = x_2 < 4$.

XI **При каких значениях параметра a из неравенства $1 < x \leqslant 2$ следует неравенство $x^2 - 1ax + a < 0$?**

Решение

Обозначим квадратный трехчлен в левой части исходного неравенства через $f(x)$. Требование задачи выполняется, если трехчлен имеет два корня x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), для которых справедливы неравенства $x_1 \leqslant 1$, $x_2 > 2$, т. е. совместна система $\begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(2) < 0. \end{cases}$



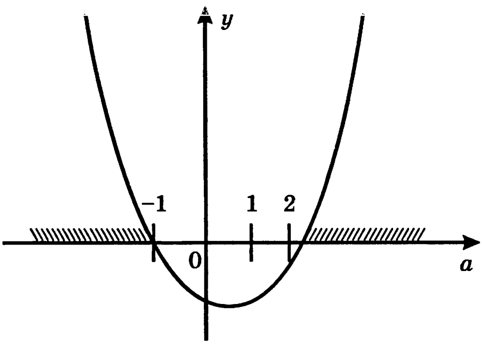
В нашем случае имеем систему $\begin{cases}1-a \leqslant 0,\\ 4-3a<0\end{cases} \Leftrightarrow a \in (\frac{4}{3};\ +\infty).$

Ответ:

$a \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right).$

XIII **Найдите все значения x, при которых неравенство $(2-a)\,x^3 + (1-2a)\,x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$ справедливо хотя бы для одного значения параметра a из промежутка $[-1, 2]$**

Решение



Перепишем неравенство в виде: $f(a) = a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4)\,a - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0$, где уже переменную x считаем параметром. А тогда требование задачи, не будет выполняться если отрезок $[-1; 2]$ лежит на вещественной оси между корнями трехчлена $f(a)$, т. е. если совместна система:

$$\begin{cases} f(-1) = -3x\,(x+2)(x-1) \leqslant 0,\\ f(2) = 3\,(x+3)(x-1) \leqslant 0. \end{cases}$$

что будет иметь место при $x \in [-2; 0] \cup \{1\}$. Поэтому дополнение к выписанному множеству и будет решением задачи.

Ответ:

$x \in (-\infty; 2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$

Дидактические материалы

● **А.** 1. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2 - (2a + 1)\,x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

2. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2 - 2)\,x^2 + (a^2 + a - 1)\,x - a^3 + a = 0$ больше числа a, а другой меньше числа a?

3. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$ удовлетворяют условиям $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

4. При каких значениях параметра a ровно один корень уравнения $x^2-4x+a=0$, имеющего различные корни, принадлежит интервалу $(1; 4)$?

● **Б.** 1. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x+3a-5}{x+a}>0$ справедливо для всех таких x, что $1 \leqslant x \leqslant 4$?

2. При каких значениях параметра a из неравенства $1 < x \leqslant 2$ следует неравенство $x^2-2ax+a<0$?

3. При каких значениях параметра a для квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ имеют место неравенства $f(-1)<1$, $f(1)>-1$, $f(3)<-4$?

4. При каких значениях параметра a из неравенства $ax^2-x+1-a<0$ следует неравенство $0<x<1$?

5. При каких значениях параметра a из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2 \leqslant 0$?

6. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$ принадлежат отрезку $[0; 1]$?

● **В.** 1. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-1}>0$ выполняется для всех значений x таких, что $|x| \leqslant 1$?

2. Найдите все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, по модулю не превосходит 2.

3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ имеют разные знаки, и оба по абсолютной величине меньше 4?

4. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

Ответы:

А. 1. $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

2. $a \in \left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right)$.

3. $a \in \left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

4. $a \in (0; 3]$

Б. 1. $a \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

2. $a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

3. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$.

4. $a \in [1; +\infty)$.

5. $a \in [-3; 3]$.

6. $a = 0$.

В. 1. $a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

2. $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

3. $a \in \left(-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

§ 6. Решение иррациональных уравнений, неравенств и систем

Уравнение $f(a, b, c, ..., k, x) = \varphi(a, b, c, ..., k, x)$ называют иррациональным с одним известным x, если одна или обе части его содержат выражения, иррациональные относительно x.

Например, уравнения $5x+\sqrt{2x-1}=\sqrt{a-2}$; $\sqrt{3x+a}+2x=3$, $\sqrt[3]{x-a}+x=\sqrt[3]{3x+b}+2$ иррациональны относительно x. Здесь a и b — параметры. При поиске действительных корней будем исходить из того, что $\sqrt[n]{f(a, b, c, \ldots, k, x)} \geqslant 0$. При $f(a, b, c, ..., k, x) \geqslant 0$ и n — четном, т. е. в случае $n = 2k$ (n — натуральное число) будем рассматривать только арифметическое значение $\sqrt[n]{f(a, b, c, \ldots, k, x)}$.

Решение таких уравнений сводится к постепенному переходу иррационального к рациональному путем возведения в степень обеих частей уравнения. Но известно, что в таком случае возможно появление посторонних корней. Следовательно, решение должно сопровождаться тщательной проверкой. Трудно указать какой-нибудь общий и вместе с тем достаточно простой способ решения иррациональных уравнений. Рассмотрим на примерах различные способы решения таких уравнений, не отдавая преимущества ни одному из них.

Решите уравнение $\sqrt{x^2+2ax-a}=x+3$. **(1)**

Решение

Возведя обе части в квадрат, получим $(2a-6)x = a+9$, $a = 3$ — контрольное значение параметра a.

1. $a = 3$, $0 \cdot x = 12$, нет решений. 2. $a \neq 3$, $x=\dfrac{a+9}{2a-6}$.

Проверим, является ли $x = \dfrac{a+9}{2a-6}$ решением уравнения (1)

$$\sqrt{\left(\frac{a+9}{2a-6}\right)^2 + \frac{2a(a+9)}{2a-6} - a} = \frac{a+9}{2a-6} + 3. \qquad (2)$$

Правая часть уравнения (2) приводится к виду $\dfrac{7a-9}{2a-6}$.

Преобразуем левую часть уравнения (2) к виду $\sqrt{\left(\dfrac{7a-9}{2a-6}\right)^2} = \left|\dfrac{7a+9}{2a-6}\right|$.

При $a \leqslant 1\left(1\frac{2}{7};3\right]$ и при $a > 3$ $\left|\dfrac{7a-9}{2a-6}\right| = \left|\dfrac{7a-9}{2a-6}\right|$;

при $1\left(1\frac{2}{7};3\right] < a < 3$ $\left|\dfrac{7a-9}{2a-6}\right| = \left|\dfrac{9-7a}{2a-6}\right|$.

Отсюда $x = \left|\dfrac{7a-9}{2a-6}\right|$ является корнем уравнения (1)

при $a \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; при $a \in \left(1\frac{2}{7};3\right]$ решений нет.

Приведем еще один способ решения уравнения (1). Его корень должен удовлетворять условиям:

$$x^2 + 2x - a \geqslant 0,\ x + 3 \geqslant 0.$$

Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение $x^2 + 2ax - a = (x+3)^2$, любой корень которого удовлетворяет условию $x^2 + 2ax - a \geqslant 0$, так как $(x+3)^2 \geqslant 0$. Отсюда следует, что уравнение (1) равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - a = (x+3)^2, \\ x \geqslant 3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (2a-6)x = a+9, \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

При $a = 3$ она решения не имеет, при $a \neq 3$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+9}{2a-6}, \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

Заметив, что $\dfrac{a+9}{2a-6} \geqslant -3$ при $a \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, придем к тому же ответу.

Для решения иррационального уравнения иногда удобно ввести вспомогательную неизвестную величину. Рассмотрим решение уравнения

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = a. \qquad (2)$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 1.$

Пусть $\sqrt{x-1} = y \geqslant 0$. Тогда $x = y^2 + 1$; $2x + 1 = 2y^2 + 3$, уравнение (2) приводится к уравнению

$$\sqrt{2y^2+3} = a + y. \qquad (3)$$

Значение y должно удовлетворять условию:

$$\begin{cases} y\geqslant -a, \\ y\geqslant 0, \\ 2y^2+3\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -a. \end{cases}$$

После возведения обеих частей уравнения (3) в квадрат получим уравнение $2y^2 + 3 = (a + y)^2$ или $2y^2 + 3 = a^2 + 2ay + y^2$. (3$a$)

Получим $y^2 - 2ay + 3 - a^2 = 0$.

$y_1 = a - \sqrt{2a^2-3}$, $y_2 = a + \sqrt{2a^2-3}$ при условии, что $D = 2a^2 - 3 \geqslant 0$, $a^2 \geqslant \dfrac{3}{2}$, $|a| \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Leftrightarrow a \geqslant \sqrt{1{,}5}$ или $a \leqslant -\sqrt{1{,}5}$.

При $-\sqrt{1{,}5} < a < \sqrt{1{,}5}$ корней нет.

Если y_1 и y_2, $y_1 \leqslant y_2$, — корни уравнения, то по теореме Виета $y_1 + y_2 = 2a$, $y_1 \cdot y_2 = 3 - a^2$, уравнение (3a) имеет два решения, если $y_1 + y_2 \geqslant 0$, $y_1 \cdot y_2 \geqslant 0$, т. е. $\begin{cases} a>0, \\ 3-a^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a>\sqrt{3} \text{ или } a<-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow a>\sqrt{3}.$ Учитывая, что $D \geqslant 0$, получаем $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$, $a \geqslant \sqrt{1{,}5}$ или $a \leqslant -\sqrt{1{,}5} \Leftrightarrow \sqrt{1{,}5} \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$.

Итак, при $\sqrt{1{,}5} \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$ уравнение (3а) имеет два решения: y_1 и y_2. Уравнение (3a) имеет одно решение, если $y_1 + y_2 > 0$.

$y_1 \cdot y_2 < 0$, т. е. $\begin{cases} a>0, \\ 3-a^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a>\sqrt{3} \text{ или } a<-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow a>\sqrt{3}.$

При $a > \sqrt{3}$ — одно решение y_2.

Уравнение (3a) не имеет решения, если $y_1 + y_2 < 0$, т. е. если $a < 0$ или $a \in (-\infty; 0)$.

Объединяя два интервала $a \in \left(-\sqrt{1,5}; \sqrt{1,5}\right)$ и $(-\infty; 0)$, получим $a \in \left(-\infty; \sqrt{1,5}\right)$.

Теперь возвращаемся к неизвестному x.

$x_1 = y_1^2 + 1 = \left(a - \sqrt{2a^2 - 3}\right)^2 + 1 = 3a^2 - 2 - 2a\sqrt{2a^2 - 3}$,

$x_2 = y_2^2 + 1 = \left(a + \sqrt{2a^2 - 3}\right)^2 + 1 = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$.

Ответ:

при $a \in \left[\sqrt{1,5}; 3\right]$ $x = 3a^2 - 2 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$; при $a \in (3; +\infty)$ $x = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$; при $a \in \left(-\infty; \sqrt{1,5}\right)$ корней нет.

Проиллюстрируем еще применение способа введения вспомогательного неизвестного на примере решения более сложного уравнения:

$$\sqrt{x - 6} = x^2 + b. \qquad (4)$$

Пусть $x - b = c$, где $c \geqslant 0$. Тогда $c = x^2 + a$ и $x = c^2 + b$, т. е. получим систему

$$\begin{cases} c - a = x^2, \\ c^2 + b = x. \end{cases}$$

Отсюда $c^2 + c - \left(x^2 + x\right) = 0$.

Решив это уравнение относительно c, получим $2 = x$ или $c = -x - 1$, что равносильно совокупности двух уравнений:

а) $\sqrt{x - b} = x$, отсюда $x - b = x^2$, т. е. $x^2 - x + b = 0$.
Значит, $x_1 = 0,5\left(1 - \sqrt{1 - 4b}\right)$, $x_2 = 0,5\left(1 + \sqrt{1 - 4b}\right)$, где $b \leqslant 0,25$.

Поскольку $\sqrt{x - b} \geqslant 0$, то корень этого уравнения должен удовлетворять условию $x \geqslant 0$. Тогда при $0 \leqslant b \leqslant 0,25$ уравнению (4) удовлетворяют x_1 и x_2, а при $b < 0$ только x_2.

б) $x - b = -x - 1$. Корень этого уравнения должен удовлетворять условию $x \leqslant -1$. Возведя обе части в квадрат, получим уравнение

$$x^2 + x + 1 + b = 0. \qquad (5)$$

Отсюда $x_3 = 0,5\left(-1 - \sqrt{-4b - 3}\right)$, $x_4 = 0,5\left(-1 + \sqrt{-4b - 3}\right)$, где $a \leqslant -\dfrac{3}{4}$.

Теперь необходимо выяснить условие, при котором корни x_3 и x_4 удовлетворяют требованию $x \leqslant -1$.

$$x_3 \leqslant -1 \text{ при } \begin{cases} 0{,}5\left(-1-\sqrt{-4b-3}\right) \leqslant -1 \\ b \leqslant -0{,}75; \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} \sqrt{-4b-3} \geqslant 1 \\ b \leqslant -0{,}75. \end{cases} \qquad (6)$$

Возведя обе части первого неравенства системы (6) в квадрат, получим систему $\begin{cases} b \leqslant -1, \\ b \leqslant -0{,}75, \end{cases}$ равносильную (6), отсюда $x_3 \leqslant -1$ при $b \leqslant -1$, $x_4 \leqslant -1$ при $\begin{cases} 0{,}5\left(-1+\sqrt{-4b-3}\right) \leqslant -1, \\ b \leqslant -0{,}75, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} \sqrt{-4b-3} \leqslant -1, \\ b \leqslant -0{,}75, \end{cases}$ что невозможно.

Таким образом, x_4 не является корнем уравнения (4).

Ответ:

при $0 \leqslant b \leqslant 0{,}25$ уравнение имеет два корня: $0{,}5\left(1 \pm \sqrt{1-4b}\right)$,

при $-1 < b < 0$ одно решение: $0{,}5\left(1+\sqrt{1-4b}\right)$,

при $b \leqslant -1$ два решения: $0{,}5\left(1+\sqrt{1-4b}\right)$ и $0{,}5\left(-1-\sqrt{-4b-3}\right)$,
при $b \geqslant 0{,}25$ корней нет.

Решите уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$

Решение

Возводим обе части уравнения в квадрат (условие $x \geqslant 0$):

$$a-\sqrt{a+x} = x^2, \quad \sqrt{a+x} = a-x^2.$$

Еще раз возводим в квадрат (условие $a-x^2 \geqslant 0$).

Получаем окончательно уравнение: $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$, среди решений которого надо найти те, для которых $x \geqslant 0$, $a-x^2 \geqslant 0$.

Получившееся уравнение имеет четвертую степень относительно неизвестного x, но зато является квадратным относительно параметра a: $a^2-\left(2x^2+1\right)a+x^4-x=0$.

Найдем дискриминант:

$$D=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)=4x^4-4x^2+1-4x^4+4x=\left(2x+1\right)^2,$$

$$a_1=\frac{2x^2+1-(2x+1)}{2}=\frac{2x^2-2x}{2}=x^2-x;\ a_2=\frac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$\left(a-x^2-x-1\right)\left(a-x^2+x\right)=0,\ \ x^2+x+1-a=0$ или $x^2-x-a=0$. Каждое из уравнений надо решать при условии, что $x\geqslant 0,\ a-x^2\geqslant 0$.

Решаем уравнение $x^2+x+1-a=0$. Поскольку $x+1=a-x^2$, из того, что $x\geqslant 0$, следует, что $a-x^2>0$. Значит, нам достаточно найти лишь те решения, для которых $x>0$; тогда неравенство $a-x^2\geqslant 0$ будет выполняться автоматически. Но сумма корней, если они есть, равна -1; следовательно, уравнение $x^2+x+1-a=0$ может иметь лишь один неотрицательный корень при условии $1-a\leqslant 0,\ a\geqslant 1$.

Значит, при $a\geqslant 1$ будет $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)$.

Перейдем ко второму уравнению: $x^2-x-a=0$. Из этого уравнения $-x=a-x^2$.

Левая часть неположительна, правая — неотрицательна. Равенство возможно, если $a=0,\ x=0$.

Ответ:

при $a\geqslant 1$ $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)$;

при $a=0$ $x=0$; при $a<0$ или $0<a<1$ корней нет.

Неравенство называется иррациональным с одним неизвестным x, если одна или обе его части содержат выражения, иррациональные относительно x.

VI **Решите уравнение** $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$.

Решение

ОДЗ определяется условиями $x>0,\ a\neq 0, a+x\geqslant 0$.

При $a = 0$ уравнение не имеет решений. Преобразуем уравнение к виду $(a+x)^{\frac{3}{2}} = ax^{\frac{3}{3}}$.

Сужаем ОДЗ: из неотрицательности левой части последнего уравнения и условий $x > 0$, $a \neq 0$ следует, что $a > 0$.

Далее получаем $a + x = a^{\frac{2}{3}}x$, откуда $x\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right) = a$.

При $a = 1$ решений нет. Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$.

Выясним, при всех ли рассматриваемых значениях параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) выполняется условие $x > 0$ (из которого с очевидностью следует и выполнение второго условия $a + x \geqslant 0$).

Неравенство $\dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1} > 0$ выполняется только при $a > 1$ (с учетом того, что $a > 0$). Таким образом, не при всех допустимых значениях a найденный корень оказался пригодным.

Ответ:

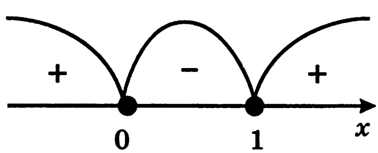
если $a > 1$, то $x = \dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$; если $a \leqslant 1$, то решений нет.

VIII **Решите уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$.**

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x + a \geqslant 0, \\ a - \sqrt{x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant \sqrt{x};\ a > 0.$

$$x + a = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a^2 - a}{2a} = \frac{a-1}{2}.$$



Сужаем ОДЗ: $a^2 - a \geqslant 0 \Leftrightarrow a(a-1) \geqslant 0$.

Учитывая, что $a > 0$, получаем $a \geqslant 1$.

$x = \dfrac{(a-1)^2}{4}$. Проверим условие $a - \sqrt{x} > 0$.

$a - \dfrac{a-1}{2} > 0 \Leftrightarrow 2a - a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1.$

Ответ:

если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geqslant 1$, то $x = \dfrac{(a-1)^2}{4}$.

VIII **Решите уравнение $\sqrt{x-2a} - \sqrt{x-a} = 2$**

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x - 2a \geqslant 0, \\ x - a \geqslant 0. \end{cases}$

Уединяем квадратный корень и возводим обе части уравнения в квадрат:

$x - 2a = 4 + 4\sqrt{x-a} + x - a \Leftrightarrow 4\sqrt{4-a} = -a - 4.$

Сужаем ОДЗ: $a \leqslant -4$, при $a > 0$ уравнение не имеет решений.

$$16(x-a) = a^2 + 8a + 16 \Leftrightarrow x = \frac{a^2 + 24a + 16}{16};$$

$$x - 2a = \frac{a^2 + 24a + 16}{16} - 2a = \frac{a^2 - 8a + 16}{16} = \frac{(a-4)^2}{16} \geqslant 0;$$

$$x - a = \frac{a^2 + 24a + 16}{16} - a = \frac{(a+4)^2}{4} \geqslant 0.$$

Ответ:

если $a \leqslant -4$, то $x = \dfrac{a^2 + 24a + 16}{16}$.

IX **Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$**

Решение

При $a < 0$ решений нет.

$a \geqslant 0$. При $a = 0$ $\sqrt{2|x|-x^2} = 0$, $x^2 - 2|x| = 0$, три решения.

Если $a > 0$, то $\begin{cases} 2|x|-x^2 = a^2 \\ 2|x|-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2|x|-x^2 = a^2.$

$x^2 - 2|x| + a^2 = 0$

$x > 0$; $x^2 - 2x + a^2 = 0$: $D_1 = 1 - a^2$; $D_1 < 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 < 0$, $a^2 > 1$.

При $a < -1$ и $a > 1$ — решений нет.

При $a = 1$ два решения.

При $0 < a < 1$ четыре решения.

Ответ:

если $a < 0$, $a > 1$, то нет решений; если $a = 1$, то два решения; если $a = 0$, то три решения, если $0 < a < 1$, то четыре решения.

X **Решите уравнение** $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b$.

Решение

ОДЗ определяется системой неравенств $x \leqslant a^2$, $x \leqslant b^2$ или $x \leqslant \min\{a^2; b^2\}$.

Левая часть данного уравнения неотрицательна, а потому при $a + b < 0$ данное уравнение не может иметь решений. На рисунке это отмечено тем, что полуплоскость под прямой $b = -a$ заштрихована.

Рассмотрим теперь случай $a + b \geqslant 0$. После очевидных преобразований получим $\sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = ab + x$. Уточним ОДЗ: $x \geqslant -ab$. Продолжая преобразования, получим

$$x(a+b)^2 = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

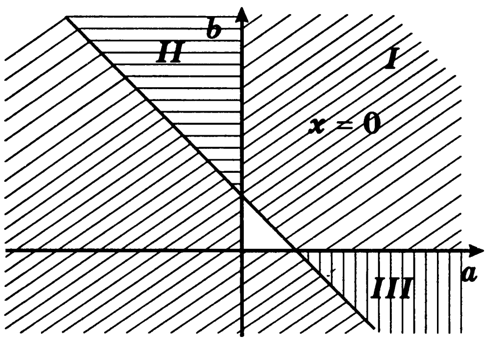
Первый случай: $a + b > 0$, тогда $x = 0$. При этом условия $x \leqslant a^2$ и $x \leqslant b^2$ выполняются автоматически, чего нельзя сказать об условии $x \geqslant -ab$.

Если $ab > 0$, то это условие, очевидно, выполнено.

Если же $ab < 0$, то $-ab > 0$ и $x = 0 < -ab$.

Поэтому на рисунке в зонах *II* и *III* (где $a + b > 0$, но $ab < 0$) решений нет.

Таким образом, $x = 0$ является корнем уравнения, только если $a + b > 0$ и $ab \geqslant 0$, т. е. для точек первой четверти плоскости параметров, включая и точки ее границы (зона *I* на рисунке).



Второй случай: $a + b = 0$. При этом условии уравнение (1) обращается в тождество $x \cdot 0 = 0$, но это вовсе не означает, что любое действительное число является корнем исходного уравнения.

При $a + b = 0$ последовательно находим $b = -a$, $b^2 = a^2$, и исходное уравнение принимает вид $2\sqrt{a^2 - x} = 0$, откуда $x = a^2 = b^2$, и все условия при этом, очевидно, выполнены. На рисунке этот ответ указан около прямой $b = -a$.

Ответ:

объединяя все полученные результаты, получаем:
если $a + b > 0$ и $ab \geqslant 0$, то $x = 0$;
если $a + b = 0$, то $x = a^2 = b^2$;
если $a + b < 0$ или $a + b > 0$ и $ab < 0$, то решений нет.

XI Решите неравенство $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-a} > \sqrt{3x-5}$ (7)

Решение

Областью определения неравенства (7) является решение системы:

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 2x-a\geqslant 0, \\ 3x-5\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ x\geqslant \dfrac{a}{2}, \\ x\geqslant \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \dfrac{5}{3}, \\ x\geqslant \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $\sqrt{x+1}\geqslant 0$, $\sqrt{2x-a}\geqslant 0$, $\sqrt{3x-5}\geqslant 0$, то неравенство (7) равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+1)(2x-a)}>a-6, \\ x\geqslant \dfrac{5}{3}, \\ x\geqslant \dfrac{a}{2}. \end{cases} \qquad (8)$$

Если $a\in\left(-\infty;\ 1\dfrac{2}{3}\right)$, то $a-6<0$, первое неравенство системы (8) справедливо при любом x, тогда неравенство (7) имеет решение $\left[1\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Пусть $1\dfrac{2}{3}<a<6$, тогда $a-6<0$. Первое неравенство системы (7) справедливо при любом x. Сравним $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{5}{3}$, найдем их разность $\dfrac{a}{2}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{3a-10}{6}\geqslant 0$ при $a\geqslant 3\dfrac{1}{3}$.

Значит, при $a\in\left[3\dfrac{1}{3};\ 6\right)$ $x\geqslant\dfrac{a}{2}$; при $a\in\left(1\dfrac{2}{3};\ 3\dfrac{1}{3}\right)$ $x\geqslant\dfrac{5}{3}$.

Рассмотрим случай $a\geqslant 6$.

При этом $a-6\geqslant 0$, а так как $2\sqrt{(x+1)(2x-a)}\geqslant 0$, то, возведя в квадрат обе части первого неравенства системы (7), получаем систему

$$\begin{cases} 4(x+1)(2x-a)>(a-6)^2, \\ x\geqslant \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$ (8а), равносильную (8).

Преобразуем первое неравенство системы (8а):

$4(x+1)(2x-a)>(a-6)^2$, $8x^2+x(8-4a)-4a-a^2+12a-36>0$,

$8x^2+4(2-a)x-a^2+8a-36>0$ и введем функцию

$f(x)=8x^2+4(2-a)\ x-a^2+8a-36.$

D — дискриминант функции $f(x)$.

$$D_1=(4-2a)^2-8\left(-a^2+8a-36\right)=16-16a+4a^2+8a^2-64a+288=$$
$$=12a^2-80a+304=4\left(3a^2-20a+76\right).$$

Найдем дискриминант трехчлена $9a^2-68a+292$.

$$D_1=(-40)^2-12\cdot 304=1600-3648=-2048<0.$$

Поскольку $D_1<0$, то $D>0$ при любых действительных значениях a, тогда уравнение $f(x)=0$ при любых действительных значениях a имеет два корня:

$$x_1=\frac{a-2-\sqrt{3a^2-20a+76}}{4},\ x_2=\frac{a-2+\sqrt{3a^2-20a+76}}{4},\text{ причем } x_2>x_1.$$

Методом интервалов легко находим решение неравенства $f(x)>0$: $x<x_1$ или $x>x_2$.

Таким образом, при $a\geqslant 6$ система (8а), а значит, и неравенство (7) равносильны совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x<x_1,\\ x\geqslant\dfrac{a}{2},\end{cases} & (*)\\ \begin{cases}x>x_2,\\ x\geqslant\dfrac{a}{2}.\end{cases} & (**)\end{array}\right.$$

Для их решения выясним расположение числа $\dfrac{a}{2}$ относительно промежутка корней x_1 и x_2.

$$x_1-\frac{a}{2}=\frac{a-2-\sqrt{3a^2-20a+76}}{4}-\frac{a}{2}=\frac{-a-2-\sqrt{3a^2-20a+76}}{4}<0.$$

Итак, $x_1<\dfrac{a}{2}$, система (*) не имеет решения.

Рассмотрим $x_2-\dfrac{a}{2}=\dfrac{-a-2+\sqrt{3a^2-20a+76}}{4}\geqslant 0$,

$3a^2-20a+76\geqslant a^2+4a+4$, $2a^2-24a+72\geqslant 0$,

$a^2-12a+36\geqslant 0$, $(a-6)^2\geqslant 0$ верно при любом a.

При $x_2\geqslant\dfrac{a}{2}$ система (**) имеет решения $x\in(x_2;+\infty)$.

Отсюда при $a\leqslant 1\dfrac{2}{3}$ $x\in\left[1\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$;

при $3\dfrac{1}{3}\leqslant a<6$ $x\in\left[\dfrac{a}{2};+\infty\right)$; при $1\dfrac{2}{3}<a<3\dfrac{1}{3}$ $x\in\left[1\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

при $a\geqslant 6$ $x\in(x_2;+\infty)$.

Ответ:

при $a\leqslant 1\dfrac{2}{3}$ $x\in\left[1\dfrac{2}{3};+\infty\right)$; при $3\dfrac{1}{3}\leqslant a<6$ $x\in\left[\dfrac{a}{2};+\infty\right)$;

при $a\geqslant 6$ $x\in\left(0{,}25\left(a-2+\sqrt{3a^2-20a+76}\right);\ +\infty\right)$.

XII **Решите неравенство** $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\leq\sqrt{2}$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} a-\sqrt{x}\geqslant 0,\\ a+\sqrt{x}\geqslant 0,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\leqslant a,\\ \sqrt{x}\geqslant -a,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant a^2.\end{cases}$

Возведя обе части неравенства в квадрат, получим систему

$\begin{cases}\sqrt{a^2-x}\leqslant 1-a,\\ 0\leqslant x\leqslant a^2,\end{cases}$ равносильную данному неравенству при $0\leqslant a\leqslant 1$.

$x\geqslant 2a-1$ — решение первого неравенства.

Учитывая условие, вытекающее из записанной системы, получим:

Ответ:

при $0\leqslant a\leqslant 0{,}5$ $x\in[0;\ a^2]$;

при $0{,}5<a\leqslant 1$ $x\in[2a-1;\ a^2]$;

при $a<0$ и при $a>1$ решений нет.

XIII **При каждом значении параметра a решите неравенство** $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Решение

ОДЗ: $x\neq 0; a>0;\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\geqslant 0\Leftrightarrow \frac{a^2-x^2}{x^2a^2}\geqslant 0\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-x^2\geqslant 0, \\ ax\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -a\leqslant x\leqslant a, \\ ax\neq 0. \end{cases}$,

Итак, $a>0,\ x\neq 0,\ -a\leqslant x\leqslant a$.

а) $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}<0\Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{a}}{x\sqrt{a}}>0\Leftrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{a}, \\ x<0, \\ a>0. \end{cases}$

Тогда неравенство верно на области определения, т. е. при $-a<x<a$.

Решаем совместно $\begin{cases} -a\leqslant x\leqslant a, \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{a}, \\ x<0. \end{array}\right. \end{cases}$

Если $0<a\leqslant 1$, то $-a\leqslant x\leqslant 0$; если $a>1$, то $\left[\begin{array}{l} -a\leqslant x<0, \\ \sqrt{a}<x<a. \end{array}\right.$

б) $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\geqslant 0\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\leqslant\sqrt{a}, \\ a>0. \end{cases}$ Возводим обе части исходного неравенства в квадрат:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x\sqrt{a}}+\frac{1}{a};\quad \frac{2}{x\sqrt{a}}>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a^2};$$

$$\frac{2}{x\sqrt{a}}-\frac{a+1}{a^2}=\frac{2a\sqrt{a}-(a+1)x}{a^2x}=\frac{-\left(x-\frac{2a\sqrt{a}}{a+1}\right)(a+1)}{a^2x}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<x<\frac{2a\sqrt{a}}{a+1}.$$

Учитывая, что $0<x\leqslant\sqrt{a}$, имеем при $0<a\leqslant 1$ $0<x<\frac{2a\sqrt{a}}{a+1}$, а при $a>1$ $0<x\leqslant\sqrt{a}$.

Объединяя решения $\sqrt{a}<x\leqslant a$ при $a>1$ и $0<x\leqslant\sqrt{a}$ при $a>1$, получим, что $0<x\leqslant a$ при $a>1$.

Ответ:

если $0<a\leqslant 1$, то $-a\leqslant x<0$ и $0<x<\dfrac{2a\sqrt{a}}{a+1}$; если $a>1$, то $-a\leqslant x<0$ и $0<x\leqslant a$.

XIV **При каждом значении параметра a решите неравенство $\sqrt{1-x^2}<x+a$**

Решение

$1-x^2<(x+a)^2 \Leftrightarrow 1-x^2<x^2+2ax+a^2$, $2x^2+2ax+a^2-1=0$,

$2x^2+2ax+a^2-1>0$, $D_1=a^2-2a^2+2=2-a^2$.

Если $D_1=0$, то $a^2=2 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$, $x=-\dfrac{a}{2}$,

или $\left[\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{a}{2}, \\ x>-\dfrac{a}{2} \end{array}\right.$ при $a=\pm\sqrt{2}$.

$D_1>0$, $2-a^2>0$, $|a|<\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

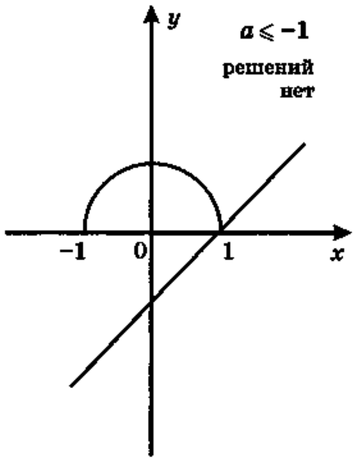
$2a^2+2ax+a^2-1=0$, $x_1=\dfrac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$; $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}$.

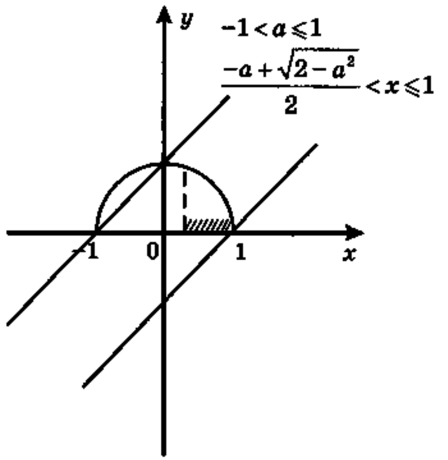
Воспользуемся графическим решением.

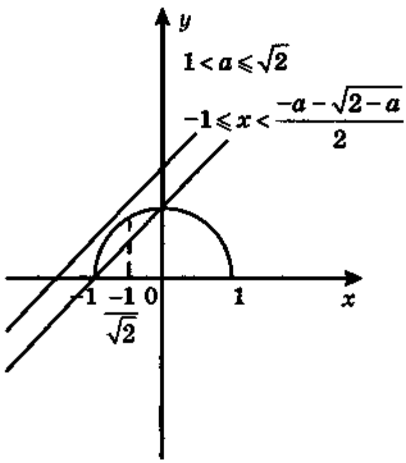
Изобразим на координатной плоскости графики функций $y=\sqrt{1-x^2}$;

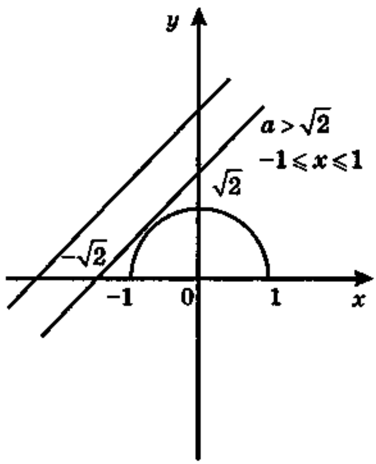
$y=a+x$. Первый график — полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1. График второй функции — прямая линия, пересекающая ось x в точке с абсциссой $-a$. При изменении параметра полуокружность останется на месте, а прямая перемещается, оставаясь параллельной одному и тому же направлению, образующему с положительным направлением оси OX угол 45°. Прямая $y=a+x$ касается окружности при $a=-\sqrt{2}$. Абсцисса точки касания будет $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решения неравенства просматриваются на рисунках.









<u>**Ответ:**</u>

если $a \leqslant 1$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$;

если $1 < a \leqslant \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x < \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$;
если $a > \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

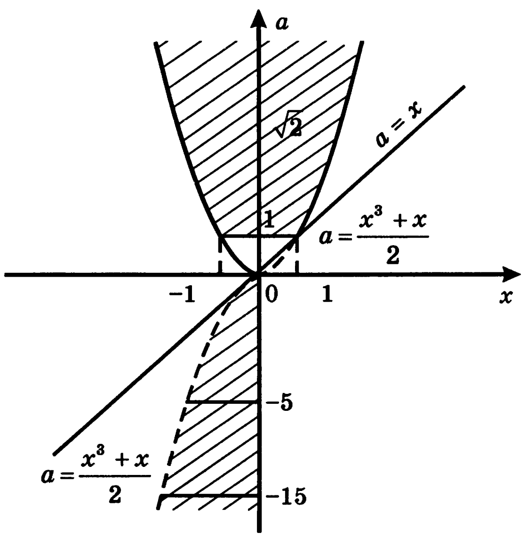
XV **Найдите все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{(a-x^2)(x^2+a)}+a>x$ есть ровно два различных целочисленных решения**

$$\sqrt{\left(a-x^2\right)\left(x^2+a\right)}+a>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-a\geqslant 0,\\ a^2-x^4>x^2-2ax+a^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x-a<0,\\ a^2-x^4\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant a,\\ x\left(a-\dfrac{x^3+x}{2}\right)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<a,\\ |a|\geqslant x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\leqslant x,\\ x\left(a-\dfrac{x^3+x}{2}\right)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a>x,\\ |a|\geqslant x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение

Изобразим множество пар (x; a) на плоскости с соответствующими координатами.



И заметим, что сечение этого множества горизонтальной прямой $a = const$ содержит ровно две точки с целочисленной координатой x, когда либо $a = 1$, либо $f(-3) \leqslant a < f(-2)$, где $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{2}$, т. е. $-15 \leqslant a < -5$.

Ответ:

$[-15;\ -5) \cup \{1\}$.

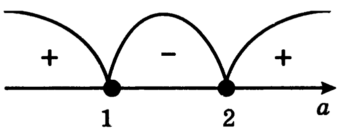
XVII **Для любых значений a решите неравенство** $a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}$

Решение

ОДЗ: $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.

Если $a = 1$, то $x \geqslant 1$, так как неравенство принимает вид $-1 < 0 \cdot \sqrt{x+1}$.

Если $a > 1$, то $\dfrac{a-2}{a-1} < \sqrt{x+1}$;



$\dfrac{a-2}{a-1} > 0$ при $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < 1. \end{array}\right.$

$\dfrac{a-2}{a-1} < 0$ при $1 < a < 2$.

Поэтому при $1 < a < 2$ имеем $x \geqslant -1$. При $a = 2$ $\sqrt{x+1} > 0$, $x > -1$.

При $a > 2$ $\dfrac{a-2}{a-1} > 0$ имеем $\begin{cases} \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1 < x, \\ x \geqslant -1 \end{cases}$ т.е. $x > \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$.

Если же $a < 1$, то неравенство принимает вид $\dfrac{a-2}{a-1} > \sqrt{x+1}$

и $\dfrac{a-2}{a-1} > 0$, поэтому $-1 \leqslant x < \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$.

Ответ:

если $a \geqslant 2$, то $x > \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$; если $1 \leqslant a < 2$, то $x \geqslant 1$;

если $a < 1$, то $-1 \leqslant x < \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$.

XVIII **Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений** $\begin{cases} y\sqrt{1-x^2}-x^2=2a-1, \\ y^2+y\sqrt{1-x^2}=2a-a^3 \end{cases}$

1) не имеет решений,

2) имеет конечное множество решений,

3) имеет бесконечное множество решений.

Решение

Введя переменную $t=\sqrt{1-x^2}$; $-x^2=t^2-1$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} yt+t^2=2a, \\ y^2+yt=2a-a^3. \end{cases}$$

Сложим и вычтем почленно уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} (y+t)^2=4a-a^3, \\ t^2-y^2=a^3. \end{cases}$$

Эта система уравнений равносильна двум системам уравнений:

$$1)\ \begin{cases} y+t=\sqrt{4a-a^3}, \\ (t-y)\sqrt{4a-a^3}=a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+y=\sqrt{4a-a^3}, \\ t-y=\dfrac{a^3}{\sqrt{4a-a^3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4a-a^3}+\frac{a^3}{\sqrt{4a-a^3}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a}{\sqrt{4a-a^3}}=\frac{2a}{\sqrt{4a-a^3}};$$

$y=\sqrt{4a-a^3}-\dfrac{2a}{\sqrt{4a-a^3}}=\dfrac{2a-a^3}{\sqrt{4a-a^3}}$. Итак, $t=\dfrac{2a}{\sqrt{4a-a^3}}$; $y=\dfrac{2a-a^3}{\sqrt{4a-a^3}}$;

$$t=\sqrt{1-x^2}=\frac{2a}{\sqrt{4a-a^3}};$$

$$1-x=\frac{4a^2}{4a-a^3};\ x^2=1-\frac{4a^2}{4a-a^3}=\frac{4a-a^3-4a^2}{4a-a^3}=\frac{4-4a-a^2}{4-a^2};$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{4-4a-a^2}{4-a^2}};\ y=\frac{2a-a^3}{\sqrt{4a-a^3}}. \qquad (1)$$

2) $\begin{cases} y+t=-\sqrt{4a-a^3}, \\ t-y=-\dfrac{a^3}{\sqrt{4a-a^3}} \end{cases} \Leftrightarrow t=-\dfrac{2a}{\sqrt{4a-a^3}};\ y=\dfrac{2a}{\sqrt{4a-a^3}}-\sqrt{4a-a^3}=$ **(2)**

$=\dfrac{a^3-2a}{\sqrt{4a-a^3}};\ x=\pm\sqrt{\dfrac{4-4a-a^2}{4-a^2}};\ y=\dfrac{a^3-2a}{\sqrt{4a-a^3}}.$

Объединяя (1) и (2), получим $x=\pm\sqrt{\dfrac{4-4a-a^2}{4-a^2}};\ y=\dfrac{2|a|-|a|^3}{\sqrt{4a-a^3}}.$

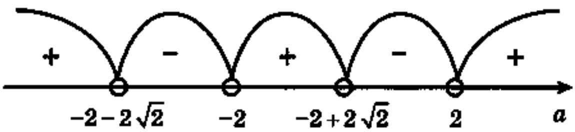
1) Данная система уравнений не имеет решений, если

$$\frac{4-4a-a^2}{4-a^2}<0 \Leftrightarrow \frac{a^2+4a-4}{a^2-4}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(a-\left(-2-2\sqrt{2}\right)\right)\left(a-\left(-2+2\sqrt{2}\right)\right)}{(a-2)(a+2)}<0.$$

Решаем неравенство методом интервалов.

$a^2+4a-4=0;$

$a=-2\pm\sqrt{8}=-2\pm2\sqrt{2}.$

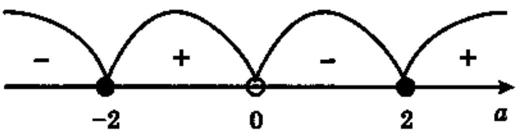


Решение:

$-2-2\sqrt{2}<a<-2,\ -2+2\sqrt{2}<a<2.$ **(3)**

$4a-a^3\leqslant 0$, где $a\neq 0$,

$a(a-2)(a+2)\geqslant 0.$



Решение:

$-2\leqslant x<0,\ x\geqslant 2.$ **(4)**

Объединяя (3) и (4), получим: $-2-2\sqrt{2}<a<0, -2+2\sqrt{2}<a.$

При таких значениях a система уравнений не имеет решений.

2) Данная система уравнений имеет конечное множество решений, если:

$$\begin{cases} 4a-a^3>0, \\ \dfrac{4-4a-a^2}{4-a^2}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ 0<a<2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a\leqslant -2-2\sqrt{2}, \\ -2\leqslant a\leqslant -2+2\sqrt{2}, \\ a\geqslant 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leqslant -2-2\sqrt{2}, \\ 0<a\leqslant -2+2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Тогда $x=\pm\sqrt{\dfrac{4-4a-a^2}{4-a^2}}$; $y=\dfrac{a^3-2a}{\sqrt{4a-a^3}}$. **(5)**

3) Данная система уравнений имеет бесконечное множество решений при $a=0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} y\sqrt{1-x^2}-x^2=-1, \\ y^2+y\sqrt{1-x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\left(y+\sqrt{1-x^2}\right)=0, \\ y\left(y+\sqrt{1-x^2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ y=-\sqrt{1-x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{1-x^2}, \\ \sqrt{1-x^2}=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leqslant 1 \Leftrightarrow |x|\leqslant 1,\ x\in[-1;\,1]$;

$y=-\sqrt{1-x^2}$.

Ответ:

1) $-2-2\sqrt{2}<a<0,\ -2+2\sqrt{2}<a$;

2) $a\leqslant -2-2\sqrt{2},\ 0<a\leqslant -2+2\sqrt{2},\ x=\pm\sqrt{\dfrac{4-4a-a^2}{4-a^2}},\ y=\dfrac{2|a|-|a|^3}{\sqrt{4a-a^3}}$;

3) $a=0,\ x\in[-1;\,1],\ y=-\sqrt{1-x^2}$.

Дидактические материалы

А. Решите уравнения:

1. $\sqrt{x-a}=a$;

2. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$;

3. $\sqrt{3x-a}=a-2x$.

4. Решите неравенство:

$x+\sqrt{a^2-x^2}\geqslant 0$.

- **Б.** Решите уравнения:

1. $\sqrt{3x-2}=x+a$;

2. $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$;

3. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$;

Решите неравенства:

4. $\sqrt{2x+m}\geqslant x$;

5. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}<a$.

- **В.** Решите уравнения:

1. $\sqrt{x+a}-\sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$;

2. $\dfrac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{a+x}}$;

3. $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2-a^2}}=a-x$;

Решите неравенства:

4. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$;

5. $\sqrt{2ax-x^2}\geq a-x$;

Ответы и решения:

А. 1. $x=a^2+a$ при $a\geqslant 0$;

2. При $a=0$ $x=0$; при $a\in[1;+\infty)$ $x=0{,}25(a-1)^2$;
при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ решений нет.

3. При $a \geqslant 0$ $x = 0{,}125\left(4a + 3 - \sqrt{8a+9}\right)$; при $a < 0$ нет корней.

4. $x \in \left[-\frac{a}{2}; |a|\right]$.

Б. 1. Обозначим $y = \sqrt{3x-2}$, тогда $x = -\frac{1}{3}\left(y^2 + 2\right)$, $y \geqslant 0$. Для y получим уравнение $y^2 - 3y + a + 2 = 0$, которое надо решить при условии $y \geqslant 0$. $D \geqslant 0$ при $a \leqslant \frac{1}{12}$. Если y_1 и y_2, $y_1 \leqslant y_2$ — корни уравнения, то по теореме Виета $y_1 + y_2 = 3$, $y_1 \cdot y_2 = 3a + 2$. Следовательно, оба корня не могут быть отрицательными. При $a = \frac{1}{12}$ получаем одно решение: $y = \frac{3}{2}$; при $-\frac{2}{3} \leqslant a < \frac{1}{12}$ — два решения: $y_1 = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{1-12a}\right)$, $y_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{1-12a}\right)$; при $a < -\frac{2}{3}$ — одно решение: $y = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{1-12a}\right)$. Теперь возвращаемся к неизвестному x и получаем ответ. Если $a < -\frac{2}{3}$, то $x = \frac{1}{2}\left(3 - 2a + \sqrt{1-12a}\right)$; если $-\frac{2}{3} \leqslant a < \frac{1}{12}$, то $x_1 = \frac{1}{2}\left(3 - 2a - \sqrt{1-12a}\right)$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(3 - 2a + \sqrt{1-12a}\right)$; если $a = \frac{1}{12}$, то $x = 1\frac{5}{12}$; если $a > \frac{1}{12}$, то решений нет.

2. При $a \in \left(\sqrt{11}; \infty\right)$ $x = 0{,}5\left(2a^2 - 7 + a\sqrt{3a^2 - 22}\right)$,

при $a \in \left[\frac{\sqrt{66}}{3}; \sqrt{11}\right]$ $x = 0{,}5\left(2a^2 - 7 \pm a\sqrt{3a^2 - 22}\right)$;

при $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{66}}{3}\right)$ корней нет.

3. При $a \in [0; 1]$ $x_1 = a^2 - a + 1$, $x_2 = a^2 + a$; при $a \in (1; \infty)$ $x = a^2 + a$;
при $a \in (-\infty; 0)$ корней нет.

4. При $-1 < m \leqslant 0$ $x \in \left[1 - \sqrt{1+m}; 1 + \sqrt{1+m}\right]$; при $m > 0$
$x \in \left[-0{,}5m; 1 + \sqrt{1+m}\right]$; при $m < -1$ решений нет;
при $m = -1$ $x = 1$.

5. Если $a > \sqrt{3}$, то $x \in \left(1;\ 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}\right]$; если $\sqrt{1,5} < a \leqslant \sqrt{3}$,

то $x \in \left(3a^2 - 2 - 2a\sqrt{2a^2 - 3};\ 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}\right)$;

при $a \leqslant \sqrt{1,5}$ решений нет.

Указание

Привести неравенство к виду $\sqrt{2y^2 + 3} < a + y$, где $y = \sqrt{x - 1}$.

В. 1. При $a = 0$ $x > 0$; при $a < 0$ $x = -2a$, при $a > 0$ решений нет.

2. При $a = 0$ $x > 0$; при $a > 0$ $x = \dfrac{a\left(\sqrt{5} + 1\right)}{2}$; при $a < 0$ решений нет.

3. При $a = 0$ $x \in (-\infty;\ 0]$; при $a > 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0,75a$; при $a < 0$ нет корней.

4. При $a < 0$ $x \in [a;\ 0]$; при $a > 0$ $x \in (0;\ a)$.

Указание

При $a < 0$ неравенство верно при всех значениях x, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} a^2 - x^2 \geqslant 0, \\ 2ax - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} a \leqslant x \leqslant -a, \\ 2a \leqslant x \leqslant 0; \end{cases} \text{ значит, } a \leqslant x \leqslant 0.$$

При $a = 0$ решений нет. Остается рассмотреть случай $a > 0$.

5. При $a \geqslant 0$ $x \in \left[0,5\left(2 - \sqrt{2}\right)a;\ 2a\right]$; при $a < 0$ $x \in \left[0,5\left(2 + \sqrt{2}\right)a;\ 0\right]$.

§ 7. Решение трансцендентных уравнений и неравенств

Уравнение вида $a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$, *где* $a>0$, $b>0$, *будем называть элементарным показательным уравнением.* (1)

Уравнение $\log_a f(x)=\log_b \varphi(x)$ (2), где $a>0,\ a\neq 1,\ b>0\ (b\neq 1)$, будем называть элементарным логарифмическим уравнением. Областью определения его служит решение системы $\begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$

При $a=b$ мы получим уравнение $f(x)=\varphi(x)$, равносильное уравнению (2) (в области определения уравнения).

Если $a\neq b$, то решение уравнения (2) сводится к решению уравнения

$\log_a f(x)=\dfrac{1}{\log_a b}\log_a \varphi(x)$, что равносильно уравнению

$$f(x)^{\log_a b}=\varphi(x),\ \text{где}\ a>0,\ (a\neq 1),\ b>0,\ (b\neq 1).$$

Решение логарифмического уравнения обычно сводится к нахождению корней логарифмического уравнения вида (2).

Дана функция $f(x)=\log_a\left(1-8a^{-x}\right)$,
а) Найдите область определения функции f
б) Решите неравенство $f(x)+2x>0$ **при всех допустимых** a

Решение

а) Пусть $a>1$, $1-8a^{-x}>0 \Leftrightarrow 8a^{-x}<1 \Leftrightarrow a^{-x}<\dfrac{1}{8}$.

Прологарифмируем по основанию a, $-x<\log_a\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x>\log_a 8$;
при $0<a<1$ $x<\log_a 8$.

б) $\log_a\left(1-8a^{-x}\right)+2x>0 \Leftrightarrow \log_a\left(1-8a^{-x}\right)+\log_a a^{2x}>0 \Leftrightarrow$

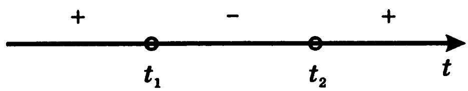
$\Leftrightarrow \log_a\left(a^{2x}-8a^{x}\right)>0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x}-8a^{x}>1, \\ 1-8a^{-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x}-8a^{x}>1, \\ 8a^{-x}<\dfrac{1}{8}=8^{-1}. \end{cases}$$

Если $a>1$, то получим систему $\begin{cases} a^{2x}-8a^{x}>1, \\ x>\log_a 8; \end{cases}$ (3а)

при $0<a<1$ — систему $\begin{cases} a^{2x}-8a^{x}<1, \\ x<\log_a 8. \end{cases}$ (3б)

Рассмотрим неравенство $a^{2x}-8a^{x}-1>0$ и решим его методом замены $a^{x}=t$. Получаем $t^2-8t-1>0$. Решаем методом интервалов:



$t^2-8t-1=0;$

$t=4\pm\sqrt{17}$; $t_1=4-\sqrt{17}<0$; $t_2=4+\sqrt{17}>8$.

Решением неравенства является только $t>t_2$ или $a^{x}>4+\sqrt{17} \Leftrightarrow x>\log_a\left(4+\sqrt{17}\right)>\log_a 8$. Отсюда решением системы (3а) является $x>\log_a\left(4+\sqrt{17}\right)$ при $a>1$. Аналогично, решая систему (3б), получим при $0<a<1$ $\log_a\left(4+\sqrt{17}\right)<x<\log_a 8$.

Ответ:

б) При $a>1$ $x>\log_a\left(4+\sqrt{17}\right)$; при $0<a<1$ $\log_a\left(4+\sqrt{17}\right)<x<\log_a 8$.

Найдите все значения $a\in R$, при каждом из которых неравенство $1-\log_{\frac{1}{7}}(x^2+1)\geqslant\log_7(ax^2+4x+a)$ выполняется при любом действительном x

Решение

Пропотенцируем данное логарифмическое уравнение и перейдем к равносильной системе.

$$\log_7 7+\log_7(x^2+1)\geqslant\log_7(ax^2+4x+a)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}7(x^2+1)\geqslant ax^2+4x+a,\\ ax^2+4x+a>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2(7-a)-4x+7-a\geqslant 0,\\ ax^2+4x+a>0.\end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют значения a, для которых

$$\begin{cases}7-a>0,\\ D_1=4-(7-a)^2\leqslant 0,\\ a>0,\\ D_1=4-a^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}0<a<7,\\ |7-a|\geqslant 2,\\ |a|>2\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}0<a<7,\\ 7-a\geqslant 2,\\ a>2\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}0<a<7,\\ a\leqslant 5,\\ a>2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2<a\leqslant 5.$$

Ответ:

$2<a\leqslant 5.$

III **Решите уравнение $-\log_5(2-|x-b|)=\log_{0,2}(5-x), b\in R.$**

Решение

$-\log_5(2-|x-b|)=-\log_5(5-x)$, умножим обе части уравнения на (-1), пропотенцируем и перейдем к системе, равносильной данному неравенству:

$$\begin{cases}2-|x-b|=5-x,\\ 2-|x-b|>0,\\ 5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}2-|x-b|=5-x,\\ 5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant b,\\ 2-x+b=5-x,\\ x<5,\end{cases} & (4а)\\ \begin{cases}x<b,\\ 2+x-b=5-x,\\ x<5.\end{cases} & (4б)\end{array}\right.$$

Решаем систему (4а):

$$\begin{cases}x\geqslant b,\\ x<5,\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\ 3\leqslant x<5 \text{ при } b=3.$$

Решаем систему (4б):

$$\begin{cases}x<b,\\ x<5,\\ x=\dfrac{3+b}{2}\end{cases}\quad \frac{3+b}{2}<b\ \Leftrightarrow\ b>3;\ \frac{3+b}{2}<5\ \Leftrightarrow\ b<7.$$

Тогда при $3\leqslant b<7$ $x=\dfrac{3+b}{2}$.

Ответ:

$[3;5)$ при $b=3$; $\dfrac{3+b}{2}$ при $3\leqslant b<7$. При остальных значениях b решений нет.

IV **Определите, при каких значениях a уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$ имеет решение, и найдите эти решения.**

Решение

Запишем данное уравнение в виде $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=\log_{\sqrt{2-x}}\left(\sqrt{2-x}\right)^2$.

Оно равносильно системе $\begin{cases}2x+a=\left(\sqrt{2-x}\right)^2,\\ 2x+a>a,\\ 2-x\neq 0,\\ 2-x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+a=(2-x)^2,\\ -\dfrac{a}{2}<x<2,\\ x\neq 1.\end{cases}$

Решим уравнения $2x+a=(2-x)^2$, $x^2-6x+4+a=0$;

$D_1=9-4+a=5+a\geqslant 0$, $a\geqslant -5$, $x_1=3-\sqrt{a+5}$; $x_2=3+\sqrt{a+5}$.

Так как $\sqrt{a+5}\geqslant 0$, то $x_2\geqslant 3$ и не удовлетворяют условию $-\dfrac{a}{2}<x<2$.

Рассмотрим $-\dfrac{a}{2}<x_1<2$, т. е. $-\dfrac{a}{2}<3-\sqrt{a+5}<2$, (*)

$3-\sqrt{a+5}>-\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow\sqrt{a+5}<\dfrac{a}{2}+3$. (5)

Если $\dfrac{a}{2}+3<0$, или $a<-6$, то неравенство (5) решений не имеет. Если $\dfrac{a}{2}+3\geqslant 0$, $a\geqslant -6$, возведем обе части неравенства (5) в квадрат.

$a+5<\dfrac{a^2}{4}+3a+9\Leftrightarrow a^2+8a+16>0$, $(a+4)^2>0$ при любом a, $a\neq -4$, неравенство (5) имеет решение при $a\geqslant -5$, $a\neq -4$.

$3-\sqrt{a+5}<2\Leftrightarrow\sqrt{a+5}>1\Leftrightarrow\begin{cases}a+5>1,\\ a+5>0\end{cases}\Leftrightarrow a>-4.$

Находя общее решение неравенства (*), имеем $x_1=3-\sqrt{a+5}$ при $a>-4$, но учитывая, что $a\neq -1$, пишем окончательный ответ.

Ответ:

$3-\sqrt{a+5}$ при $a>-4,\ a\neq 1.$

При каких значениях t неравенство $\log_{\frac{t+1}{t+2}}\left(x^2+3\right)>1$ выполняется при всех x?

Решение

Так как неравенство должно выполняться при любом значении x, то оно должно выполняться и при $x=0$. При таком значении x получаем неравенство $\log_{\frac{t+1}{t+2}}3>1$ (1), где, как и в исходном неравенстве,

$$\begin{cases}\dfrac{t+1}{t+2}>0,\\ \dfrac{t+1}{t+2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>-1,\\ t<-2.\end{array}\right.$$

Перепишем неравенство (1) в виде $\log_{\frac{t+1}{t+2}}3>\log_{\frac{t+1}{t+2}}\dfrac{t+1}{t+2}$ (2) и предположим, что

$$0<\frac{t+1}{t+2}<1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t+1}{t+2}>0,\\ \dfrac{t+1}{t+2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t>-1,\\ t<-2\end{array}\right.\\ t>-2\end{cases}\Leftrightarrow t>-1,\ \frac{t+1}{t+2}-1<0\Leftrightarrow\frac{-1}{t+2}<0.$$

При $t>-1$ по свойству логарифмической функции приходим к неравенству $3<\dfrac{t+1}{t+2}\Leftrightarrow\dfrac{t+1}{t+2}-3=\dfrac{t+1-3t-6}{t+2}=\dfrac{-2t-5}{t+2}>0;$

$$\frac{t+2{,}5}{t+2}<0\Leftrightarrow -2{,}5<t<-2\notin\left(-1;\ \infty\right).$$

Значит, при $0<\dfrac{t+1}{t+2}<1$ решений нет.

Пусть $\dfrac{t+1}{t+2}>1\Leftrightarrow\dfrac{t+1}{t+2}-1=-\dfrac{1}{t+2}>0,\ \dfrac{1}{t+2}<0\Leftrightarrow t<-2.$

При $t<-2$ по свойству логарифмической функции приходим к неравенству $3>\dfrac{t+1}{t+2}\Leftrightarrow\dfrac{t+2{,}5}{t+2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>-2,\\ t<-2{,}5.\end{array}\right.$

Но так как $t<-2$, то получаем решение $t<-2{,}5$.

Ответ:

$t<-2{,}5.$

VI Решите неравенство $\left(-x^2+\sqrt{5}x-6\right)\dfrac{x-a}{\log_3(x-2)}<0,\ a\in R$

Решение

Данное в условии неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x-a>0,\\ \log_3(x-2)>0,\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x-a<0,\\ \log_3(x-2)<0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Поскольку $-x^2+\sqrt{5}x-6<0$, действительно, $-x^2+\sqrt{5}x-6=0$.

$D=5-24<0$. Квадратный трехчлен не имеет корней, $a=-1<0$, значит, его график расположен под осью x, функция $y=-x^2+\sqrt{5}x-6$ принимает при всех действительных значениях x только отрицательные значения.

Решаем систему (1) $\begin{cases}x>a,\\ x-2>0,\\ x-2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>a,\\ x>3.\end{cases}$

Если $a=2$, то $x>3$; если $a<2$, то $x>3$; если $2<a<3$, то $x>3$; если $a>3$, то $x>a$.

Решаем систему (2) $\begin{cases}x<a,\\ x-2>0,\\ x-2<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<a,\\ x>2,\\ x<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<a,\\ 2<x<5.\end{cases}$

Если $a=2$, то решений нет; если $a<2$, то решений нет;
если $2<a\leqslant 3$,то $2<x<a$; если $a>3$, то $2<x<3$.

Ответ:

при $a\leqslant 2$ $x\in(3;+\infty)$; при $2<a\leqslant 3$ $x\in(2;a)\cup(3;+\infty)$;
при $a>3$ $x\in(2;3)\cup(a;+\infty)$.

VII При каждом значении a решите уравнение $4x-2a(a+1)\,2^{x-1}+a^3=0.$

Решение

Замена: $2^x=y$, $y>0$.

$y^2-a(a+1)y+a^3=0$. Данная задача эквивалентна следующей задаче: найти положительные решения для каждого значения параметра a.

$D=a^2(a+1)^2-4a^3=a^4+2a^3+a^2-4a^3=a^2(a-1)^2$.

$D\geqslant 0$.

1) $D=0$ при $a=0$, $a=1$.

При $a=0$, $y=0$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a=1$ $y^2-2y+1=0$, $y=1$,

тогда $2^x=1 \Leftrightarrow x=0$ — решение.

2) $D>0$, при всех a, кроме $a=0$, $a=1$.

Если $a\neq 0$, $a\neq 1$,

то $y=\dfrac{a(a+1)\pm a(a-1)}{2}$ $y_1=\dfrac{a^2+a-a^2+a}{2}=a>0$ $y_2=\dfrac{2a^2}{2}=a^2$.

Если $a<0$, то $y_2=a^2$; $2^x=a^2$; $x=2\log_2|a|$

Если $a>0$, то $\left[\begin{array}{l}2^x=a,\\ 2^x=a^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_2 a,\\ x=2\log_2 a.\end{array}\right.$

Ответ:

если $a=0$, то решений нет; если $a=1$, то $x=0$; если $a>0$, $a\neq 1$, то $x_1=\log_2 a$, $x_2=2\log_2 a$;

если $a<0$, то $x=2\log_2|a|$.

VIII **При каждом значении параметра a решите уравнение $x^x=a$.**

Решение

Пусть $x^a=y$ при условии, что $x>0$, тогда $y>0$.

$x=y^{\frac{1}{a}}$, $\left(y^{\frac{1}{a}}\right)^y=a$; $y^{\frac{y}{a}}=a$; $y^y=a^a <=> y=a$;

$x^a=a$; $x=a^{\frac{1}{a}}$.

Ответ:

$a^{\frac{1}{a}}$.

IX Решите относительно x уравнение $\sqrt[x^2-1]{a^9}\ \sqrt[x+1]{\dfrac{1}{a^3}}=a^2$.

Решение

По смыслу уравнения $a>0$, x — натуральное число, $x\neq 1$. Используя свойства корней, получим равносильное уравнение:

$$a^{\frac{9}{x^2-1}}\cdot a^{\frac{-3}{x+1}}=a^2 \Leftrightarrow a^{\frac{12-3x}{x^2-1}}=a^2.$$

При $a=1$ x — любое натуральное число, $x\neq 1$, т. е. $x\geqslant 2$ при $a>0$, $a\neq 1$.

$$\frac{12-3x}{x^2-1}=2\Leftrightarrow 12-3x=2x^2-2\Leftrightarrow 2x^2+3x-14=0.$$

$D=3^2+4\cdot 2\cdot 14=9+112=121=11^2$,

$x_1=\dfrac{-3-11}{4}=\dfrac{-7}{2}=-3{,}5\notin N$,

$x_2=\dfrac{-3+11}{4}=2.$

Ответ:

при $a=1$ $x\geqslant 2$ $(x\in N)$; при $a>0$ $(a\neq 1)$ $x=2$.

X Решите уравнение. $a^{x+3}=b^{x-2}$.

Решение

Исходя из определения показательной функции имеем $a>0$, $b>0$. Если $a=b=1$, то x — любое действительное число; если $a=1$, $b\neq 1$, то $x=2$; если $a\neq 1$, $b=1$, то $x=-3$. Пусть $a\neq 1$, $b\neq 1$, тогда $x+3=\log_a b^{2-x} \Leftrightarrow x+3=(2-x)\log_a b \Leftrightarrow x(1+\log_a b)=2\log_a b-3.$

Если $1+\log_a b=0$, $\log_a b=-1$, $b=\dfrac{1}{a}$.

При $b=\dfrac{1}{a}\neq 1$ получаем $x\cdot 0=2\log_a\dfrac{1}{a}-3=-5$ — решений нет.

При $b\neq\dfrac{1}{a}$ $x=\dfrac{2\log_a b-3}{1+\log_a b}$.

Ответ:

при $a = b = 1$ $x \in R$;

при $a = 1, b \neq 1$ $x = 2$;

при $a \neq 1, b = 1$ $x = -3$;

при $a \neq 1,\ b \neq \frac{1}{a}$ $x = \frac{2 \cdot \log_a b - 3}{1 + \log_a b}$;

при $a \neq 1, b \neq \frac{1}{a} \neq 1$ — решений нет.

XI **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.**

Решение

Левая часть уравнения — четная функция от x. Поэтому если x_0 — корень уравнения, то $-x_0$ — также его корень, так что единственным корнем может быть лишь $x_0 = 0$. Подставляя $x_0 = 0$, получим $a^2 - 2a \cdot \sin 1 = 0 \Leftrightarrow a(a - 2\sin 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ или $a = 2\sin 1$.

Осталось убедиться, что при этих значениях a уравнение действительно имеет единственный корень. Подставим $a = 0$ в данное уравнение, получим $x^2 = 0$, $x = 0$ — единственное решение.

Теперь подставим $a = 2\sin 1$ в уравнение, получим $x^2 - 4\sin 1 \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \sin(\cos x)$ (5)

$x^2 + 4\sin^2 1 \geqslant 4\sin^2 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$.

Для $t \in [-1; 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция f возрастает, следовательно, $\sin t \leqslant \sin 1 \Leftrightarrow \sin(\cos x) \leqslant \sin 1$.

Умножим обе части последнего неравенства на $4\sin 1 > 0$.

$4\sin 1 \sin(\cos x) \leqslant 4\sin^2 1$.

Значит, уравнение (5) равносильно системе

$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \sin(\cos x) = 4\sin^2 1, \end{cases}$ имеющей единственное решение $x = 0$.

Ответ:

0; 2 sin 1.

XII **Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно восемь решений.**

Решение

ОДЗ: $a^2 - x^2 \geqslant 0 <=> |x| \leqslant |a| <=> -a < x < a$.

Из свойства четности левой части уравнения по x вытекает, что если $x = 0$ — корень уравнения, то на отрезке $[-a;\ a]$ будет нечетное число корней рассматриваемого уравнения. Имея это в виду, рассмотрим уравнение $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 2\pi k$, $k \in Z$, $k \geqslant 0$, полученное из исходного уравнения $x^2 = a^2 - \pi 4\pi^2 k^2$, которое имеет решения $x = \pm(a^2 - 4\pi^2k^2)^{\frac{1}{2}}$. Чтобы этих решений на некотором отрезке $[-a;\ a]$ было четное число, должно выполняться неравенство $a^2 - 4\pi^2k^2 > 0 \Leftrightarrow \left(k-\frac{a}{2}\pi\right)\left(k+\frac{a}{2}\pi\right) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{a}{2}\pi < k < \frac{a}{2}\pi$.

Неотрицательных k будет 8 при условии, что $3 < \frac{a}{2}\pi < 4$ и $-4 < \frac{a}{2}\pi < -3$; $6\pi < a < 8\pi$ и $-8\pi < a < -6\pi$.

Ответ:

$6\pi < a < 8\pi$; $-8\pi < a < -6\pi$.

XIII **Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$ выполняется для любого значения x.**

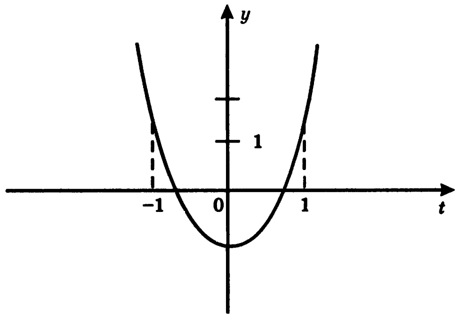
Решение

По формуле $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ Замена: $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$

$1 - t^2 + 2at - 2a - a^2 + 4 < 0$, $t^2 - 2at + a^2 + 2a - 5 > 0$. Исследуем неравенство на промежутке $|t| \leqslant 1$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 5$.

$D_1 = a^2 - (a^2 + 2a - 5) = 5 - 2a$, $f(-1) > 0$; $f(1) > 0$; $D > 0$.



$$\begin{cases} 5-2a>0, \\ 1+2a+a^2+2a-5>0, \\ 1-2a+a^2+2a-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a<-2-\sqrt{8}, \\ a>-2+\sqrt{8}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-2-\sqrt{8}, \\ a>2. \end{array}\right.$$

$a^2+4a-4 \geqslant 0,$

$D_1 = 4+4 = 8,$

$a^2-4>0.$

Ответ:

$a<-2-\sqrt{8}$; $a>2$.

XIV Найдите все значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых значений x $|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x \cos x + 3\cos^2 x - a + 1| \leqslant 3$

Решение

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$; $2\sin x \cos x = \sin 2x$.

$|1-(a-1)\sin 2x + 1 + \cos 2x - a + 1| = |3 - a + ((1-a)\sin 2x +$
$+ \cos 2x)| \leqslant 3$, или $|3 - a + (a^2-2a+2)^{\frac{1}{2}} \sin(2x+\varphi)| \leqslant 3$.

Так как неравенство должно выполняться для любых x, что равносильно тому, чтобы наибольшее значение левой части было меньше 3, то для искомых значений a получаем неравенство:

$|3-a| + (a^2-2a+2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3$. ОДЗ: $a^2-2a+2 \geqslant 0$, $a \in R$

$D_1 = 1-2 = -1 < 0.$

$(a^2-2a+2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3-|3-a|$.

а) $3-a \geqslant 0$; $a \leqslant 3a \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $(a^2-2a+2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3-3+a=a$
$\Leftrightarrow a^2-2a+2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow a \geqslant 1 \Leftrightarrow a \geqslant 1$. Но так как $a \leqslant 3$,
то получаем $1 \leqslant a \leqslant 3$. (1)

б) $3-a<0$, $a>3$.

$(a^2-2a+2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3+3-a=6-a6-a \geqslant 0$,

$a^2-2a+2 \leqslant 36-12+a^2 \;\; a \leqslant 6$, $a \leqslant \dfrac{17}{5}$.

$10a \leqslant 34$

Поскольку $a>3$, то в случае б) неравенство имеет решение:

$3<a \leqslant \dfrac{17}{5}$. (2)

Объединяя (1) и (2), получаем ответ $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{17}{5}$.

Ответ:

$1 \leqslant a \leqslant \dfrac{17}{5}$.

XV Найдите все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение $2-2\cos x=3k+4\sin x$ имеет решение. Найдите все эти решения

Решение

Известно, что $1-\cos 2x=2\sin^2 x => \cos 2x=1-2\sin^2 x$.

$2-2+4\sin^2 x-4\sin x-3k=0$. Замена: $\sin x=t$, $|t| \leqslant 1$.

$4t^2-4t-3k=0$, $D_1=4+12k$.

При $D_1<0 \;\; k<-\dfrac{1}{3}$, решений нет.

При $D_1=0 \; k=-\dfrac{1}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, так как $k \in Z$.

При $D_1>0 \; k>-\dfrac{1}{3}$ — два решения.

$k=0;\ 1;\ 2...$

$t=\left(2 \pm 2\cdot\sqrt{1+3\cdot k}\right):4=\left(1 \pm \sqrt{1+3\cdot k}\right):2$

$|t| \leqslant 1;\ \left|\left(1+\sqrt{1+3k}\right):2\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \;\; -2 \leqslant 1+\sqrt{1+3k} \leqslant 2 \Leftrightarrow -3 \leqslant \sqrt{1+3k} \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3k} \geqslant -3, \\ \sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow k \geqslant -\frac{1}{3}; \quad k = 0;\ 1;\ 2;\dots$$

$1+3\cdot k \leqslant 1, \quad 3\cdot k \leqslant 0; \quad k = 0;\ -1;\ -2;\dots$

$$\left|\left(1-\sqrt{1+3\cdot k}\right):2\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 1-\sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 2 \Leftrightarrow -3 \leqslant -\sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leqslant \sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3\cdot k} \geqslant -1 \\ \sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant \frac{1}{3}; \quad k = 0;\ 1;\ 2;\dots \\ k = \dots, -2; -1;\ 0;\ 1;\ 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k = 0;\ 1;\ 2.$

$\sqrt{1+3\cdot k} \leqslant 3 \Leftrightarrow 1+3\cdot k \leqslant 9; \quad 3\cdot k \leqslant 8; \quad k \leqslant \frac{8}{3}; \quad k = 0;\ 1;\ 2;\ -1;\ -2;\dots$

При $k = 0$ получаем уравнение $4t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in z. \end{array}\right.$$

При $k = 1$ получаем уравнение $4\cdot t^2 - 4\cdot t - 3 = 0$

$D_1 = 4+12 = 16, \quad \sqrt{D_1} = 4, \quad t = (2\pm 4):4; \quad t_1 = \frac{3}{2} > 1, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$

$\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z\cdot$

При $k = 2$ получаем уравнение $4\cdot t^2 - 4\cdot t - 6 = 0, 2t^2 - 2\cdot t - 3 = 0.$

$D_1 = 1 + 6 = 7,$

$\sqrt{D_1} = \sqrt{7}, \ t = \left(1\pm\sqrt{7}\right):2; \ t_1 = \left(1-\sqrt{7})\right):2 > -1; \ t_2 = \left(1+\sqrt{7}\right):2 > 1$

не является решением $\sin x = \left(1-\sqrt{7}\right):2; \ x = (-1)^n \arcsin\left(1-\sqrt{7}\right):$

$:2 + \pi\cdot n, \ n \in Z.$

<u>**Ответ:**</u>

при $k = 0 \ \ x = \pi\cdot n, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\cdot\pi\cdot n, \ n \in Z;$

при $k = 1 \ \ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z;$

при $k = 2 \ \ x = (-1)^n \arcsin\left(1-\sqrt{7}\right):2 + \pi\cdot n, \ n \in Z.$

XVI **Определите значение параметров a и b, для которых любая пара x и y $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, удовлетворяющая уравнению $x + y = a$, удовлетворяет уравнению $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b$.**

Решение

Пусть $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\operatorname{tg} x = U$; $\operatorname{tg} a = A$. Имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(a - x) =$

$= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x} = b$, т. е. $U + \frac{A - U}{1 + UA} = b$. Упрощаем и получаем $AU^2 - AbU + A - b = 0$. Получилось квадратное уравнение относительно U, имеющее более двух (бесконечно много) корней. Значит, $A = 0$, $b = 0$. $A = \operatorname{tg} a = 0$, $a = \pi n$, $n \in Z$. Пусть $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; тогда $\operatorname{tg} a$ не существует, значит, $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ:

$a = \pi k$, $b = 0$.

XVII **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(\frac{a - 3x^2 + \cos 9\pi x}{2}\right)\sqrt{3 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-1; 5]$ нечетное число различных корней.**

Решение

При $a = 0$ получаем $-3x^2 + \frac{\cos 9\pi x}{2} = 0$;

$\frac{\cos 9\pi x}{2} = 3x^2$. Если решить уравнение графически, то $y = \frac{\cos 9\pi x}{2}$ и $y = 3x^2$ — четные функции и на отрезке $[-1, 1]$. Если есть решения, то их четное число. $x = 0$ решением не является.

На промежутке $1 < x \leqslant 5$ $y = 3x^2$ возрастает. $x = 1$; $y = \frac{\cos 9\pi x}{2} = 0$; $x = 2$; $y = \cos 9\pi = -1$; $x = 3$; $y = \frac{\cos 27\pi}{2} = 0$; $x = 4$; $y = \cos 18\pi = 1$; $\frac{\cos 45\pi}{2} = 0$, при $x = 5$ решений нет.

При $a \neq 0$ имеем $\left[\begin{array}{l} a - 3x^2 + \frac{\cos 9\pi x}{2} = 0, \\ \sqrt{3 - ax} = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3x^2 - \frac{\cos 9\pi x}{2}, \\ a = \frac{3}{x}. \end{array}\right.$

$a = \frac{3}{x}$ монотонно убывает на промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 5$, поэтому каждое свое значение принимает один раз.

$x \geqslant -1$ при $a \leqslant -3$; $x \leqslant 5$ при $a \geqslant \frac{3}{5}$. Функция $a = \frac{3x^2 - \cos \pi x}{2}$ — четная и на промежутке $x \in [-1, 1]$ каждое свое значение принимает четное число раз, кроме $a = -1$ при $x = 0$; монотонно возрастает на промежутке $1 < x \leqslant 5$. На промежутке $1 < x \leqslant 5$ равенство $3x^2 - \frac{\cos 9\pi x}{2} = \frac{3}{x}$ выполняется при $x = 1 \notin (1; 5]$, $a = 3$ не принадлежит к ответу задачи.

Ответ:

$a \leqslant -3$; $a = -1$; $\frac{3}{5} \leqslant a < 3$; $a > 3$.

XVIII **Найдите все значения параметра a, при которых любой корень уравнения $3\sin^3 x - a(2a + 1)\cos^3 x + 2a^2 \cos x = 0$ является корнем уравнения $0{,}5 \log\sqrt{7}\,(4 - 3\,\mathrm{ctg}\,x) - \log_{\frac{1}{7}}(8 + \mathrm{ctg}\,x) - \log_7(3 - 4\,\mathrm{ctg}\,x) = 1$ и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.**

Решение

Во втором уравнении сделаем замену $\mathrm{ctg}\,x = t$.

$\log_7(4 - 3t) - \log_7(8 + t) - \log_7(3 - 4t) = \log_7 7$. Пропотенцируем уравнение и запишем равносильную ему систему:

$$\begin{cases} \frac{(4-3t)(8+t)}{3-4t} = 7, \\ 4 - 3t > 0, \\ 8 + t > 0, \\ 3 - 4t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 8t - 11 = 0, \\ -8 < t < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$3t^2 - 8t - 11 = 0$

$t_{1,2} = \frac{(4 \pm 7)}{3}$; $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{11}{3}$.

t_1 удовлетворяет неравенству $-8 < t < \frac{3}{4}$, а t_2 — нет.

Итак, уравнение второе эквивалентно уравнению $\mathrm{ctg}\,x = -1$.

Разделив первое из указанных в условии уравнений на $\sin^3 x$, получим $3 - a(2a + 1)\,\mathrm{ctg}^3 x + 2a^2 \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x} = 0$. Но $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{ctg}^2 x$. Тогда $3 - a(2a + 1)\,\mathrm{ctg}^3 x + 2a^2\,\mathrm{ctg}\,x\,(1 + \mathrm{ctg}^2 x) = 0$.

Замена: $\mathrm{ctg}\,x = t$.

$$3 - a(2a + 1)t^3 + 2a^2 t(1 + t^2) = 0. \qquad (*)$$

Поскольку это уравнение должно быть равносильно уравнению $t = -1$, то при $t = -1$ уравнение (*) должно превращаться в верное равенство. Это позволяет найти значения a.

$3 + a(2a + 1) - 4a^2 = 0,\ 2a^2 - a - 3 = 0,\ a = \dfrac{(1 \pm 5)}{4};\ a_1 = -1,\ a_2 = \dfrac{3}{2}.$

В соответствии с условием задачи нужно проверить, будет ли при найденных значениях уравнение (*) равносильно уравнению

$t = -1$. При $a = -1$ $3 - t^3 + 2t(1 + t) = 0$, $t^3 + 2t + 3 = 0$. Подбираем первый корень $t = -1$. По схеме Горнера понижаем порядок уравнения

	1	0	2	3
−1	1	−1	3	0

Тогда $t^3 + 2t + 3 = (t + 1)(t^2 - t + 3) = 0$. (Можно $t^3 + 2t + 3$ разделить на $t + 1$, получим тот же результат).

Итак, $t^2 - t + 3 = 0$ решений не имеет, т. к. $D = 1 - 12 = -11 < 0$. Отсюда при $a = -1$ уравнение (*) имеет единственный корень $t = -1$.

При $a = \dfrac{3}{2}$, $3 - \dfrac{3}{2}(3 + 1)t^3 + 2 \cdot \dfrac{9}{4} t(1 + t^2) = 0$, $t^3 - 3t - 2 = 0$. (**)

$t = -1$ является корнем уравнения (**).

	1	0	−3	2
−1	1	−1	−2	0

$t^3 - 3t - 2 = (t + 1)(t^2 - t + 2) = 0$, $t + 1 = 0$ или $t^2 - t + 2 = 0$, $t = \dfrac{1 \pm 3}{2}$;
$t_1 = -1$; $t_2 = 2$.

Итак, $t = -1$ не является единственным корнем уравнения (*), значит, $a \neq \dfrac{3}{2}$.

Ответ:

$a = -1$.

Дидактические материалы

А. Решите уравнения:

1. $a^{2x}(a^{2x} + 1) = a(a^{3x} + a^x)$;

2. $a^{4x} + a^{2x} = a^{6x}$;

3. $a^x - a^{-x} = 2c$.

Решите неравенства:

4. $\dfrac{2^x-1}{2^x-2}<a$;

5. $\dfrac{\log_a x+1}{\log_a x+3}\leqslant\dfrac{1}{\log_a x+1}$;

6. $a^{x2-2x}<1$;

7. $\log_a(x^2+2x)<0$;

8. $\log_a(x-2)+\log_a x>1$.

Решите относительно x:

9. $\sin(x-5)=m-1$;

10. $\cos(3x+1)=b$;

11. $2\,\mathrm{tg}\,(ax-4)\leqslant b$.

Б. Решите уравнения:

1. $4^x-2a(a+1)\,2^{x-1}+a^3=0$;

2. $25^x+a^2(a-1)\,5^x-a^5=0$;

3. $\log_{a^2-x^2}(ax^2-1)=1$;

4. $\log_a(ax)\log_x(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a}$.

5. При каких действительных значениях a неравенство $(a-1)\,4^x+(3-a)\,2^{2x+1}+a>1$ справедливо при всех действительных значениях x?

6. Для каких значений a неравенство $4^{x+1}+9\cdot4^{-x}-2\,(2^{x+1}+3\cdot2-x)\geqslant a$ выполняется при всех $x\geqslant0$?

Решите неравенства:

7. $x^{\log_2 x}\leqslant a^2$;

8. $x^{\log_2 a}+a^{\log_2 x}\geqslant2a^2$;

9. $\left(-x^2+\sqrt{5}x-6\right)-\dfrac{x-a}{\log_3(x-2)}\geqslant0$;

10. $(c+1)<(c+2)\cdot3^{x-1}$.

11. Найдите все значения a, при которых неравенство $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2+1) \geqslant \log_7(ax^2+4x+a)$ справедливо при всех x.

12. При каких значениях a уравнение $1 - x = \sqrt{x^2 - 2\sin^2 a}$ имеет решения? Найдите эти решения.

Решите относительно x:

13. $\sin|2x-2| = a$;

14. $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = \sin 2a$;

15. $\cos^2(x+1) < a$, $(0 < a < 1)$.

В. Решите уравнения:

1. $4^x - 6\cdot 2^x + 1 = 2^x - a$;

2. $\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = c$;

3. $-\log_5(2 - |x-b|) = \log_{0,2}(5-x)$.

4. Найдите все значения a, при которых неравенство $a\cdot 9^x + 4(a - 1)\cdot 3^x + a > 1$ выполняется при всех x;

5. Найдите все значения c, при которых неравенство $1 + \log_2\left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) \geqslant \log_2(cx^2 + c)$ имеет хотя бы одно решение.

6. Для каких значений a неравенство $4^{x+1} + 9\cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3\cdot 2^{-x}) \geqslant a$ выполняется при всех $x \geqslant 0$?

7. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5(x^2+ax+6) + \log_a 3 \geqslant 0$ имеет ровно одно решение.

8. Сколько существует целых значений a, при которых уравнение $1 + a\cos x = (a+1)^2$ имеет хотя бы одно решение?

9. При каких значениях параметра c уравнение $x^2 - 2c\sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственное решение?

10. При каких значениях a уравнения $\sin x = 2\sin^2 x$ и $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2|a-1|\sin^2 x$ равносильны?

11. Решите неравенство $|\sin(2x-4)| \leqslant b$ $(0 < b < 1)$.

Ответы и решения:

А. 1. При $a = 1$ $x \in R$; при $a > 0$, $a \neq 1$ $x = 1$.

2. При $a>0$ $a\neq 1$ $x=\log_a\sqrt{0,5\left(1+\sqrt{5}\right)}$; при $a=1$ корней нет.

3. При $a=1$ и $c=0$ $x\in R$; при $a>0$ $(a\neq 1)$ $x=\log_a\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$; при $a=1$ и $c\neq 0$ решений нет.

4. При $a<\frac{1}{2}$ $x\in\left(\log_2\frac{2a-1}{a-1};\ 1\right)$; при $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ $x\in(-\infty;1)$;

при $a>1$ $x\in(-\infty;1)\cup\left(\log_2\frac{2a-1}{a-1};\ 1\right)$.

5. При $0<a<1$ $x\in\left[a;\frac{1}{a}\right)\cup\left[\frac{1}{a}^2;\ \frac{1}{a}^3\right)$; при $a>1$ $x\in\left(\frac{1}{a}^3;\ \frac{1}{a}^2\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{a};\ a\right]$; $\varnothing$ при остальных a.

6. При $a>1$ $x\in(0;2)$; при $0<a<1$ $x\in(-\infty;0)\cup 2;+\infty)$; $\varnothing$ при $a=1$.

7. При $0<a<1$ $x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$; при $a>1$ $x\in\left(-1-\sqrt{2};-2\right)\cup\left(0;-1+\sqrt{2}\right)$; $\varnothing$ при остальных a.

8. При $0<a<1$ $x\in\left(2;1+\sqrt{1+a}\right)$; при $a>1$ $x\in\left(1+\sqrt{1+a};+\infty\right)$; $\varnothing$ при остальных a.

9. $x=5+(-1)^k\cdot\arcsin(m-1)+\pi k$, где $0\leqslant m\leqslant 2$, $k\in Z$.

10. $x=-\frac{1}{3}\ \pm\frac{1}{3}\arccos b+\ +\frac{2}{3}\pi n$, где $|b|\leqslant 1$, $n\in Z$.

11. При $a>0$ $\frac{1}{a}(4-0,5\pi+\pi k)<x\leqslant\frac{1}{a}\left(4+\operatorname{arctg}\frac{b}{2}+\pi k\right)$;

при $a<0$ $\frac{1}{a}(4+\operatorname{arctg}0,5b+\pi k)\leqslant x<\frac{1}{a}(4-0,5\pi+\pi k)$;
при $a=0$ и $b>-2\operatorname{tg}4$ $x\in R$.

Б. 1. $\log_2|a|$ при $a<0$; $\varnothing$ при $a=0$; $\log_2 a$, $2\log_2 a$ при $a>0$.

2. $3\log_5|a|$, $2\log_5|a|$ при $a<0$; $\varnothing$ при $a=0$; $2\log_5 a$ при $a>0$.

3. $\varnothing$ при $0<|a|<1$; $a=\sqrt{2}$; ± 1 при остальных a.

4. a^{-2}, $a^{-\frac{1}{2}}$ при $a>0$, $a\neq 1$; $\varnothing$ при остальных a.

5. $1\leqslant a\leqslant 5$.

6. $a\leqslant 4\left(3-\sqrt{6}\right)$.

7. $(0;\ a^a]\cup[a^{-a};+\infty)$ при $0<a<1$; $[a^{-a};\ a^a]$ при $a>1$; $\varnothing$ при остальных a.

8. $(0; 4]$ при $0 < a < 1$; $(0; +\infty)$ при $a = 1$; $[4; +\infty)$ при $a > 1$; $\varnothing$ при $a \leqslant 0$.

9. $(3; +\infty)$ при $a \leqslant 2$; $(2; a) \cup (3; +\infty)$ при $2 < a \leqslant 3$; $(2; 3) \cup (a; +\infty)$ при $a > 3$.

10. $\left(1; 1 + \log_3^2 \dfrac{c+1}{c+2}\right)$ при $c < -2$; $[1; +\infty)$ при $c \geqslant -2$.

11. $(2; 5]$.

12. $x = \dfrac{2 - \cos 2\alpha}{2}$ при $-\pi/4 + k\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi/4 + \pi k$, $k \in Z$.

13. $x = 1 + 0{,}5\,((-1)^n \arcsin a + \pi n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ при $0 \leqslant a \leqslant 1$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ при $-1 \leqslant a < 0$.

14. При $a = \dfrac{\pi}{4}(4k + 1)$ $x \in R$; при $\pi k \leqslant a \leqslant 0{,}5\pi + \pi k$ $(a \neq 0{,}25\pi\,(2k + 1))$ $x = \pm 0{,}5 \arccos(\operatorname{tg}(a - 0{,}25\pi)) + \pi n$.

Указание: приведите уравнение к виду $\cos 2a \cdot \cos 2x = \sin 2a - 1$, а затем рассмотрите три случая:

1. $\cos 2a = 0$; $\sin 2a = 1$; 2. $\cos 2a = 0$; $\sin 2a \neq 1$; 3. $\cos 2a \neq 0$.

15. $\arccos\sqrt{a-1} + 2\pi n < x < -1 + \arccos\left(-\sqrt{a}\right) + 2\pi n$;
$-1 - \arccos\left(-\sqrt{a}\right) + 2\pi k < x < -1 - \arccos\sqrt{a} + 2\pi k$.

В. 1. $\log_2 \dfrac{a^2-1}{2a-6}$ при $a \in \left(-1; 3 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left(3; 3 + 2\sqrt{2}\right)$; $\varnothing$ при остальных a.

2. $3 \pm \sqrt{35 - 3^c}$ при $c < 3$; $3 \pm \sqrt{35 - 3^c}$, $3 \pm \sqrt{3^c - 27}$ при $3 \leqslant c \leqslant \log_3 31$; $\varnothing$ при $c > \log_3 31$.

3. $[3, 3; 5)$ при $b = 3$; $\dfrac{b+3}{2}$ при $3 < b < 7$; $\varnothing$ при остальных значениях b.

4. $a \geqslant 2$.

5. $0 < c \leqslant 8$.

6. $-13 \leqslant a \leqslant 12 - 4\sqrt{6}$. Выполните замену $y = 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}$, учтите при этом, что $y \geqslant 2\sqrt{6}$ при $x \geqslant 0$.

7. $a = 2$. При $0 < a < 1$ неравенство имеет бесконечно много решений. При $a > 0$ после замены $t = x^2 + ax + 5$ неравенство приводится к виду $\log_3(t + 1) \cdot \log_5(t^2 + 1) \leqslant 1$. Поскольку левая часть — монотонная функция, получим $t \leqslant 2$.

8. 4.

9. $c = \dfrac{1}{\sin 1}$.

10. $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$. Из первого уравнения получаем $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Второе уравнение после применения формулы синуса тройного угла принимает вид $\sin x\,(4\sin^2 x - 2|a-1|\sin x + a - 2) = 0$. Подставив в него $\sin x = \frac{1}{2}$, получим $|a-1| = a-1$, т. е. $a - 1 \geqslant 0$.

Решим при $a \geqslant 1$ второе уравнение; оно принимает вид $\sin x\,(\sin x - \frac{1}{2})\cdot\left(\sin x - \frac{a-2}{2}\right) = 0$, т. е. $\sin x = 0$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, или $\sin x = \frac{a-2}{2}$. Исходные уравнения будут равносильны, если уравнение $\sin x = \frac{a-2}{2}$ имеет те же решения, что и $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$ или не имеет решений, т. е. при $\frac{a-2}{2} = 0$, $\frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{a-2}{2} > 1$, $\frac{a-2}{2} < -1$.

11. $2 + 0{,}5\pi - 0{,}5\arcsin b + \pi k \leqslant x \leqslant 2 + 0{,}5\pi + 0{,}5\arcsin b + \pi k$ и $2 - 0{,}5\arcsin b + \pi k \leqslant x \leqslant 2 + 0{,}5\arcsin b + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решение

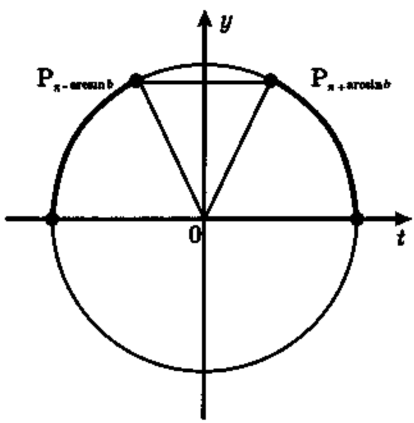
Раскроем знак модуля в уравнении.

1. Если $\sin(2x - 4) \geqslant 0$, то $\sin(2x - 4) \leqslant b$, т. е. $0 \leqslant \sin(2x-4) \leqslant b$.

Замена: $2x - 4 = t$, $0 \leqslant \sin t \leqslant b$. При помощи единичной окружности находим его решение. $\pi - \arcsin b + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi + 2\pi n$, $2\pi n \leqslant t \leqslant \arcsin b + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Переходя к переменной x, получим

$$2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi n \leqslant x \leqslant 2 + \frac{\pi}{2} + \pi n. \qquad (1)$$



или $2 + \pi n \leqslant x \leqslant 2 + \dfrac{1}{2}\arcsin b + \pi n,\ n \in Z.$ (2)

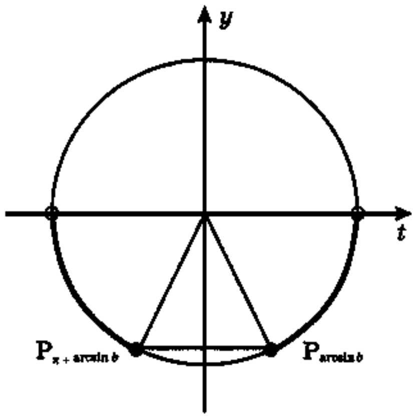
Если $\sin(2x-4) < 0$, то $-\sin(2x-4) \leqslant \sin(2x-4) \geqslant -b$, тогда $-b \leqslant$ $\leqslant \sin(2x-4) < 0$. Замена: $2x - 4 = t$, $-b \leqslant \sin t < 0$.

$\pi + 2\pi n < t \leqslant \pi + \arcsin b + 2\pi n$ или $-\arcsin b + 2\pi n \leqslant t \leqslant 2\pi n,\ n \in Z.$

Отсюда $2 + \dfrac{1}{2}\pi + \pi n < x < 2 + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\arcsin b + \pi n.$ (3)

$2 - \dfrac{1}{2}\arcsin b + \pi n \leqslant x < 2 + \pi n,\ n \in Z$ (4)

Объединяя (2) и (4), (1) и (3), получим:



__Ответ:__

$$2 - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi n \leqslant x \leqslant 2 + \frac{1}{2}\arcsin b + \pi n;$$

$$2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi n \leqslant x \leqslant 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin b + \pi n,\ n \in Z.$$

§ 8. Графические интерпретации

Стандартный способ решения уравнений и неравенств в отдельных случаях приводит к сложным и утомительным преобразованиям. Процесс решения может быть иногда упрощен, если применить графоаналитический прием.

Можно выделить две разновидности рассматриваемого приема:

1) изображение на плоскости $(x; a)$, где x — неизвестное; a — параметр.

2) на плоскости $(x; y)$ рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра a.

Первый способ используется в задачах, которые содержат лишь неизвестную x и параметр a, или сводящихся к таким.

Второй способ оказывается удобен в задачах с двумя неизвестными x и y и одним параметром a.

Суть этого приема можно пояснить на конкретных примерах решения (относительно x) уравнений и неравенств.

I **Решите уравнение** $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1}=a$ **(1)**

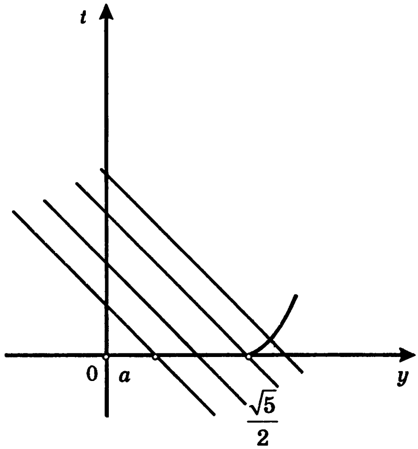
Решение

Замена: $\sqrt{x+1}=y$, где $y \geqslant 0$, $x = y^2 - 1$, $2x - 3 = 2y^2 - 5$.

Уравнение (1) принимает вид $\sqrt{2y^2-5}+y=a$, где $a \geqslant 0$.

ОДЗ: $2y^2 - 5 \geqslant 0$, $y \geqslant \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2y^2-5}=a-y$. (2)

Введем в рассмотрение функции $t=\sqrt{2y^2-5}$ и $t = a - y$ и построим их в одной системе координат. Решением уравнения (2) будет абсцисса точки пересечения построенных графиков.



Из чертежа видно, что при $a \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ уравнение имеет единственное решение, при $a < \frac{\sqrt{5}}{2}$ решений нет.

Найдем решение иррационального уравнения (2). $2y^2 - 5 = (a - y)^2$, $y^2 + 2ay - (a^2 + 5) = 0$. $y_1 = -a - \sqrt{2a^2+5}$, $y_2 = -a + \sqrt{2a^2+5}$, $y_1 < 0$ — посторонний корень уравнения (2), $y_2 > 0$, следовательно, y_2 — решение уравнения (2).

Ответ:

при $a \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ $y = -a + \sqrt{2a^2+5}$, при $a < \frac{\sqrt{5}}{2}$ решений нет.

Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} = a - x$. (3)

Решение

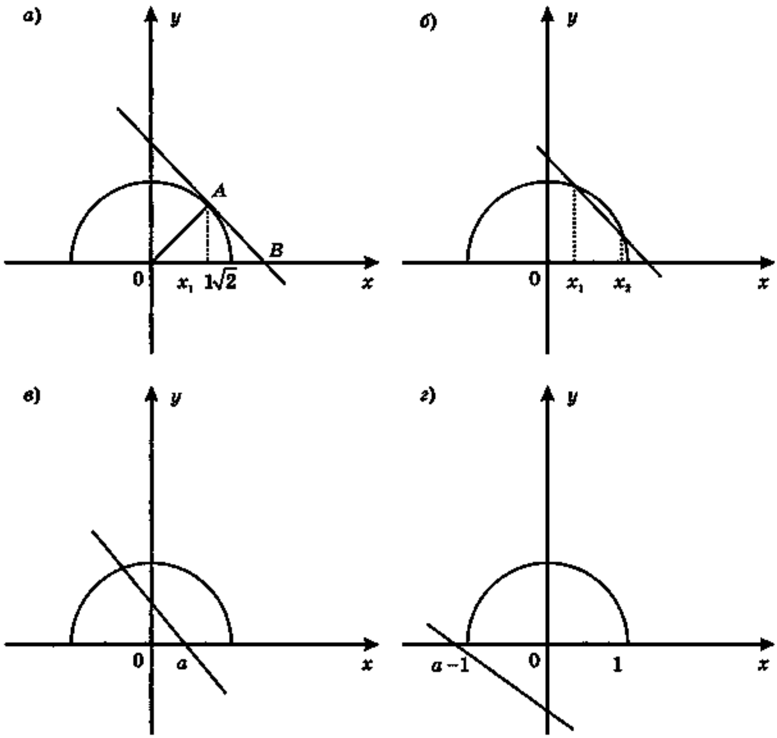
Возведем в квадрат обе части уравнения (3) и преобразуем его. $1 - x^2 = (a - x)^2$, $2x^2 - 2x + a^2 - 1 = 0$ (4). Найдем дискриминант этого уравнения $D_1 = a^2 - 2a^2 + 2 = 2 - a^2$. Если $D_1 < 0$, т. е. при $|a| > \sqrt{2}$, уравнение (4), а с ним и исходное уравнение (3) решений не имеют. Если $|a| < \sqrt{2}$, то квадратное уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}$,

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2}. \quad (5)$$

Если $a = \sqrt{2}$, то уравнение имеет один корень: $x = \sqrt{-\frac{1}{2}}$, если $a = -\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Теперь нужно выяснить, какие из найденных корней уравнения (4) будут корнями уравнения (3). Ответ будет зависеть от того, в какой области находится параметр a. Для отбора корней воспользуемся геометрическими соображениями.

Изобразим на координатной плоскости графики функций $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = a - x$. Первый график представляет собой полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1, так как его точки $(x; y)$ удовлетворяют условиям $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$. График второй функции — прямая линия, пересекающая ось OX в точке с абсциссой a. При изменении параметра полуокружность остается на месте, а прямая перемещается, оставаясь параллельной одному и тому же направлению, образующему с положительным направлением оси OX угол 135°.



На рис. *а* из ΔOAB ($\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$) находим, что $OB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $OX_1 = OA \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$. Итак, прямая $y = a - x$ касается полуокружности при $a = \sqrt{2}$. Абсцисса точки касания $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ будет единственным решением исходного уравнения при $a = \sqrt{2}$. При $a > \sqrt{2}$ уравнение не будет иметь корней. При $1 \leqslant a < \sqrt{2}$ полуокружность и прямая пересекаются в двух точках (рис. *б*). Абсциссы точек пересечения x_1 и x_2 и являются решениями исходного уравнения.

Если параметр a принадлежит промежутку $-1 \leqslant a < 1$, то графики имеют единственную точку пересечения с абсциссой x_1 (рис. *в*). При $a < -1$ уравнение решений не имеет (рис. *г*). Чтобы получить более строгое обоснование полученного решения, нужно рассмотреть соответствующие неравенства.

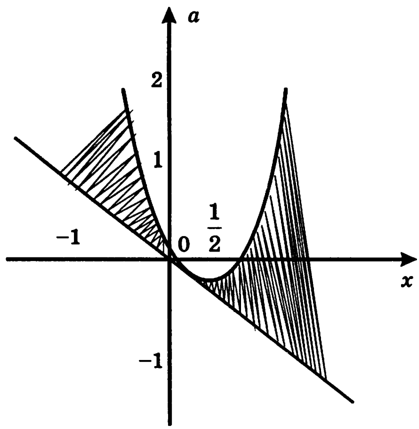
Ответ:

при $a > \sqrt{2}$ и $a < -1$ решений нет; при $a = \sqrt{2}$ единственное решение $\sqrt{\frac{1}{2}}$; при $1 < a < 2$ два корня $x_1 = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, $x_2 = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$; при $-1 \leqslant a < 1$ $x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$.

III **При любом значении параметра a решите неравенство $\log_x^2 (x+a) < 1$.** **(6)**

Решение

Рассмотрим плоскость $(x; a)$ и изобразим на ней множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству. Сначала изобразим плоскость, для точек которой имеет смысл $\log_x{}^2 (x+a)$. Это будет полуплоскость $x + a > 0$ $a > -x$ (правее и выше прямой $x + a = 0$), из которой удалены части прямых $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Вне полосы, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = -1$, будет $x^2 > 1$, и неравенство (6) можно пропотенцировать $x + a < x^2$ (внутри полосы $x^2 < 1$, тогда оно примет вид $x + a > x^2$), $a < x^2 - x$. Строим график функции $a = x^2 - x$. Точки пересечения с осью x : (0; 0), (1; 0), вершина $O^I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Парабола $a = x^2 - x$ касается прямой $a = -x$. Решения уравнения $x^2 - x - a = 0$ будут $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Ось a точками -1; $-\frac{1}{4}$; 0; 1; 2 разбита на 6 участков, на каждом из которых можно изобразить решение нашего неравенства. Для этого берем значение a на соответствующем участке, проводим горизонтальную прямую, находим значения X, соответствующие концам отрезков этой прямой, попавших в заштрихованную зону.



Например: если $-1 < a < -\frac{1}{4}$, то получаем отрезки, концы первого $x = -a$ и $x = -1$, концы второго $x = -1$ и $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

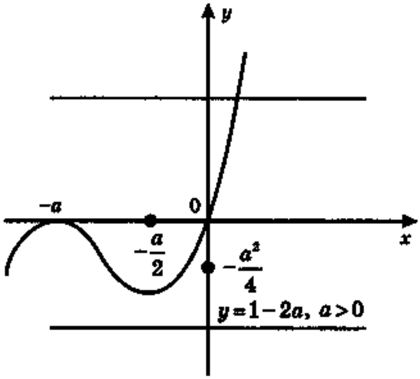
Ответ:

если $a = 0$, то $x > 1$; если $a > 0$, то $-a < x < \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $1 < x < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$, то $-a < x < \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} < x < 1$; если $-1 \leqslant a < \frac{1}{4}$, то $-a < x < 1$ и $1 < x < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a < -1$, то $-a < x < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

IV **Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x\,|x+a| = 1 - 2a$ имеет единственное решение. (7)**

Решение

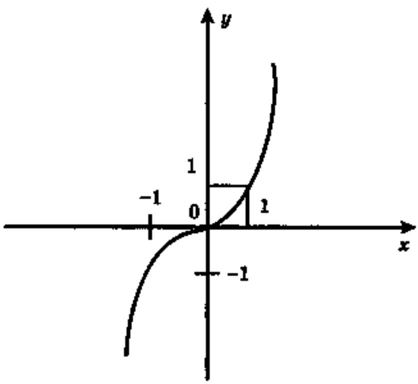
Графически решение задачи сводится к нахождению значений a, при которых графики уравнений $y = x\,|x+a|$ и $y = 1 - 2a$ имеют единственную точку пересечения. Рассмотрим три случая: А. $a > 0$; Б. $a = 0$; В. $a < 0$.



А. $a > 0$ при $x \geqslant -a$, $y = x\,|x + a| = x^2 + ax$; при $x < -a$, $y = -x^2 - ax$.

Прямая $y = 1 - 2a$ $(a > 0)$ имеет единственную точку пересечения с графиком $y = x\,|x + a|$, если $1 - 2a < -\dfrac{a}{4}$ или $1 - 2a > 0$, т. е.

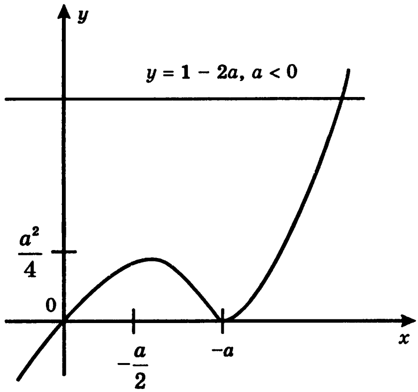
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-8a+4<0,\\ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}1-2a>0,\\ a>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-2\sqrt{3}<a<4+2\sqrt{3},\\ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a<\dfrac{1}{2},\\ a>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}0<a<4+2\sqrt{3},\\ 0<a<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$



Б. $a = 0$. При этом $x\,|x + a| = x\,|x|$ и график имеет вид, представленный на рисунке.

Прямая $y = 1$ пересекает график $y = x\,|x|$ в единственной точке $x = 1$.

В. $a < 0$. График $y = x\,|\,x\,|$ имеет вид, представленный на рисунке.



При $\begin{cases} 1-2a<0, \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При $\begin{cases} 1-2a>\frac{a^2}{4}, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+8a-4<0, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4-2\sqrt{5}<a<-4+2\sqrt{5}, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow -4-2\sqrt{5} < a < 0.$

Итак, при $-4-2\sqrt{5} < a < 0$ уравнение (7) имеет единственное решение. Объединим промежутки $0 < a < 1/2$, $0 < a < 4+2\sqrt{3}$, $-4-2\sqrt{5} < a < 0$ и $a = 0$, получим $-4-2\sqrt{5} < a < 4+2\sqrt{3}$.

Ответ:

Уравнение (7) имеет единственное решение при любых a, удовлетворяющих условию $-4-2\sqrt{5} < a < 4+2\sqrt{3}$.

V **Решите уравнение $\sqrt{x-a} = x-b$.** **(8)**

Решение

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x-b \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a, \\ x \geqslant b. \end{cases}$

Возведя обе части уравнения (8) в квадрат, получим:

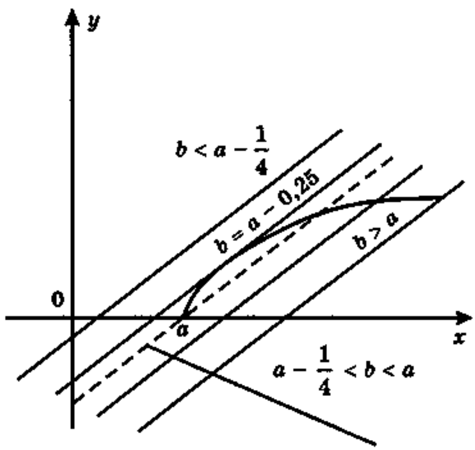
$$x^2 - (2b + 1)x + a + b^2 = 0 \tag{9}$$

$$D = (2b + 1)^2 - 4(a + b^2) = 4b - 4a + 1$$

При $D \geqslant 0$, т. е. при $b > a - \frac{1}{4}$, получим $x_1 = 0{,}5\left(2b + 1 - \sqrt{4b - 4a + 1}\right)$

$x_2 = 0{,}5\left(2b + 1 + \sqrt{4b - 4a + 1}\right)$, причем $x_2 > x_1$.

Чтобы выяснить, какой из найденных корней x_1 и x_2 уравнения (9) является корнем уравнения (8) при каком — то условии, построим графики функций $y = \sqrt{x - a}$ и $y = x - b$ (см. рисунок).



Абсциссы точек их пересечения являются корнями уравнения (8). Если $D = 0$, то графики имеют одну общую точку (касаются), тогда при $b = a - 0{,}25$

$x = b + 0{,}5$. При $a - 0{,}25 < b \leqslant a$ графики функций $y = \sqrt{x - a}$ и $y = x - b$ пересекаются в двух точках. Это значит, что при этих значениях a и b корни уравнения (9) являются корнями уравнения (2). При $b > a$ построенные графики имеют одну общую точку, решением служит x_2 $(x_2 > x_1)$.

Ответ:

при $b = a - 0{,}25$ $x = b + 0{,}5$; при $a - 0{,}25 < b \leqslant a$ $x = 0{,}5\left(2b + 1 \pm \sqrt{4b - 4a + 1}\right)$; при $b > a$ $x = 0{,}5\left(2b + 1 + \sqrt{4b - 4a + 1}\right)$; при $b < a - 0{,}25$ решений нет.

VI **Решите неравенство $|2x^2 + x - a - 8| \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4$**

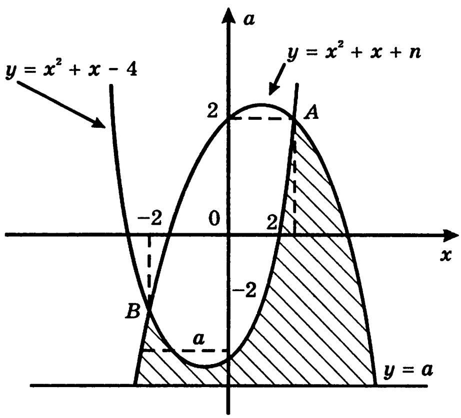
Решение

Известно, что $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$. Используем это в нашем случае.

$$-x^2 - 2x + 2a + 4 \leqslant 2x^2 + x - a - 8 \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant -x^2 + x + 4, \\ a \leqslant x^2 + x - 4. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости $(x; a)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе, для этого построим графики квадратных трехчленов $a = -x^2 + x + 4$ и $a = x^2 + x - 4$ и заштрихуем область, точки которой удовлетворяют полученной системе. При конкретном значении параметра $a = \alpha$ решением нашего неравенства будут абсциссы тех точек горизонтальной прямой $a = \alpha$, которые находятся в заштрихованной области. Найдем точки пересечения парабол:

$$-x^2 + x + 4 = x^2 + x - 4,\ 2x^2 = 8;\ x = \pm 2,\ a_1 = (-2)^2 - 2 - 4 = -2$$
$$a_2 = 2^2 + 2 - 4 = 2$$



Получили точки $A\ (2; 2)$, $B\ (-2; 2)$. Вершина C параболы $a = x^2 + x - 4$ имеет координаты $m = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$; $n = a\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} - 4 = -4{,}25.$

Тогда $C\ (-0{,}5; -4{,}25)$. По рисунку 11 видно, что при $a > 2$ решений нет. Горизонтальная прямая не пересекается с заштрихованной областью. Если $-2 < a \leqslant 2$, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью по отрезку. Концами этого отрезка будут точки с абсциссами $\dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{17 + 4a}\right)$ (больший корень уравнения $a = x^2 + x - 4$ или $x^2 + x - 4 - a = 0$) и $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17-4a}\right)$ (больший корень уравнения $a = -x^2 + x + 4$ или $x^2 - x - 4 + a = 0$).

Если $-4{,}25 \leqslant a \leqslant -2$, то горизонтальная прямая, соответствующая таким a, пересекается с заштрихованной областью по двум отрезкам. Решением неравенства будет:

$$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17-4a}\right) \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17+4a}\right),$$

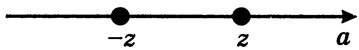
$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17+4a}\right) \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17-4a}\right).$$

Если $a < 4\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17-4a}\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17-4a}\right)$.

VIII **При каких значениях действительного параметра a урав нение $|3^x - a| + |3^x + a| = 2$ имеет бесконечно много решений.**

Решение

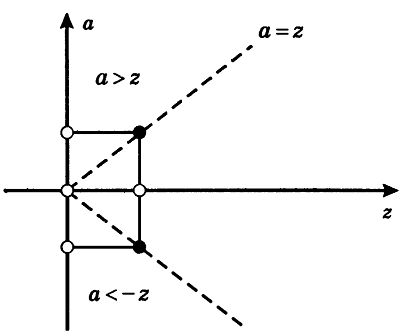
Обозначим $3^x = z$, $(z > 0)$. Тогда исходное уравнение примет вид: $|z - a| + |z + a| = 2$.



Возможны следующие три случая:

1) $a < -z$, тогда $z - a - z - a = 2$; 2) $-z \leqslant a \leqslant z$, $z - a + z + a = 2$; $z = 1$.

3) $a \geqslant z$, $a - z + z + a = 2$; $a = 1$. Изобразим на координатной плоскости $(z; a)$ множество $\begin{cases} |z-a|+|z+a|=2, \\ z>2. \end{cases}$



Уравнение $|z-a|+|z+a|=2$ имеет бесконечно много решений при $a=\pm 1$, и, следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений при тех же значениях параметра a.

Ответ:

$a=\pm 1$.

Дидактические материалы

А. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

1. $x|x-2a|=1+a$;

2. $x|x+2a|+1-a=0$;

3. Решите уравнение $\sqrt{x+a}=x-b$.

Б. 1. Решите уравнение $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt{x+2}=2x+a$ имеет решение?

3. Решите неравенство $|x-4|>ax$.

В. 1. Решите неравенство $x-b>\sqrt{x+a}$;

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|3-|x||-|x-5|=a$ имеет бесконечное множество решений.

3. Решите уравнение $a^{2x-3}-a^{2x-2}+a^{30,(0)x}=b$, где $a>0$.

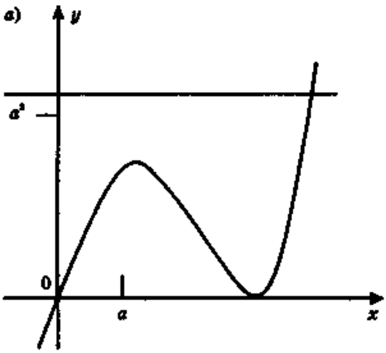
Ответы и решения:

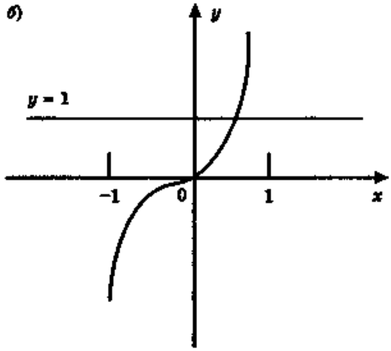
А. 1. $-1<a<0,5\left(\sqrt{5}+1\right)$.

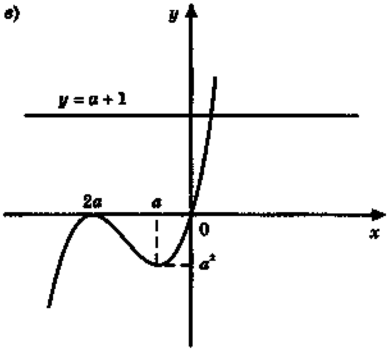
Решение

Рассмотрим три случая: а) $a>0$ при $x\leqslant 2a$

$x|x-2a|=x(2a-x)$, и при $x\geqslant 2a$ $x|x-2a|=x(x-2a)$. Отсюда, при $a>0$ график $y=x|x-2a|$ имеет вид, представленный на рисунке a.







Прямая $y = a + 1$ $(a > 0)$ имеет единственную точку пересечения с графиком $y = x\,|\,x - 2a\,|$, если $a + 1 > a^2$, т. е. $\begin{cases} a^2 - a - 1 < 0, \\ a > 0, \end{cases}$ что приводит к решению $0 < a < 0{,}5\left(1 + \sqrt{5}\right)$.

б) $a = 0$. При этом $x\,|\,x - 2a\,| = x\,|\,x\,|$ и график $y = x\,|\,x - 2a\,|$ имеет вид, представленный на рисунке *б*. Прямая $y = 1$ пересекает график $y = x\,|\,x\,|$ в единственной точке $x = 1$.

в) $a < 0$.

График $y = x\,|\,x - 2a\,|$ имеет вид, представленный на рисунке *в*.

При $\begin{cases} a + 1 > 0, \\ a < 0, \end{cases}$ т. е. при $-1 < a < 0$, данное в условии уравнение имеет единственное решение, при $a + 1 < -a^2$ решения нет, так как неравенство $a^2 + a + 1 < 0$ не имеет решения.

2. $a < 0{,}5\left(\sqrt{5} - 1\right)$, $a > 1$.

3. При $-a-0{,}25 \leqslant b \leqslant -a$ $x = b + 0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{4b+4a+1}$: при $b < -a - 0{,}25$ корней нет; при $b > -a$ $x = b + 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{4b+4a+1}$.

Б. 1. При $a \geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3x} = 0{,}5\left(2a^2 + 4 - a\sqrt{3\ \ ^2+16}\right)$.

2. При $a \leqslant \dfrac{41}{8}$.

3. При $a \geqslant 1$ $x \in \left[0; \dfrac{4}{a} + 1\right)$;

при $0 < a < 1$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{a} + 1\right) \cup \left(\dfrac{4}{(a-1)}; +\infty\right)$

при $a < -1$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{(a+1)}\right)$; при $-1 \leqslant a < 0$ $x \in R$; при $a = 0$ x — любое действительное число, кроме $x = 4$.

В. 1. При $b < -a - 0{,}25$ $x \geqslant -a$; при $-a - 0{,}25 < b < -a$ $x \in \left(-a; b + 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{4b+4a+1} + 1\right) \cup \left(b + 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{4a+4b+1}; +\infty\right)$;

при $b \geqslant -a$ $x \in \left(b + 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{4b+4a+1}; +\infty\right)$.

2. При $a = 2$ $x \in [5; +\infty)$; при $a = -2$ $x \in [0; 3]$.

Указание: Постройте график $y = |3 - |x|| - |x - 5|$ в системе $x0y$.

3. При $a > 0$ (a не равняется 1), $b > 0$ $x = 0{,}5\left(\dfrac{\log_a b}{(a^3 - a + 1)} + 3\right)$;

при $a = b = 1$ x — любое действительное число;

при $a = 1$, $b \neq 1$ и при $b < 0$ решений нет.

Решение

$a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{30,(6)x} = b$, где $a > 0$.

При $a = b = 1$ x — любое действительное число;

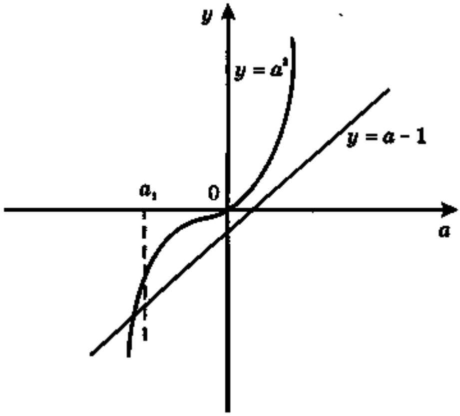
при $a = 1$, $(b \neq 1)$ решения нет.

Учитывая, что $0,(6) = \dfrac{2}{3}$ приведем данное уравнение к виду:

$a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{2x} = b$ или $a^{2x-3}(a^3 - a + 1) = b$. (*)

Для нахождения корней уравнения (*) нужно обе части разделить на $(a^3 - a + 1)$.

Но в этом случае необходимо раньше выяснить, не может ли $a^3 - a + 1$ равняться нулю при $a > 0$ $(a \neq 1)$.



Для этого найдем решение уравнения $a^3 - a + 1 = 0$ или $a^3 = a - 1$. Решаем это уравнение графически: строим графики функций $y = a^3$ и $y = a - 1$ (в прямоугольной системе координат $A0Y$). Заметим, что решением уравнения является точка, расположенная на отрицательной полуоси абсцисс.

При $a > 0$ имеем: $a^3 > a - 1$, т. е. $a^3 - a + 1 > 0$. Учитывая, что $a^{2x-3} > 0$, приходим к заключению, что в уравнении (*) $b > 0$. Итак, при $a > 0$ $(a \neq 1)$, $b > 0$ уравнение (*) равносильно уравнению $a^{2x-3} = \dfrac{b}{a^3 - a + 1}$.

Отсюда $x = 0{,}5\left(\log_a \dfrac{b}{a^3 - a + 1} + 3\right)$.

§ 9. Решение уравнений и неравенств при некоторых начальных условиях

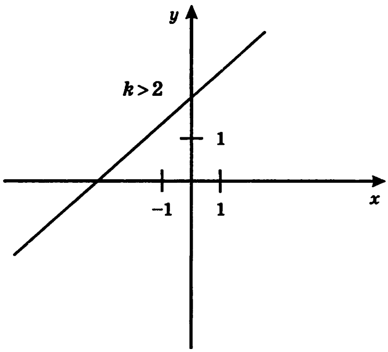
На экзаменах часто встречаются задачи, в которых требуется «найти все значения параметра, при каждом из которых выполнено некоторое условие», например, чтобы среди решений уравнения или неравенства содержалось заданное множество. В таких ситуациях можно решить это уравнение или неравенство для каждого допустимого значения параметра, а затем отобрать значения параметра, при которых выполнено требуемое условие.

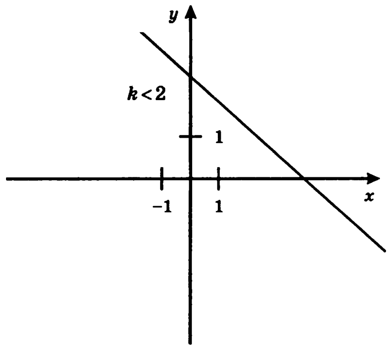
I **При каких значениях k неравенство $(k-2)x+3k-1>0$ верно при всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$?**

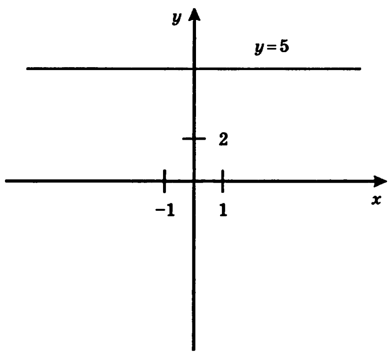
Решение

Рассмотрим функцию:

$f(x)=(k-2)x+3k-1$, $f(x)$ — линейная функция при любом действительном значении k, графиком ее служит прямая.







Из рисунка видно, что для выполнения исходного неравенства на всем отрезке $[-1;\ 1]$ достаточно условия:

$$\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+1>0, \\ 4k-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>-\dfrac{1}{2}, \\ k>\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow k>\frac{3}{4}.$$

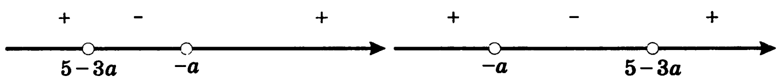
Ответ:

$k > \frac{3}{4}$.

При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x+3a-5}{x+a} > 0$ выполняется при всех $1 \leqslant x \leqslant 4$?

Решение

Задача заключается в нахождении таких значений a, при каждом из которых множество решений неравенства содержит промежуток $1 \leqslant x \leqslant 4$. Решим данное неравенство методом интервалов. Для этого надо нанести на ось x точки $x = 5 - 3a$ и $x = -a$. В зависимости от того, каким может быть число a, эти точки будут по-разному располагаться на оси x, а в зависимости от этого будут по-разному записываться и решения неравенства. Для сравнения $5 - 3a$ и $-a$ найдем их разность: $5 - 3a - (-a) = 5 - 2a$. Если $5 - 3a > a$, то $5 - 2a > 0$, $a < 2{,}5$. Если $5 - 3a < -a$, то $5 - 2a < 0$, $a > 2{,}5$.



Если $a < 2{,}5$, то множествам решений является интервал $5 - 3a < x < -a$.

Если $a > 2{,}5$, то множествам решений является интервал $-a < x < 5 - 3a$.

Если $a = 2{,}5$, то имеем неравенство $\frac{x+2{,}5}{x+2{,}5} > 0$, которое выполняется при любом x.

В случае $a < 2{,}5$ множество решений содержит отрезок $1 \leqslant x \leqslant 4$, когда $5 - 3a < 1$ и $-a > 4$, т. е. $a > \frac{4}{3}$ и $a < -4$. Учитывая условие $a < 2{,}5$, имеем $\frac{4}{3} < a < 2{,}5$ и $a < -4$.

В случае $a > 2{,}5$ получаем неравенства $a > -1$ и $a < \frac{1}{3}$, которые при рассмотрении с неравенством $a > 2{,}5$ дадут решение $a > 2{,}5$. Объединяя решения $\frac{4}{3} < a < 2{,}5$, $a = 2{,}5$, $a > 2{,}5$ и $a < -4$, получим $a > \frac{4}{3}$ и $a < -4$.

Ответ:

$a > \frac{4}{3}$ и $a < -4$.

III **Найдите все значения параметра a, при каждом из кото рых неравенство $(a-2)x^2-(a+1)x+a+3>0$ выполняется при всех действительных x**

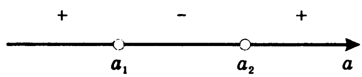
Решение

При $a = 2$ исходное неравенство примет вид $-3x + 5 > 0$. Множество его решений — интервал $x < \frac{5}{3}$. Оно содержит не все действительные числа, так что $a = 2$ не отвечает условию задачи.

Если $a < 2$, то коэффициент при x^2 в квадратном трехчлене в правой части исходного неравенства отрицателен. Поэтому трехчлен либо вообще не принимает положительных значений, либо его положительные значения являются значениями в точках интервала между его корнями. В любом случае найдется точка, в которой этот трехчлен принимает отрицательные значения. Следовательно, ни одно из значений a, удовлетворяющих неравенству $a < 1$, не отвечает условию задачи.

При $a > 2$ исходное неравенство выполняется при всех действительных числах тогда, когда его дискриминант $D = (a+1)^2 - 4(a+3)(a-2) = -3a^2 + 2a - 25 > 0$. Решаем неравенство $3a^2 + 2a - 25 > 0$ методом интервалов.

$D_1 = 1 + 75 = 76$ $a_1 = \dfrac{\left(-1-2\sqrt{19}\right)}{3}$;



$a_2 = \dfrac{\left(-1+2\sqrt{19}\right)}{3}$;

$a < a_1$ и $a > a_2$. Из этих чисел в области $a > 2$ содержатся только $a > a_2$. Это и есть искомые значения параметра.

Ответ:

$a > \dfrac{\left(-1+2\sqrt{19}\right)}{3}$.

IV **Найдите все пары чисел p и g, при которых неравенство $|x^2+px+g|>2$ не имеет решений на отрезке [1, 5].**

Решение

Мы можем найти все значения p и g, для которых неравенство $|x^2 + px + g| < 2$ выполняется при всех $x \in [1; 5]$. Пусть $f(x) = x^2 + px + g$, тогда $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$ абсцисса вершины параболы $x_b = -\frac{p}{2}$. Пользуясь свойствами монотонности функции f, получаем, что пара $(p; g)$ удовлетворяет условию задачи тогда, когда она является решением совокупности из трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x_в < 1, \\ f(1) \geqslant -2, \\ f(5) \leqslant 2 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x_в > 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \geqslant -2 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} 1 \leqslant x_в \leqslant 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \leqslant 2, \\ f(x_в) \geqslant -2 \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \begin{cases} -\frac{p}{2} < 1, \\ p + g \geqslant -3, \\ 5p + g \leqslant -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 2, \\ g \geqslant -5, \\ 10 - 5 \leqslant 5p + g \leqslant -23 \end{cases}$$

Система несовместима, нет смысла.

$$(2) \begin{cases} -\frac{p}{2} > 5, \\ p + g \leqslant 1, \\ 5p + g \geqslant -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < -10, \\ g \leqslant -9, \text{ система несовместима,} \\ -27 \leqslant 5p + g \leqslant -50 - 9 \text{ нет смысла.} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 1 \leqslant -\frac{p}{2} \leqslant 5, \\ p + g \leqslant 1, \\ 5p + g \leqslant -23, \\ \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + g \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leqslant p \leqslant -2, \\ p + g \leqslant 1, \\ 5p + g \leqslant -23, \\ -\frac{p^2}{4} + g \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad p = -6,\ g = 7.$$

Ответ:

$p = -6$, $g = 7$.

Найдите все значения p, при которых неравенство $\log_{(x\quad p)} x^2 < 2$ выполняется хотя бы для одного числа x, такого что $|x| < 0{,}01$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x-p < 1,\\ x^2 > (x-p)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-p > 1,\\ 0 < x^2 < (x-p)^2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x-p < 1,\\ |x| > x-p;\end{cases}\\ \begin{cases}x-p > 1,\\ 0 < |x| < x-p.\end{cases}\end{array}\right.$$

При $|x| < 0{,}01$ неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x| < 0{,}01,\\ 0 < x-p < |x|;\end{cases}\\ \begin{cases}|x| < 0{,}01,\\ x-p > 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если при каком-то значении p система $\begin{cases}|x| < 0{,}01,\\ 0 < x-p < |x|\end{cases}$ имеет решение, то $-0{,}02 < x - |x| < p < x < 0{,}01$; наоборот, если p принадлежит интервалу $(-0{,}02;\ 0{,}01)$, то система имеет решение при всех таких p, кроме $p = 0$. Аналогично система $\begin{cases}x-p > 1\\ |x| < 0{,}01\end{cases}$ имеет решение тогда, когда $p < x - 1 < -0{,}99$.

Ответ:

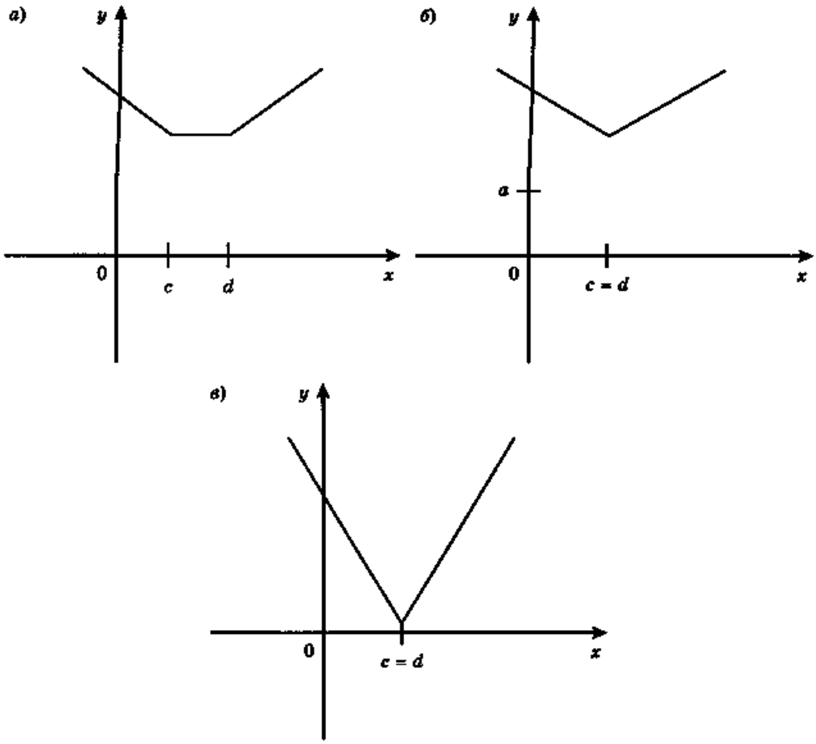
$(-\infty;\ -0{,}99) \cup (-0{,}02;\ 0) \cup (0;\ 0{,}01)$.

VI **При каких значениях параметров a и b уравнение $|x + \cos^2 4a - 2\sin a \cos^4 4a + |x + \sin^2 a| = b\left(a + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ имеет единственное решение?**

Решение

Рассмотрим функцию $f(x) = |x - c| + |x - d| + e$ (c, d, e — некоторые числа).

Не нарушая общности рассуждения, предположим $d > c > 0$, $e > 0$. График рассматриваемой функции схематично изображен на рисунке a.



Уравнение $f(x) = A$ имеет единственный корень при $c = d$ (рис. *б*). Потому для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело единственный корень, достаточно выполнения условия $c = d$ и $e = 0$ (рис. *в*).

Итак, для нахождения искомых значений параметров a и b достаточно решить систему:

$$\begin{cases} \sin^2 a = 2\sin a \cos^4 4a - \cos^2 4a, \\ b\left(a + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$\sin^2 a = 2\sin a \cos^4 4a - \cos^2 4a$. Добавим к обеим частям $\cos^8 4a$:

$\sin^2 a - 2\sin a \cos^4 4a + \cos^8 4 = \cos^8 4a - \cos^2 4a$. Тогда $(\sin a - \cos^4 a)^2 = \cos^8 4a - \cos^2 4a$. Правая часть полученного уравнения неположительная:

$\cos^8 4a - \cos^2 4a = \cos^2 4a(\cos^6 4a - 1) \leqslant 0$.

Значит, уравнение имеет решение лишь при

$$\begin{cases}\sin a = \cos^4 4a,\\ \cos 4a = 0\end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases}\sin a = \cos^4 4a,\\ \cos^6 4a = 1\end{cases}$$

Решение первой системы, с одной стороны, $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, а с другой — $a = \pi k$, но при целых k этого быть не может. Вторая система имеет решение $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi к$, k — целое число.

Тогда имеем:

$$\begin{cases}a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ b\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ b = 0;\end{cases}\\ \begin{cases}a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ a = \frac{-3\pi}{2},\\ b \text{ — любое.}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ:

b — любое действительное число.

VII **При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$?**

Решение

Можно найти корни уравнения и составить для них систему неравенств:

$$\begin{cases}1 \leqslant x_1 \leqslant 4,\\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 4.\end{cases}$$

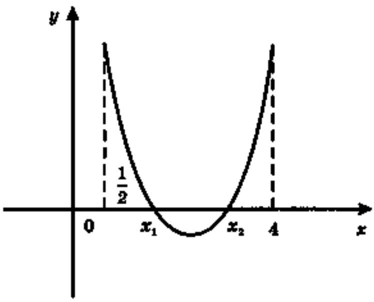
Технически эта задача будет довольно сложной, так как придется решать систему из четырех иррациональных неравенств. Поступим по-другому. Дело в том, что при работе с квадратным трехчленом многие выводы можно получить из графических соображений.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = ax^2 - 4x + a + 3$. Если $a > 0$, то ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

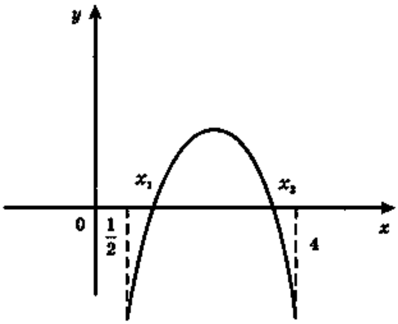
Чтобы оба корня уравнения принадлежали отрезку $\left[\frac{1}{2};4\right]$, нужно чтобы парабола располагалась так, как показано на рисунке *а*.

Этот случай описывается следующими условиями: $D \geqslant 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $f(4) > 0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ (слева от x_1 функция убывает), $f'(4) > 0$ (справа от x_2 функция возрастает); D — дискриминант квадратного трехчлена.

а)



б)



Если $a < 0$, то ветви параболы будут направлены вниз (рис. *б*). Здесь $D \geqslant 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(4) < 0, f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0, f'(4) < 0$. Для составления систем найдем предварительно $D = 16 - 4a(a+3) = 16 - 4a^2 - 12a = -4(a+4)(a-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + a + 3 = \frac{5}{4}a + 1$, $f(4) = 16a - 16 + a + 3 = 17a - 13$,

$f'(x) = 2ax - 4$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = a - 4$, $f'(4) = 8a - 4$.

Составим и решим первую систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ f(4) > 0, \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \\ f'(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ (a+4)(a-1) \leqslant 0, \\ \frac{5}{4}a + 1 > 0, \\ 17a - 13 > 0, \\ a - 4 < 0, \\ 8a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -4 \leqslant a \leqslant 1, \\ a > -\frac{4}{5}, \\ a > \frac{13}{17}, \\ a < 4, \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{13}{17} < a < 1.$$

Составим и решим вторую систему неравенств

$$\begin{cases} a<0, \\ D\geqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0, \\ f(4)<0, \\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0, \\ f'(4)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ (a+4)(a-1)\leqslant 0, \\ \dfrac{5}{4}a+1<0, \\ 17a-13<0, \\ a-4>0, \\ 8a-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ -4\leqslant a\leqslant 1, \\ a<-\dfrac{4}{5}, \\ a<\dfrac{13}{17}, \\ a>4, \\ a<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 4<a<-\frac{4}{5}.$$

не имеет смысла, система не совместна.

Мы еще не рассмотрели случай, когда $a = 0$. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $-4x + 3 = 0$, его корень $x = \dfrac{3}{4}$ принадлежит отрезку $\left[\dfrac{1}{2};4\right]$.

Ответ:

$a=0,\ \dfrac{13}{17}<a<1.$

VIII **Найдите все такие действительные значения параметра a, при которых множество значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2(x-1)-a\,|\,x\,|\,(x+2)\leqslant 0$, является промежутком числовой оси, конечным или бесконечным, т. е. если неравенство выполняется при $x=x_1$ и $x=x_2$, то оно выполняется и при $x_1\leqslant x\leqslant x$.**

Решение

Раскроем модуль, содержащийся в неравенстве.

а) $x=0$, $0\leqslant 0$ — верно, $x=0$ является решением неравенства.

б) $x<0$. $x^2(x-1)+ax(x+2)\leqslant 0 \Leftrightarrow x^3-x^2+ax^2+2ax\leqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2-(1-a)x+2a)\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2-(1-a)x+2a\geqslant 0$

$f(x)=x^2-(1-a)x+2a$. Чтобы квадратный трехчлен $f(x)$ был неотрицательным, дискриминант должен быть неположительным, т. е.

$D \leqslant 0$, $D = (1-a)^2 - 8a = a^2 - 10a + 1 \leqslant 0$. Либо при $x = 0$ $f(0) \geqslant 0$ и вершина находится справа от оси ординат, $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1-a}{2} > 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 10a + 1 \leqslant 0, \\ 2a \geqslant 0, \\ 1 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2\sqrt{6} \leqslant a \leqslant 5 + 2\sqrt{6}, \\ a \geqslant 0, \\ a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant a \leqslant 5 + 2\sqrt{6}.$$

в) При $x > 0$ неравенство принимает вид $x^2 - (1+a)\,x - 2a \leqslant 0$. При $0 \leqslant a \leqslant 5 + 2\sqrt{6}$ квадратный трехчлен $x^2 - (1+a)\,x - 2a$ отрицателен. Значит, он отрицателен на промежутке, содержащем $x = 0$.

Ответ:

$0 \leqslant a \leqslant 5 + 2\sqrt{6}$.

Дидактические материалы

А. 1. При каких значениях параметра a неравенство

$(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$ выполняется при всех $2 \leqslant x \leqslant 3$?

2. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x - \frac{a}{4}}{x - 2a} < 0$ выполняется при всех $2 \leqslant x \leqslant 4$?

3. При каких значениях параметра a неравенство $(x + 2a + 3)(x - a + 5) > 0$ выполняется при всех $x > 1$?

4. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x - 2a - 3}{x - a + 2} < 0$ выполняется при всех $1 \leqslant x \leqslant 2$?

Б. 1. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 2x + 2a - 1 < 0$ выполняется при всех $x \geqslant 1$?

2. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + (2a - 1)\,x + 1 - 3a < 0$ выполняется при всех $x \geqslant 2$?

3. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2 + x - 4a + 2 < 0$ следует неравенство $-2 < x < 0$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ выполняется при всех x.

5. Найдите все значения параметра с, при которых уравнение $\left|x^2 - 3x + 2\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right| = x^2 - 4x + c$ имеет ровно три различных решения.

В. 1. При каких значениях параметра a неравенство $-1 \leqslant \frac{ax^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 1$ выполняется при всех a?

2. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x-2}{ax^2 - 2x + a - 2} < 1$ выполняется при всех a?

3. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка [1; 5] удовлетворяют неравенству $3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0$.

4. При каких значениях параметра a число 1 лежит между корнями уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$?

5. При каких значениях параметра a число 1 больше любого из корней уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$?

Ответы:

А. 1. $a < -\frac{1}{3}$ и $a > 3$;

2. $2 < a < 8$;

3. $-2 \leqslant a \leqslant 6$;

4. $-\frac{1}{2} < a < 3$.

Б. 1. $a < -\frac{1}{2}$;

2. $a < 0$ и $a > \frac{1}{5}$;

3. $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Корни квадратного трехчлена в левой части: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2a-1}{a}$. Условию удовлетворяют такие $a > 0$, что $-2 \leqslant \frac{2a-1}{a} \leqslant 0$;

4. $a \geqslant 2$;

5. 4; $\frac{19}{4}$.

В. 1. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$;

2. $a < -\frac{3}{2}$ и $a > 1 + \sqrt{2}$. Знаменатель не равен нулю ни при каких x. Поэтому $1 - a^2 + 2a < 0$. Случаи $a > 0$ и $a < 0$ следует рассматривать отдельно.

3. $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$;

4. $a > 0$, $a < -4$;

5. $-4 < a < 0$.

§ 10. Решение систем с параметром

1 **При каких значениях параметра a система уравнений $a(x^4+1)=y+1-|x|$, $x^2+y^2=1$ имеет единственное решение?**

Решение

Поскольку левая и правая части первого уравнения, а также x^2+y^2 второго уравнения являются четными функциями относительно x, то если $(x_0; y_0)$ — решение системы, $(-x_0; -y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие $x=0$ — необходимое для существования единственного решения. Это условие не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида $(0; y_0)$ или вообще не иметь решений.

Пусть $x=0$. Тогда $\begin{cases} a=y+1, \\ y^2=1. \end{cases}$

Отсюда, $a=0$ или $a=2$.

Итак, искомые значения параметра надо выбрать во множестве $\{0; 2\}$. При $a=0$ получаем:

$\begin{cases} y+1-|x|=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} |x|=y+1, \\ y^2+2y+1+y^2=1, \end{cases}$

поэтому $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$

Нашлись три решения системы, значит, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. При $a=2$ получим:

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, $2x^4 + |x| \geqslant 0$.

Из первого уравнения имеем $y \geqslant 1$, из второго – $y \leqslant 1$. Следовательно, $y = 1$, значит $x = 0$. Проверка показывает, что пара (0; 1) — решение, а в силу ограничения для переменной y ($y \geqslant 1$ и $y \leqslant 1$) оно единственное.

Ответ:

$a = 2$.

II **При каких значениях b система $\begin{cases} 3x + 2by = 4, \\ -4bx + 5y = 2 \end{cases}$ имеет $x > 0$ и $y > 0$?**

Решение

Решая систему, находим: $x = \dfrac{20 - 4b}{15 + 8b^2} > 0$; $15 + 8b^2 > 0$;

$20 - 4b > 0$; $b < 5$.

$y = \dfrac{6 + 16b}{15 + 8b^2} > 0$; $6 + 16b > 0$; $b > -\dfrac{3}{8}$; $b \in \left(-\dfrac{3}{8}; 5\right)$.

Ответ:

$b \in \left(-\dfrac{3}{8}; 5\right)$.

III **При каком значении m система уравнений $\begin{cases} 2x + (m - 1)y = 3, \\ (m + 1)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?**

Решение

Система имеет бесконечное множество решений либо не имеет решений, если коэффициенты при x и y пропорциональны. Следовательно, $\dfrac{2}{m+1} = \dfrac{m-1}{4}$. Здесь $m + 1 \neq 0$. $m^2 - 1 = 8$; $m^2 = 9$; $m = \pm 3$.

$m = 3$, $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{-3}$, нет решений.

$m = -3$, $\frac{2}{-2} = \frac{-4}{4} = \frac{3}{-3}$ — бесконечное множество решений.

Ответ:

бесконечное множество решений при $m = -3$; нет решений при $m = 3$.

IV **Найдите все значения параметра a, при которых системы**

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases} \quad (2)$$

эквивалентны.

Решение

Система (1) состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными. Она имеет единственное решение, если $a = -2$ (коэффициенты при x и y первого и второго уравнений непропорциональны).

При $a = -2$ система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -x - 2y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4, \\ -4x + 2y = 10, \end{cases}$$

нет решений.

Система (2) при $a = -2$ становится такой:

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение содержит квадратный трехчлен относительно x:

$2x^2 - 11x + 24$. Его дискриминант отрицателен, поэтому второе уравнение решений не имеет.

Таким образом, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \neq -2$. В этом случае первая система имеет единственное решение, поэтому для эквивалентности систем (1) и (2) необходимо, чтобы и вторая система имела единственное решение. (Достаточным условием их эквивалентности будет совпадение решений.)

Если $(x_0; y_0)$ — решение системы (2), то $(x_0; -y_0)$ — также решение в силу четности по y левых частей уравнений системы. (Правые части равны нулю.) Поэтому $y = 0$ является необходимым для существования единственного решения системы (2). При $y = 0$ вторая система примет вид:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a^2 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$a_1 = 1$; $a_2 = 3$ или $a_3 = -1$, $a_4 = 1$. Итак, искомое значение параметра a, если оно существует, принадлежит множеству $\{-1; 1; 3\}$. При $a = -1$ система (1) такова:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

Система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Поскольку решения систем совпали, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи. При $a = 1$ система (1):

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - 1, \\ -x + y = 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1, \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0, \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

При $a = 1$ система (2):

$$\begin{cases} x^2 + y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 8x + 12 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым, получим: $2y^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение системы: $x^2 - 4x + 3 = 0$. $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. Итак, получаем два решения $(1; 0)$ и $(3; 0)$, значит, $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 3$ система (1):

$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ -x + 3y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -16, \\ x = -1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{16}{5}, \\ x = \dfrac{27}{5}. \end{cases}$$

Подстановкой убеждаемся, что это решение не удовлетворяет системе (2).

Ответ:

$a = -2$ или $a = -1$.

V **Найдите все пары значений a и b, для которых система**
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$
имеет не менее пяти решений (x, y).

Решение

$x^2 - y^2 = a(x + y) = x - y + a \geqslant x^2 - y^2 + a(x + y - 1) - (x - y) = 0,$

$(x - y)(x + y - 1) + a(x + y - 1) = (x + y - 1)(x - y + a) = 0.$

Тогда получим две системы:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y + a = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0. \end{cases}$$

Хотя бы одна из этих систем имеет не менее трех решений. Пусть это первая система. Выразим $y = 1 - x$ из первого уравнения и подставим во второе.

$x^2 + (1 - x)^2 + bx(1 - x) - 1 = 0,$

$x^2 + x^2 - 2x + 1 + bx - bx^2 - 1 = 0,$

$x^2(2 - b) + x(b - 2) = 0.$

Получим квадратное уравнение, имеющее не менее трех корней (каждому значению x соответствует единственное значение y). Следовательно, это уравнение, равное нулю, тождественно, то есть $b = 2$, a — любое.

Пусть вторая система имеет не менее трех решений, аналогичными рассуждениями приходим к системе.

$$\begin{cases} y = x + a, \\ (b+2)\,x^2 + a\,(b+2)\,x + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение квадратное, так как оно имеет не менее трех корней, должно тождественно равняться нулю, откуда $b = -2$, $a = \pm 1$.

Ответ:

a — любое, $b = 2$; $a = \pm 1$, $b = -2$.

VI **Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y^2 - x^2 - ay - ax + \dfrac{y}{a} - \dfrac{x}{a} - 1 = 0 \end{cases}$ имеет решение.**

Решение

Разложим на множители левую часть второго уравнения системы.

$$y^2 - x^2 - ay - ax + \frac{y}{a} - \frac{x}{a} - 1 = (y - x)(y + x) - a\,(y + x) + \frac{1}{a}\,(y - x) -$$

$$- 1 = (y - x)\left(y + x + \frac{1}{a}\right) - a\left(y + x + \frac{1}{a}\right) = (y - x - a)\left(y + x + \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Поэтому данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + a; \end{cases} \\ \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y + x + \dfrac{1}{a} = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 1 = x + a, \\ y = x^2 + 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{a} = 0, \\ y = x^2 + 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

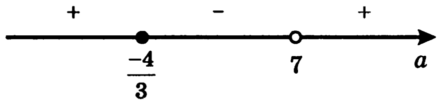
Решаем первое уравнение первой системы: $x^2 - x + (1 - a) = 0$. Оно имеет решение, если $D \geqslant 0$:

$$D = 1 - 4\,(1 - a) = 4a - 3 \geqslant 0,\ a \geqslant \frac{3}{4}.$$

Решаем первое уравнение второй системы:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{a} = 0 \qquad D = 1 - 4\left(1 + \frac{1}{a}\right) = -3 - \frac{4}{a} \geqslant 0$$

$\dfrac{4}{a}+3\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4+3a)}{a}\leqslant 0$



Решением неравенства является интервал $a \in \left[\dfrac{-4}{3};0\right)$.

Ответ:

$a \in \left[\dfrac{-4}{3};0\right) \cup \left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

VIII **Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}(x-2a+1)^2+y^2=a^2,\\ y^2=2x\end{cases}$ имеет четыре различных решения.**

Решение

Уравнение примет вид: $(x-2a+1)^2+2x=a^2 \Leftrightarrow x^2-4ax+4a^2+2x-$ $-4a+1+2x-a^2=0 \Leftrightarrow x^2+4\,(1-a)\,x+3a^2-4a+1=0$.

Чтобы система имела четыре различных решения, нужно, чтобы последнее уравнение имело два различных положительных корня. Это возможно при условии: $D_1>0$, $x+x_2=-P>0$, $x_1x_2=Q>0$.

$D_1=(2-2a)^2-(3a^2-4a+1)=4-8a+4a^2-3a^2+4a-1=a^2-4a+3=$ $=(a-1)\,(a-3)>0$, $x_1-x_2=4\,(a-1)>0$; $x_1\cdot x_2=3a^2-4a+1>0$.

$x_1+x_2=4\,(a-1)>0$

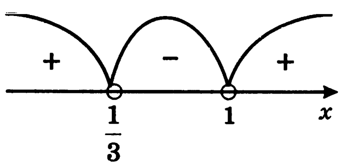
Составляем систему:

$$\begin{cases}(a-1)\,(a-3)>0,\\ a-1>0,\\ 3a^2-4a+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<1 \text{ или } a>3,\\ a>1,\\ a>1 \text{ или } a<\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a>3.$$

Решим неравенство $3a^2-4a+1>0$ методом интервалов.

$3a^2-4a+1=0$

$a=\dfrac{2\pm\sqrt{1}}{3}$; $a=1$; $a=\dfrac{1}{3}$



$a<\dfrac{1}{3}$ или $a>1$

Ответ:

$a>3$.

VIII **Найдите все такие c, что при любом b система**
$$\begin{cases}(1+3x^2)^c+(b^2-4b+5)^y=2,\\ x^2y^2-(2-b)\,xy+c^2+2c=3\end{cases}$$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение

Данная система должна иметь хотя бы одно решение при любом b, а значит, и при $b = 2$. В этом случае

$$\begin{cases}(1+3x^2)^c=1,\\ x^2y^2+c^2+2c=3.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}x=0,\\ c^2+2c=3\end{cases}$ или $\begin{cases}c=0,\\ x^2y^2=3.\end{cases}$

Круг «подозреваемых» значений для переменной с сузился до множества $\{-3;\ 0;\ 1\}$.

При $c = -3$ получаем:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)^3+\left(b^2-4b+5\right)^y=2,\\ x^2y^2-\left(2-b\right)xy=0.\end{cases}$$

Эта система имеет решение (0; 0) при любом b.

При $c = 0$ $\begin{cases}x^2y^2-\ \left(2-b\right)xy=3,\\ \left(b^2-4b+5\right)^y=1.\end{cases}$

Если $b \neq 2$, то решение первого уравнения $x^2y^2 - (2 - b)\,xy = 3$ $y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению. Но по условию система должна иметь решение при любых a, значит, $c = 0$ нужно исключить из списка «подозреваемых».

При $c = 1$

$$\begin{cases}3x^2+(b^2-4b+5)^y=1.\\ x^2y^2-(2-b)\,xy=0.\end{cases}$$

Эта система имеет решение (0; 0) при любом b.

Ответ:

$c = 1$ или $c = -3$.

При решении системы иногда требуется определить значения параметра, при которых система уравнений имеет единственное решение. Используя особенности системы (четность неизвестных), по одному решению мы конструируем другое, затем приравниваем их друг другу, в результате получаем тот вид, который должно иметь решение системы, если оно единственно.

IX **При каких значениях параметра a система**

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)\,x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)\,y+a^2-3=x \end{cases}$$

имеет единственное решение (x, y)?

Решение

Из системы видно, что если она имеет решение $x = m$, $y = n$, то она имеет решение $x = n$, $y = m$. Следовательно, должно иметь место равенство $m = n$ или $x = y$.

Приходим к уравнению $x^2 - (2a + 1)\,x + a^2 - 3 = x$, $x^2 - 2\,(a + 1)\,x + a^2 - 3 = 0$, которое должно иметь единственное решение.

Таким образом, $D_1 = (a + 1)^2 - (a^2 - 3) = 2a + 4 = 0$, $a = -2$.

Пусть теперь $a = -2$, имеем систему

$$\begin{cases} x^2+3x+1=y, \\ y^2+3y+1=x. \end{cases}$$

Вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем $(x - y)\,(x + y + 4) = 0$.

Возникают два случая:

1. $x = y = -1$:

2. $x + y + 4 = 0$, $\qquad y = -x - 4$.

Заменяя y в первом уравнении, получаем $x^2 + 4x + 5 = 0$. Это уравнение не имеет решений.

Ответ:

$a = -2$.

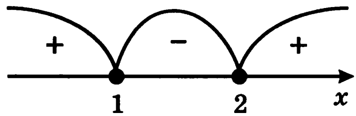
X **Решите систему неравенств**

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \\ ax^2 - 2(a+1)x + a - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$ **при каждом значении параметра a.**

Решение

Решаем методом интервалов первое неравенство системы:

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$



$1 \leqslant x \leqslant 2$ — решение первого неравенства.

Если $a = 0$, то второе неравенство примет вид: $-2x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$, и система $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x0 \leqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$ не имеет решений.

Если $a \neq 0$, то задача сводится к выяснению расположения корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + a - 1$ относительно отрезка $[1; 2]$. Находим $D_1 = (a+1)^2 - a(a-1) = 3a + 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = a - 5$.

Область изменения параметра a оказалась разделенной на 4 части (не считая граничных точек).

1. Если $a < -\frac{1}{3}$, второе неравенство, а следовательно, и данная система не имеют решения.

2. Если $a = -\frac{1}{3}$, то $D = 0$, и неравенство примет вид

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2 \cdot 2}{3}x - \frac{1}{3} - 1 \geqslant 0 \,|\cdot(-3), \quad x^2 + 4x + 4 \leqslant 0, \quad (x+2)^2 \leqslant 0,$$

$x = -2 \notin [1; 2]$. Значит, при $a = -\frac{1}{3}$ система не имеет решений.

3. Если $-\frac{1}{3} < a < 0$, то $f(1) < 0$, $f(2) < 0$. Для вершины параболы выполняется неравенство $x_в = \frac{a+1}{a} < 0$ (рис. a).

Следовательно, множество решений второго неравенства не содержит точек отрезка $[1; 2]$. Система не имеет решения.

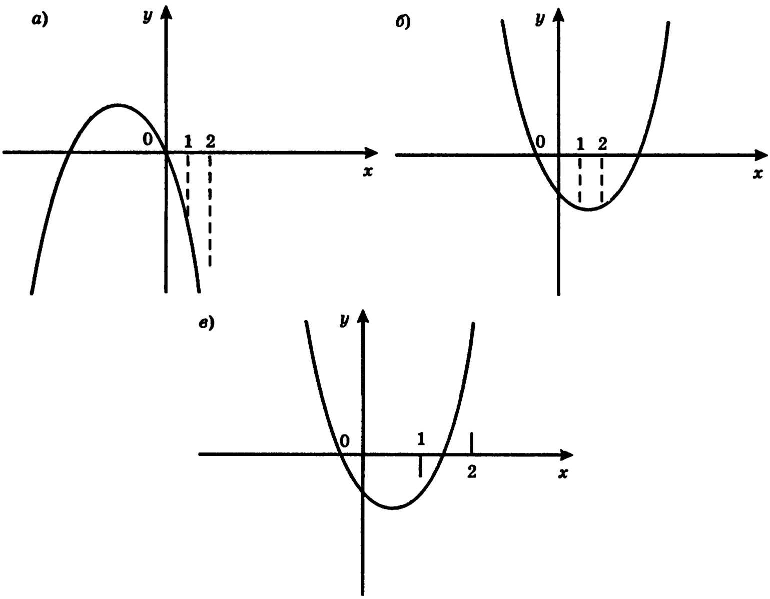
4. Если $0 < a < 5$, то $f(1) < 0$, $f(2) < 0$ (рис. *б*). Значит, на всем отрезке $[1; 2]$ $f(x) < 0$. Система снова не имеет решения.

5. Если $a \geqslant 5$, то $f(1) < 0$, $f(2) \geqslant 0$ (рис. *в*). Решением системы будет $x_2 < x \leqslant 2$, где x_2 — больший корень уравнения $f(x) = 0$.

Ответ:

если $a < 5$, система не имеет решений;

если $a \geqslant 5$, то $\frac{1}{a}\left(a+1+\sqrt{3a+1}\right) \leqslant x \leqslant 2$.



XI **При каких значениях параметра a имеет решение система уравнений:**

$$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_z \sin y = \log_z a \cdot \log_a (2 - 3\cos x), \\ \log_a z + \log_a \left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Решение

Начнем с наиболее сложного уравнения системы — со второго.

Имеем последовательно:

$$\frac{\log_a \sin y}{\log_a z}=\frac{\log_a(2-3\cos x)}{\log_a z},\ \log_a \sin y=\log_a(2-3\cos x),$$
$\sin y = 2-3\cos x$.

Рассмотрим последнее уравнение совместно с первым уравнением системы, получим

$$\begin{cases}\sin y=\dfrac{1-2\cos x}{a},\\ \sin y=2-3\cos x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-3a\cos x=1-2\cos x,\\ \sin y=2-3\cos x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=\dfrac{1-2a}{2-3a},\\ \sin y=\dfrac{1}{2-3a}.\end{cases}$$

Из последнего уравнения исходной системы находим $z=\dfrac{2a}{1-2a}$.

Выясним теперь, при каких a можно найти x, y, z, определяемые указанными уравнениями. Поскольку $\sin y=\dfrac{1}{2-3a}$, а по смыслу системы $\sin y>0$, должны выполняться неравенства $\dfrac{1}{2-3a}>0$ и $\dfrac{1}{2-3a}\leqslant 1$. Так как $\dfrac{1-2a}{2-3a}=\cos x$, а по области определения $\log_a(2-3\cos x)$ $\cos x<\dfrac{2}{3}$, должны выполняться неравенства $\dfrac{1-2a}{2-3a}<\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1-2a}{2-3a}\geqslant -1$.

Наконец, по смыслу исходной системы должны выполняться условия: $a>0$, $a\neq 1$, $\dfrac{1}{2a}-1>0$, т. е. $0<a<\dfrac{1}{2}$. Кроме того, должно выполняться условие $z\neq 1$, т. е. $\dfrac{2a}{1-2a}\neq 1$, откуда $a\neq\dfrac{1}{4}$.

Итак, наша система имеет решение при значениях параметра a, удовлетворяющих следующей системе неравенств.

$$\begin{cases}0<a<\dfrac{1}{2},\\ a\neq\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{1}{2-3a}>0,\\ \dfrac{1}{2-3a}\leqslant 1,\\ \dfrac{1-2a}{2-3a}<\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1-2a}{2-3a}\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<a<\dfrac{1}{4}\ \text{или}\ \dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2},\\ a<\dfrac{2}{3},\\ a\leqslant\dfrac{1}{3}\ \text{или}\ a\geqslant\dfrac{2}{3},\\ a<\dfrac{2}{3},\\ a\leqslant\dfrac{3}{5}\ \text{или}\ a\geqslant\dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<a<\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{1}{4}<a\leqslant\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ:

$$0 < a < \frac{1}{4}, \frac{1}{4} < a \leqslant \frac{1}{3}.$$

XII **Найдите все значения параметра a, при которых система**

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение

Решение

Второе уравнение системы приводится к виду $(x-1)^2+(y+1)^2+z=a+1$. Отсюда и из вида остальных уравнений системы следует, что если $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ — решение системы, то и $x = y_0$, $y = x_0$, $z = z_0$ — тоже ее решение. Поэтому единственным может быть только то решение, в котором $x = y$. Положив в системе $y = x$, преобразуем ее к виду:

$$\begin{cases} (2+x^2\sin 2x=0, \\ 2(x-1)^2+z^2=a+1, \\ (2x+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2)+1)=0. \end{cases}$$

Поскольку из последнего уравнения системы следует, что $|x| < 1$, то из первого уравнения получаем $x = 0$. При этом два последних уравнения принимают вид $\begin{cases} z^2=a-1, \\ a\sin^2 z=0. \end{cases}$

Из четности z^2 и $\sin^2 z$ следует, что единственным решением этой системы может быть только решение $z = 0$, т. е. должно быть $a = 1$. Итак, единственным решением исходной системы может быть только решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и для этого необходимо, чтобы было $a = 1$. Положив $a = 1$ в исходной системе, получим:

$$\begin{cases} \cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1+2x, \\ x+y+\sin^2 z=0. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений получаем уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + \sin^2 z = 0$, имеющее единственное решение $x = y = z = 0$, которое удовлетворяет остальным уравнениям системы.

Ответ:

$a = 1.$

XIII **При каждом значении параметра a решите систему уравнений** $\begin{cases} \sin x+\cos y=2a^2, \\ \sin x+\cos y=a^2(a^2-4). \end{cases}$

Решение

Пусть $\sin x=U$, где $|U| \leqslant 1$, $\cos y=V$, где $|V| \leqslant 1$.

$$\begin{cases} U+V=2a^2, \\ UV=a^2(a^2-U). \end{cases}$$

U, V являются корнями уравнения $z^2-2a^2z+a^2(a^2-4)=0$,

$D_1=a^4-a^4+4a=4a^4 \geqslant 0$.

Если $a=0$, то $z=0$ и либо $\sin x=0$, либо $\cos y=0$.

Если $a \neq 0$, то $z_{1,2}=a^2 \pm 2a$; $z_1=a^2-2a$; $z_{1,2}=a^2+2a$.

Итак, 1) $\begin{cases} \sin x=a^2-2a, \\ \cos y=a^2+2a \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} \sin x=a^2+2a, \\ \cos y=a^2-2a. \end{cases}$

По свойству $\sin x$ и $\cos y$ $|a^2-2a| \leqslant 1$ и $|a^2+2a| \leqslant 1$.

$$|a^2-2a| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant a^2-2a \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a \geqslant -1, \\ a^2-2a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R, \\ 1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}.$$

$a^2-2a+1 \geqslant 0$,	$a^2-2a-1 \leqslant 0$,
$a^2-2a+1=0$,	$a^2-2a-1=0$,
$a=1$.	$a=1 \pm \sqrt{2}$.

$$|a^2+2a| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a \geqslant -1, \\ a^2+2a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R, \\ -1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Решаем систему 1). $x=(-1)^k \arcsin(a^2-2a)+\pi k$, $k \in Z$

$y=\pm\arccos(a^2+2a)+2\pi n$, $n \in Z$, которая имеет место при значениях a, которые находятся из решения системы

$a=1$ $\qquad\qquad$ $a=1 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}, \\ -1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow |a| \leqslant \sqrt{2}-1.$$

Решаем систему 2). $x=(-1)^k \arcsin(a^2+2a)+\pi k$, $k \in Z$, $y=\pm\arccos(a^2-2a)+2\pi n$, $n \in Z$, которая также имеет решение при $|a| \leqslant \sqrt{2}-1$. Объединяя решения системы 1) и 2), получим:

$x = (-1)^k \arcsin(a^2 \pm 2a) + \pi k,\ k \in Z;\ y = \pm\arccos(a^2 \pm 2a) + 2\pi n,\ n \in Z,$ при $|a| \leqslant \sqrt{2} - 1.$

Ответ:

$x = (-1)^k \arcsin(a^2 \pm 2a) + \pi k,\ k \in Z,\ y = \pm\arccos(a^2 \pm 2a) + 2\pi n,\ n \in Z,$ при $|a| \leqslant \sqrt{2} - 1.$

XIV **Найдите все значения a, при которых система** $\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1 \end{cases}$ **имеет только одио решение.**

Решение

Если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то и $(-x_0; y_0)$ также является ее решением. Но так как решение единственное, то это возможно, если $x_0 = 0$. Подставляем $x_0 = 0$ в систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} a = y + 1, \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y + 1, \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 2. \end{cases}$$

$$1)\ a = 0\ \begin{cases} y + \cos x = 0, \\ \sin^4 x + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\cos x, \\ \sin^4 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

$\sin^4 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \pm 1. \end{array}\right.$ Получаем бесконечно много решений.

$$2)\ a = 2\ \begin{cases} 2 + 2|x| = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1. \end{cases}$$ Так как $|\sin^4 x| \leqslant 1$, то $|y^2| \leqslant 1 \Leftrightarrow |y| \leqslant 1.$

Поскольку $x = 0$, то при $y = 1$ получаем единственное решение:

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot 0 = 1 + 1, \text{ верно}, \\ 0 + 1 = 1, \text{ верно}. \end{cases}$$

Ответ:

$a = 2.$

XV **Найдите все значения a, при которых система** $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение

Поскольку вместе с решением $(x_0; y_0)$ также является решением $(-x_0; y_0)$, то $x_0 = 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases}1=y+a,\\ y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-a,\\ (1-a)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-a=-1,\\ 1-a=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,\\ a=0.\end{array}\right.$$

При $a = 2$ есть по крайней мере два решения: (0; −1) и (1; 0).

Ответ:

$a=0.$

XXI **Найдите все значения a и b, при которых система $\begin{cases}\left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a,\\ x^2+y^2=b\end{cases}$ имеет только одно решение $(x; y)$, $y > 0$.**

Решение

Пусть пара $(x_0; y_0)$ удовлетворяет системе, тогда и пара $(x_0; -y_0)$ также ей удовлетворяет. Для второго уравнения это утверждение очевидно, для первого следует из неравенств:

$$\left|\frac{x_0^{-y_0}-1}{x_0^{-y_0}+1}\right|=\left|\frac{1-x_0^{y_0}}{x_0^{y_0}}\cdot\frac{x_0^{y_0}}{1+x_0^{y_0}}\right|=\left|\frac{x_0^{y_0}-1}{x_0^{y_0}+1}\right|.$$

Значит, если система имеет единственное решение, то $y_0 = 0$ и $a = 0$.

Получаем систему $\begin{cases}x^y=1,\\ x^2+y^2=b.\end{cases}$

Из второго уравнения $b \geqslant 0$, из первого уравнения имеем или $y = 0$, или $x = 1$. В первом случае ($y = 0$) из второго уравнения найдем $x = \sqrt{b}$, имеем решение $\left(\sqrt{b}; 0\right)$.

Второй случай ($x = 1$): из второго уравнения $y^2 = b - 1$, если $b > 1$, имеем еще два решения: $x = 1$, $y = \pm\sqrt{b-1}$. Если $b < 1$, то больше решений нет, при $b = 1$ получаем ту же пару: $x = 1$, $y = 0$.

Ответ:

$a=0,\ 0<b\leqslant 1.$

XXII **Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}\lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$ имеет решение.**

Решение

Из первого уравнения системы получаем $4 + y > 0$, $x > 0$, $4 + y = x$. Тогда $y = x - 4$, $x > 0$, $y > -4$. Подставим $y = x - 4$ во второе уравнение системы.

$a-(x-4)=\frac{1}{2}(x+2)^2 \Leftrightarrow a-x+4=\frac{1}{2}x^2+xa+a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2(a+1)x+a^2-2a-8=0.$

$D=(a+1)^2-(a^2-2a-8)=a^2+2a+1-a^2+2a+8=4a+9.$

$x=-(a+1)\pm\sqrt{4a-9}$. Для существования решения системы необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{4a-9}>a+1$. Решаем последнее неравенство, сведя его к совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\ 4a+9\geqslant 0,\\ 4a+9>(a+1)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}a+1<0,\\ 4a+9\geqslant 0,\\ \sqrt{4a-9}>a+1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant -1,\\ a\geqslant -2\frac{1}{4},\\ -2<a<4;\end{cases}\\ \begin{cases}a<-1,\\ a\geqslant -\frac{9}{4},\\ a\in R;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leqslant a<4,\\ -\frac{9}{4}\leqslant a<-1;\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{9}{4}\leqslant a<4.$$

Ответ:

$-\frac{9}{4}\leqslant a<4.$

Дидактические материалы

А. 1. При каком значении параметра a система уравнений

$\begin{cases}2x+31y=-23,\\ 2x+2ay=23\end{cases}$ не имеет решений?

2. При каком значении параметра b система неравенств

$\begin{cases}y\geqslant (x-b)^2,\\ x\geqslant (y-b)^2\end{cases}$ имеет единственное решение?

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases}2x+2\,(a-1)\,y=a-2,\\ 2\,|\,x+1\,|+ay=2\end{cases}$ имеет единственное решение?

4. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases}bx+2y=b+2,\\ 2bx+(b+1)\,y=2b+4\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Б. 1. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases}(a-1)\,y^2-2\,(3a+1)\,y+9a=0,\\ y=-x-3a+2\end{cases}$ имеет решение?

2. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y-|\,x\,|=a\end{cases}$ имеет ровно два решения?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases}3\cdot 2^x+5\,|\,x\,|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases}x^2+(y+3)^2<4,\\ y=2ax^2.\end{cases}$$

В. 1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}x^2-2x-3+a>0,\\ x^2-4x+3+a<0.\end{cases}$$

2. При каких значениях параметра a система неравенств

$\begin{cases}x^2+2xy-7y^2\geqslant\dfrac{1-a}{a+1},\\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant-2.\end{cases}$ имеет решение?

3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}x+y=a,\\ 2x-y=3\end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x\geqslant y$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2\,(1+a),\\ (x+y)^2=14\end{cases}$ имеет два решения.

Ответы и решения:

А. 1. $\dfrac{31}{2}$.

Решение

Система линейных уравнений $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ не имеет решений,

если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$. (*)

Проверим, при каких a выполняется условие (*):

$\frac{2}{2} = \frac{31}{2a} \neq -\frac{23}{23}$; $31 = 2a$; $a = \frac{31}{2}$; $a \neq -\frac{31}{2}$.

2. $b = -\frac{1}{4}$.

Решение

Если $(x_0; y_0)$ — решение данной системы, то $(y_0; x_0)$ — также ее решение. Подставляя $x = y$ в любое из неравенств, получаем, что неравенство $x \geqslant (x-b)^2$ должно иметь единственное решение. Отсюда $b = -\frac{1}{4}$. Подставляя $b = -\frac{1}{4}$ в исходную систему, получаем систему:

$$\begin{cases} x \geqslant \left(y + \frac{1}{4}\right)^2, \\ y \geqslant \left(x + \frac{1}{4}\right)^2. \end{cases}$$

Сложив неравенства этой системы, получаем после преобразований: $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$, т. е. $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}$.

3. $a \in \left(\frac{2}{3}; 2\right); \left(-\frac{a}{2}; 1\right)$.

4. $-\infty < b < 0,\ 0 < b < +\infty$.

Решение

Из первого уравнения находим $y = \frac{b+2-bx}{2}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, находим, что исходная система равносильна системе $\begin{cases} y = \frac{b+2-bx}{2}, \\ b(b-3)x = (b+2)(b-3). \end{cases}$

Если $b = 0$, то система несовместна. Если $b = 3$, то система имеет бесконечно много решений вида $x = a$, $y = \frac{5-3a}{2}$, где a — любое число. Если $b \neq 0$ и $b \neq 3$, то система имеет единственное решение $x = \frac{b+2}{b}$, $y = 0$.

Следовательно, данная система имеет хотя бы одно решение при любом b, кроме $b = 0$.

Б. 1. $a\in[-2;\,-1)\cup(1;\,5]$.

2. $a=-\sqrt{2}$, $a\in(-1;\,1)$;

3. $a=\dfrac{4}{3}$.

Указание. Если $(x_0;\,y_0)$ — решение данной системы, то $(-x_0;\,y_0)$ — тоже решение. Из единственности решения следует, что $x_0=0$. Это дает возможность найти «подозрительные» значения a, после чего необходимо сделать проверку.

4. $a<\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

Решение

Система имеет хотя бы одно решение тогда, когда имеет хотя бы одно решение неравенство $x^2+(2ax^2+3)^2<4$ (4.1), полученное подстановкой в данное неравенство $2ax^2$ вместо y. Обозначим через $f(t)$ функцию $t+(2at+3)^2$. Неравенство (4.1) будет иметь решение только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(t)$ на множестве $t\geqslant 0$ будет меньше четырех. Вычислим это значение $f(t)$.

При $a=0$ имеем $f(t)=t+9$ и наименьшее значение $f(t)$ на множестве равно 9, что больше 4. Следовательно, $a=0$ не отвечает условию задачи.

Если $a\neq 0$, то график функции

$$f(t)=t+(2at+3)^2=4a^2t^2+(12a+1)t+9$$

представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, и абсцисса вершины равна $t_b=-\dfrac{12a+1}{8a^2}$. Если $t_b\leqslant 0$, т. е. если $12a+1\geqslant 0$, $a\neq 0$, то на множестве $t\geqslant 0$ функция $f(t)$ монотонно возрастает и, значит, ее наименьшее значение на этом множестве равно $f(0)=9>4$. Таким образом, все искомые значения параметра а лежат в области $12a+1<0$. В этом случае точка t_b лежит в области $t\geqslant 0$ и наименьшее значение $f(t)$ равно

$$f(t_b)=4a^2\left(-\frac{12a+1}{8a^2}\right)^2-\frac{(12a+1)^2}{8a^2}+9=-\frac{24a+1}{16a^2}.$$

Итак, все искомые значения параметра a являются решениями системы неравенств:

$$\begin{cases} 12a+1<0, \\ -\dfrac{24a+1}{16a^2}<4. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Система (4.2) равносильна системе $\begin{cases} 12a+1<0, \\ 64a^2+24a+1>0. \end{cases}$

Квадратный трехчлен $64a^2+24a+1$ имеет корни $a_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{16}$, причем $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}<-\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{16}>-\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, множество решений системы (4.2), а значит, и множество значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи, является промежуток $a<\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

В. 1. Если $a<0$, то $1+\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{1-a}$; если $a\geq 0$, то решений нет.

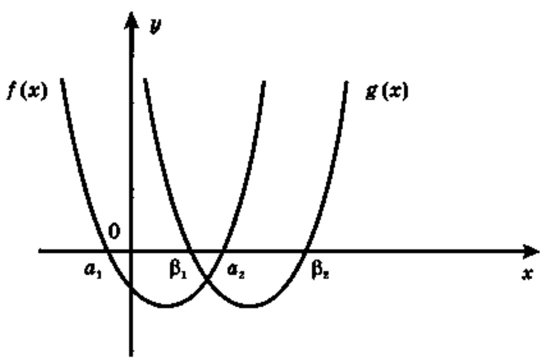
Решение

Дана система: $\begin{cases} x^2-2x-3+a>0, \\ x^2-4x+3+a<0. \end{cases}$

Задача, по существу, сводится к выяснению, в каком порядке следуют корни уравнений.

$f(x)=x^2-2x-3+a=0$ и $g(x)=x^2-4x+3+a=0$.

Вычисляя их дискриминанты, получим, что первое уравнение имеет корни, если $a\leqslant 4$; второе — если $a\leqslant 1$. Найдем x_0 — абсциссу точки пересечения графиков $y=f(x)$ и $y=g(x)$: $f(x_0)=g(x_0)$, $x_0=3$, $f(x_0)=g(x_0)=a$.



Имеем три случая:

1. $a<0$ (см. рисунок). Если α_1 и α_2 $(\alpha_1 \leqslant \alpha_2)$ — корни уравнения $f(x)=0$, а β_1, β_2 $(\beta_1 \le \beta_2)$ — корни уравнения $g(x)=0$, то $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2$. Это следует из того, что при $x<3$ выполняется неравенство $g(x)>f(x)$, так как $g(x)-f(x)=-2x+6$, и $f(3)=g(3)=a<0$. Значит, при $a<0$ решением системы будет $\alpha_2<x<\beta_2$ или $1+\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{1-a}$.

2. $0<a<1$. В этом случае порядок следования корней будет $\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\alpha_2$. (Докажите.) Система не имеет решений. Если $a=0$, то $\alpha_1<\beta_1<\beta_2=\alpha_2$. Решений нет.

3. $a \geqslant 1$. Второе неравенство, а значит, и система неравенств не имеют решения.

2. $a<-1$.

Указание: Первое неравенство можно переписать так:

$$-x^2-2xy+7y^2 \leqslant 1-\frac{2}{a+1}. \qquad (*)$$

Умножая неравенство (*) на 2 и складывая со вторым неравенством системы, получаем $(x+3y)^2 \leqslant \frac{2}{(a+1)}$, откуда $a<-1$. Существование решений при $a<-1$ следует из разрешимости системы уравнений: $\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1, \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2. \end{cases}$

3. $a_1=\sqrt{2}, a_2=-\sqrt{2}$.

Решение

1 способ. Пусть a — некоторое число, удовлетворяющее условию задачи, и (x_0, y_0) — единственное решение данной системы уравнений. Очевидно, пара чисел (y_0, x_0) так же будет решением системы. Следовательно, $x_0=y_0$ и из первого уравнения системы получаем, что либо $x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и тогда $a=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, либо $x_0=y_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и тогда $a=-\sqrt{2}$.

Решая систему уравнений при $a=\sqrt{2}$ и $a=-\sqrt{2}$, убеждаемся, что в том и другом случае она не имеет решений, отличных от уже указанных.

2 способ. Исходная система уравнений равносильна системе:

$$\begin{cases} y = a - x, \\ x^2 + (a - x)^2 = 1. \end{cases}$$

Эта система будет иметь единственное решение только тогда, когда второе ее уравнение будет иметь единственный корень. Перепишем второе уравнение в виде $2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) = 0$. Это квадратное уравнение имеет единственный корень тогда, когда равен нулю его дискриминант $D = 4a^2 - 8(a^2 - 1)$, т. е. когда $a = \sqrt{2}$ или $a = -\sqrt{2}$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение в случае, когда $a = \sqrt{2}$, и в случае, когда $a = -\sqrt{2}$. При остальных значениях параметра a она либо имеет два решения, либо не имеет решений.

4. $a = \frac{5}{2}$.

Решение

Пусть a — искомое значение параметра, и (x_0, y_0) — решение системы. Тогда пары чисел $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, -x_0)$ также будут решениями системы. Решения (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$ различны, так как в противном случае $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$, и тогда пара чисел (x_0, y_0) не удовлетворяет второму уравнению системы. Решения (x_0, y_0) и $(-y_0, -x_0)$ также различны. В противном случае $x_0 + y_0 = 0$ и опять не удовлетворяется второе уравнение системы. По условию система имеет в точности два решения, значит, решения $(-x_0, -y_0)$ и $x_0 + y_0 = 0$ должны совпадать, т. е. должно выполняться равенство $y_0 = x_0$. Подставляя x_0 вместо y_0 во второе уравнение системы, получаем уравнение $4x_0^2 = 14$, которое имеет два корня: $x_0^1 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ и $x_0^2 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. Значит, если при данном a пара чисел (x_0, y_0) — решение исходной системы, то либо $x_0 = y_0 = \sqrt{\frac{7}{2}}$, либо $x_0 = y_0 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. В обоих случаях, подставляя (x_0, y_0) в первое уравнение системы, получим, что $2(1 + a) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$, т. е. получим, что $a = \frac{5}{2}$.

Значит, если a — искомое значение параметра, то оно может принимать только значение $a=\frac{5}{2}$. Покажем, что при $a=\frac{5}{2}$ исходная система действительно имеет два решения.

При $a=\frac{5}{2}$ исходная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ (x+y)^2=14. \end{cases} \qquad (**)$$

Умножим первое уравнение системы (**) на 2, вычтем результат из второго уравнения системы (**). Получим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ -(x-y)^2=0, \end{cases}$$

равносильную системе (**).

Полученная система равносильна системе $\begin{cases} y=x, \\ 2x^2=7, \end{cases}$ которая имеет в точности два решения: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\ \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};\ -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Значит, действительно, $a=\frac{5}{2}$ и только оно удовлетворяет условию задачи.

§ 11. Применение производной при решении некоторых задач с параметром

I **В зависимости от b укажите значения a, для которых уравнение $x^3-3bx^2-b=a$ имеет три различных корня. (1)**

Решение

Пусть $\begin{cases} f(x)=x^3-3bx^2-b, \\ f'(x)=3x^2-6bx=x(3x-6b). \end{cases}$

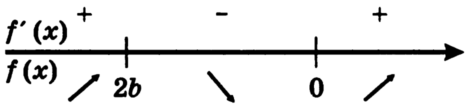
При $b=0$ $f'(x)=3x^2\geqslant 0$, т. е. $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, и уравнение $f(x)=a$ имеет только один корень.

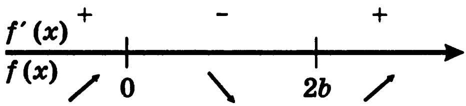
При $b \neq 0$ $f(x)$ имеет две критические точки 0 и $2b$. $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, при $b < 0$ имеем:

точка $x = 2b$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума;

при $b > 0$ имеем:

точка $x = 0$ — точка максимума, $x = 2b$ — точка минимума.





Отсюда видно, что уравнение (1) имеет три различных корня при $f(0) < a < f(2b)$, где $b < 0$, или $f(2b) < a < f(0)$, где $b > 0$, т. е. $0 < -b < a < -4b^3 - b$ или $-4b^3 - b < a < -b < 0$.

Ответ:

$0 < -b < a < -4b^3 - b$ или $-4b^3 - b < a < -b < 0$.

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение трехчлена $3x^2 - 2ax + (a^2 + 2a - 1)$ на отрезке [0; 2] равно 4.

Решение

Пусть $f(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$; $f'(x) = 6x - 2a$, $x = \frac{1}{3}a$ — точка экстремума.

$f(0) = a^2 + 2a - 1$, $f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{2}{3}a^2 + 2a - 1$, $f(2) = a^2 - 2a + 11$.

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant \frac{a}{3} \leqslant 2$, т. е. $0 \leqslant a \leqslant 6$.

$f(0) - f\left(\frac{a}{3}\right) = a^2 + 2a - 1 - \left(\frac{2}{3}a^2 + 2a - 1\right) = \frac{a^2}{3} \geqslant 0$, т. е. $f(0) \geqslant f\left(\frac{a}{3}\right)$.

$f(0)-f(2)=-12<0$, т. е. $f(0)<f(2)$.

$f(\frac{a}{3})-f(2)=-\frac{a^2}{3}+4a-12=-\frac{1}{3}(a^2-12a+36)=-\frac{1}{3}(a-6)^2\leqslant 0$,

т.е. $f(\frac{a}{3})\leqslant f(2)$.

При $0\leqslant a\leqslant 6$ получим $f(\frac{a}{3})\leqslant f(0)<f(2)$,

таким образом, $\min\limits_{[0,2]} f(x)=f(\frac{a}{3})=\frac{2}{3}a^2+2a-1$.

$\frac{2}{3}a^2+2a-1=4$, $a^2+6a-15=0$, $a=\frac{-3\pm\sqrt{9+30}}{2}$, $a=\frac{-3+\sqrt{39}}{2}$ соответствует рассматриваемому случаю, так как принадлежит промежутку [0; 2].

При $a<0$ $f(0)<f(2)$ и поэтому $\min\limits_{[0,2]} f(x)=f(0)=a^2+2a-1$.

$a^2+2a-1=4$ при $a=-1-\sqrt{6}$.

При $a>6$ $f(0)<f(2)$, поэтому $\min\limits_{[0,2]} f(x)=f(0)=a^2+2a-1$.

$a^2+2a-1=4$ при $a=-1\pm\sqrt{6}$, ни один из корней уравнения не удовлетворяет условию $a>6$.

Ответ:

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=4$ при $a=\frac{-3+\sqrt{39}}{2}$ и $a=-1-\sqrt{6}$.

III **При каких значениях параметра *a* функция $g(x)=\frac{1}{3}x^3+(a+2)x^2+(a^2+4a-12)x-24$ имеет экстремальные точки, принадлежащие промежутку [−2, 9]?**

Решение

$g'(x)=x^2+2(a+2)x+a^2+4a-12$.

Находим критические точки:

$g'(x)=0$, $x^2+2(a+2)x+(a^2+4a-12)=0$.

$D_1=(a+2)^2-(a^2+4a-12)=16$, $\sqrt{D_1}=4$.

$x_1 = -a-6$; $x_2 = -a+2$; x_1 и x_2 — точки экстремума.

По условию $\begin{cases} -a-6 \geqslant -2, \\ -a+2 \leqslant 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant -4, \\ a \geqslant -7; \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leqslant a \leqslant -4.$

Ответ:

$-7 \leqslant a \leqslant -4.$

IV **При каких значениях параметра a функция $f(x) = 2x^3 - 3(3a+2)x^2 + 6(2a^2+a-3)x - 42$ возрастает?**

Решение

Находим производную функции

$f(x): f'(x) = 6x^2 - 6(3a+2)x + 6(2a^2+a-3)$ $f'(x) > 0$,

т. е. $x^2 - (3a+2)x + (2a^2+a-3) > 0$.

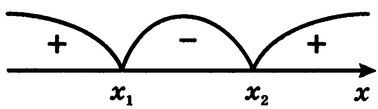
Решаем неравенство методом интервалов.

$D = (3a+2)^2 - 4(2a^2+a-3) = 9a^2 + 12a + 4 - 8a^2 - 4a + 12 =$

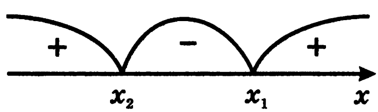
$= a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2 > 0$. При любых a, кроме $a = -4$.

$x_1 = \dfrac{3a+2+(a+4)}{2} = 2a+3$; $x_2 = \dfrac{3a+2-(a+4)}{2} = a-1$.

Если $a < -4$, то $x_2 > x_1$, $x > x_2$, $x < x_1$.



Если $a > -4$, то $x_2 - x_1 = -a-4 < 0$, т. е. $x_2 < x_1$, $x > x_1$, $x < x_2$.



Если $a = -4$, то $f'(x) = 6x^2 + 60x + 150 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 > 0$ при любых x, кроме $x = -5$.

Ответ:

при $a > -4$ $x \in (-\infty; a-1) \cup (2a+3; +\infty)$; при $a = -4$ x — любое действительное число, кроме $x = -5$; при $a < -4$ $x \in (-\infty; 2a+3) \cup (a-1; +\infty)$.

V **При каких значениях параметра a ($a > 0$) неравенство $2x^2 - a\ln x < 0$ имеет хотя бы одно решение?**

Решение

Пусть $f(x) = 2x^2 - a\ln x$. Непрерывная функция $y = f(x)$ принимает в некоторых своих точках отрицательные значения (т. е. неравенство $f(x) < 0$ имеет решения), если $y_{\min} < 0$, где $y_{\min}$ — наименьшее значение функции $y = f(x)$ в ее области определения, т. е. при $x > 0$ (если, конечно, $y_{\min}$ существует). Находим производную: $f'(x) = (2x^2 - a\ln x)' = 4x - \frac{a}{x} = \frac{4x^2 - a}{x}$; из уравнения $\frac{4x^2-a}{x} = 0$ получаем $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$. Это единственная критическая точка (при $x > 0$, $a > 0$).

Если $0 < x < \frac{\sqrt{a}}{2}$, то $\frac{4x^2-a}{x} < 0$, если $x > \frac{\sqrt{a}}{2}$, то $\frac{4x^2-a}{x} > 0$. Значит, $y' < 0$ слева от точки $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$, $y' > 0$ справа от точки $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

Отсюда $\frac{\sqrt{a}}{2}$ — единственная точка минимума непрерывной функции $y = f(x)$, значит $y_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$.

Вычислим наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2 - a\ln x$;

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 - a\ln\frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\ln\frac{a}{4} = \frac{a}{2}\left(1 - \ln\frac{a}{4}\right).$$

Осталось решить неравенство $f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) < 0$. Имеем $\frac{a}{2}\left(1 - \ln\frac{a}{4}\right) < 0$,

$1 - \ln\frac{a}{4} < 0$, $\ln\frac{a}{4} > 1$, $\frac{a}{4} > e$, $a > 4e$.

Ответ:

при $a > 4e$.

Дидактические материалы

А. 1. При каких значениях параметра a

$f(x) = x^3 - 6(a-1)x^2 + 3(3a^2 - 14a - 5)x + 51$

а) возрастает на отрезке $[-1; 1]$; б) убывает на отрезке $[-1; 1]$?

2. При каких значениях a $f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3(a-1)x-27$ возрастает при всех $x\in R$?

3. При каких значениях a $f(x)=2ax^3+9ax^2+30ax+66$ убывает при всех $x\in R$?

Б. 1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^4-6bx^2+b^2$ на отрезке $[-2; 1]$ (в зависимости от параметра b).

2. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2+2ax-(a^2-2a+3)$ на отрезке $[0; 1]$ равно -2.

3. При каких значениях параметра b функция $f(x)=bx^5-20x^3+5(b+9)x-7$ монотонна при всех $x\in R$?

В. 1. При каких значениях a и b равенство $a\cos x-b=\cos(ax+b)$ верно при любых $x\in R$?

2. При каких значениях a и b равенство $a\ln x-b=\ln(b-ax)$ верно при любых $x\in R$?

1. Найдите множество пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых выполняется равенство $a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1$ при любых $x\in R$?

Ответы и решения:

А. 1. а) $a<-\dfrac{2}{3}$, $a>6$.

Указание. $f'(x)=3\varphi(x)$, где $\varphi(x)=x^2-4(a-1)x+3a^2-14a-5$. $f(x)$ возрастает на всем отрезке $[-1; 1]$ при всех значениях a, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}\varphi(-1)>0,\\ -1>2(a-1)\end{cases} \text{ или системе } \begin{cases}\varphi(1)>0,\\ 1<2(a-1).\end{cases}$$

1. б) $0<a<4$.

Указание. $\begin{cases}\varphi(-1)<0,\\ \varphi(1)<0.\end{cases}$

2. $1<a<2$;

3. $a<0$.

Б. 1. $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = 16 - 24b + b^2$ при $b \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$;

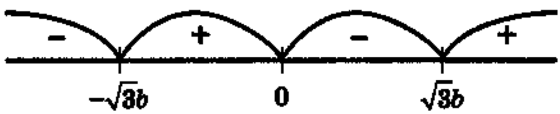
$\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(0) = b^2$ при $b \in \left[\dfrac{2}{3}; \infty\right)$.

Решение

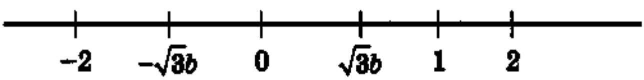
а) При $b = 0$ $f(x) = x^4$ $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = 16$.

б) При $b < 0$ $f'(x) = 4x(x^2 - 3b)$. 0 — точка локального минимума, и поэтому, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = 16 - 24b + b^2 = f(-2)$.

в) При $b > 0$ $f'(x) = 4x\left(x - \sqrt{3}\,b\right)\left(x + \sqrt{3}\,b\right)$. 0 — точка локального максимума.



$f(0) = b^2$, $f(1) = 1 - 6b + b^2$, $f(-2) \geqslant f(0)$ при $0 < b \leqslant \dfrac{2}{3}$, и так как при этом числа -2, $-\sqrt{3}\,b$, 0, $\sqrt{3}\,b$, 1, 2 расположены так:



то $f(-2) > f(1)$. Значит, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2)$

При $b > \dfrac{2}{3}$ $f(-2) < f(0)$.

$f(0) - f(1) = 6b - 1$, т. е. при $b > \dfrac{2}{3}$ $f(0) > f(1)$, значит, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(0) = b^2$ при $b > \dfrac{2}{3}$.

2. $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 2 + \sqrt{2}$; 3. $b \in (-\infty; -9) \cup (3; +\infty)$.

Решение

$f'(x) = 5bx^4 - 60x^2 + 5(b + 9)$.

Условию задачи удовлетворяют те значения b, при которых уравнение $bz^2 - 12z + b + 9 = 0$ не имеет решений или имеет два отрицательных корня. Первое условие выполняется при $36 - b(b+9) < 0$, т. е. $b^2 + 9b - 36 > 0 \Leftrightarrow (b+12)(b-3) > 0$, получим $b < -12$ или $b > 3$.

Второе условие выполняется при:

$$\begin{cases} (b+12)(b-3) \leqslant 0, \\ \dfrac{12}{b} < 0, \text{ т. е. при } -12 \leqslant b < -9, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < -9, \\ b > 3. \end{array}\right. \\ \dfrac{b+9}{b} > 0 \end{cases}$$

В. 1. $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; -\cos b)$.

2. $(0; e^{-b})$.

3. $(0; 0)$, $(1; 0)$.

Решение

Рассмотрим $f(x) = a(\cos x - 1) - \cos(ax + b^2)$.

$f'(x) = 2a \sin 0{,}5((a-1)x + b^2) \cos 0{,}5((a+1)x + b^2)$.

$f'(x) = 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$, если:

а) $a = 0$, при этом уравнение имеет вид: $b^2 = \cos b^2 - 1$, что возможно только при $b = 0$;

б) $\sin 0{,}5((a-1)x + b^2) = 0$ при $(a-1)x + b^2 = 2\pi n$. Равенство верно при любых $x \in \boldsymbol{R}$, если $a = -1$ и $b^2 = \pi(2n+1)$. Подстановка в данное уравнение приводит к неверному равенству $\pi(2n+1) = -2$.

§ 12. Параметры. Задания для подготовки и проведения письменного экзамена за курс средней школы. 11 класс

6.207. **Решите уравнение** $\dfrac{a}{2a-x}=3.$

Решение

Пусть a — некоторое фиксированное значение параметра.

Тогда ОДЗ уравнения состоит из всех $x \neq 2a$.

Если $a = 0$, то ОДЗ: $x \neq 0$. Если $a \neq 0$, то ОДЗ: $x \neq 2a$.

При $a = 0$ исходное уравнение принимает вид $\dfrac{0}{0-x}=3$ — не имеет решений.

Если $a \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $a = 6a - 3x$; $x = \dfrac{5a}{3}$. Проверим, лежит ли найденное число в ОДЗ $\dfrac{5a}{3} \neq 2a$ при $a \neq 0$.

Ответ:

2 способ

При $a = 0$ корней нет, при $a \neq 0$ $x = \dfrac{5a}{3}$.

$$\frac{a}{2a-x}-3=0;\ \frac{a-6a+3x}{2a-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5a=0, \\ x \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5a}{3}, \\ x \neq 2a. \end{cases}$$

Поскольку $2a = \frac{5a}{3}$ только при $a = 0$, то решение уравнения $x = \frac{5a}{3}$ при $a \neq 0$.

6.208. **Решите уравнение $\frac{a}{a-2x}=3$.**

Решение

Пусть a — некоторое фиксированное значение параметра.

Тогда ОДЗ уравнения состоит из всех $x \neq \frac{a}{2}$.

Если $a = 0$, то $x \neq 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет вид $\frac{0}{0-2x}=3$ нет решений.

Если $a \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $a = 3a - 6x \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$. Проверим, лежит ли найденное число x в ОДЗ: $\frac{a}{3} \neq \frac{a}{2}$ всегда, кроме $a = 0$.

Ответ:

при $a = 0$ корней нет; при $a \neq 0$ $x = \frac{a}{3}$.

6.211. **Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $|x + 2a|x + 1 - a = 0$.**

Решение

Так как $x = 2$ — корень уравнения, то, подставляя $x = 2$ в уравнение, получим: $|2 + 2a|2 + 1 - a = 0$; $4|1 + a| + 1 - a = 0 \Leftrightarrow 4|1 + a| = a - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1 \geqslant 0, \\ 4+4a = a-1; \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 \geqslant 0, \\ 4+4a = 1-a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 1, \\ a = -\frac{5}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a \geqslant 1, \\ 5a = -3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ:

нет таких значений a.

6.212. **Найдите все значения a, при которых число $x = 3$ не является решением неравенства $2 \geqslant |x + 3a| + x^2$.** **(1)**

Решение

1 способ. Найдем те значения a, при которых 3 — решение неравенства $2 \geqslant |3 + 3a| + 9$, $|3 + 3a| \leqslant -7$; $-7 < 0$, то решений нет; $x = 3$ не является решением при любых значениях a.

2 способ. Так как $x = 3$ не является решением неравенства (1), то оно будет решением неравенства $|x + 3a| + x^2 > 2$.

$3|1 + a| > -7$

1) $1 + a \geqslant 0$, $3 + 3a > -7$, $\begin{cases} a > -\dfrac{10}{3}, \\ a \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow a > -\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow a \geqslant -1;$

2) $1 + a < 0$, $-3 - 3a > -7$, $\begin{cases} a < \dfrac{4}{3}, \\ a < \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a < -1 \Leftrightarrow a < -1.$

Ответ:

$x = 3$ не является решением при любом a.

6.213. **Найдите все значения a, при которых число $x = -3$ является решением неравенства $4 - |x - 2a| < x^2$.**

Решение

$4 - |-3 - 2a| < 9$, $|3 + 2a| > -5$ при любом a.

Ответ:

при $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

6.214. **Найдите все значения a, при которых число $x = -2$ является решением неравенства $3 - |x - 2a| > x^2$.**

Решение

$x = -2$; $3 - |-2 - 2a| > 4 \Leftrightarrow |2 + 2a| < -1 \Leftrightarrow \varnothing$.

Ответ:

нет таких значений a.

6.215. **Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ не является решением неравенства $-2 \leqslant |x + 3a| - x^2$.**

Решение

Найдем, при каких значениях a $x = 2$ является решением неравенства.

$-2 \leqslant |2 + 3a| - 4 \Leftrightarrow |2 + 3a| \geqslant 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+3a \geqslant 2, \\ 2+3a \leqslant -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 0, \\ a \leqslant -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right).$$

Ответ:

$a \in \left(-\dfrac{4}{3}; 0\right)$.

6.216. **Найдите все значения a, при которых число $x = -1$ является корнем уравнения $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$.**

Решение

Найдем все значения a, при которых число $x = -1$ является корнем уравнения $1 - 4 - 2|-1 - a| + 2 - a = 0$.

$-2|-a - 1| - 1 - a = 0 \Leftrightarrow 2|-a - 1| = -(a + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a-1 \geqslant 0, \\ -2a-2 = -a-1; \end{cases} \\ \begin{cases} -a-1 < 0, \\ 2a+2 = -a-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant -1, \\ a = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} a > -1, \\ a = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a = -1.$$

Итак, $x = -1$ не является корнем уравнения при $a \neq -1$.

Ответ:

$a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

6.217. **Найдите все значения a, при которых $x = -2$ является корнем уравнения $|x - a|x + 1 - 2a = 0$.**

Решение

По определению корня получим: $x = -2$. $|-2 - a|(-2) + 1 - 2a = 0$

$-2|a+2|=2a-1 \Leftrightarrow 2|a+2|=1-2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2a\geqslant 0,\\ 2a+4=1-2a;\end{cases}\\ \begin{cases}1-2a\geqslant 0,\\ 2a+4=-1+2a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\leqslant \dfrac{1}{2},\\ a=-\dfrac{3}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}a\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 0\cdot a=-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a=-\frac{3}{4}.$$

Ответ:

$a=-\dfrac{3}{4}$.

6.218. **Найдите все значения a, при которых число $x=1$ не является корнем уравнения $|2x+a|(x^2+1)+3-2a=0$.**

Решение

Найдем все значения a, при которых число $x=1$ является корнем уравнения $|2+a|2+3-2a=0 \Leftrightarrow 2|a+2|=2a-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-3\geqslant 0,\\ 2a+4=2a-3;\end{cases}\\ \begin{cases}2a-3\geqslant 0,\\ 2a+4=3-2a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant \dfrac{3}{2},\\ a\cdot 0=-7;\end{cases}\\ \begin{cases}a\geqslant \dfrac{3}{2},\\ a=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ:

не является корнем при $a\in \boldsymbol{R}$.

6.219. **Найдите все значения a, при которых $x=2$ является корнем уравнения $\left(a-3x^2-\cos\dfrac{11\pi}{4}\right)\sqrt{8-ax}=0 \Leftrightarrow$**

$$\Leftrightarrow \left(a-12-\cos\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{8-2a}=0.$$

Решение

Подставим $x=2$ в уравнение:

$$\left(a-12-\cos\frac{11\pi}{2}\right)\sqrt{8-2a}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-12=0,\\ 8-2a\geqslant 0;\end{cases}\\ 8-2a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=12,\\ a\leqslant 4;\end{cases}\\ a=4\end{array}\right. \Leftrightarrow a=4.$$

Ответ:

при $a = 4$.

6.220. **Найдите все значения a, при которых $x = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \sin\frac{11\pi}{4}x\right)\sqrt{11 - 3ax} = 0$.**

Решение

Подставим $x = 2$ в уравнение: $\left(a - 12 - \sin\frac{11\pi}{2}\right)\sqrt{11 - 6a} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 11 = 0, \\ a \leqslant \dfrac{11}{6}; \end{cases} \\ a = \dfrac{11}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow a = \frac{11}{6}.$$

Ответ:

при $a = \frac{11}{6}$.

6.221. **Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь 3 корня?**

Решение

Функция $f(x) = 2x^6 - x^4 - ax^2$, где $D(f) = \boldsymbol{R}$, — четная.

$x = 0$ не является решением уравнения. Если $x = x_0$ — решение, то $x = -x_0$ также решение уравнения, т. к. степени четные. Тогда число решений уравнения может быть четным: 2, 4, 6. Итак, уравнение не может иметь 3 решения ни при каком a.

Ответ:

нет.

6.222. **Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ иметь 5 корней?**

Решение

Пусть $f(x) = 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(x)$ — четная функция. $x = 0$ не является решением уравнения.

Если $x = x_0$ — решение уравнения, то $x = -x_0$ — также решение, так как степени четные. Поэтому число решений может быть только четным: 2, 4, 6, 8, а 5 корней уравнение иметь не может.

Ответ:

не может.

6.223. **Докажите, что уравнение $3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2$ имеет нечетное число корней.**

Решение

$x = 0$ является решением уравнения. Если $x = x_0$ — решение, то $x = -x_0$ также решение уравнения. Значит, число решений нечетно.

6.224. **Докажите, что уравнение $4^x + 4^{-x} = x^6 + 2ax^2 + 3$ имеет четное число корней.**

Решение

$x = 0$ не является решением уравнения. Если $x = x_0$ — решение, то $x = -x_0$ также решение уравнения. Значит, число решений четно.

6.225. **Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет ровно два корня.**

Решение

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9^x + 9a^3 = 3^x, \\ 9^x + 9a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9^x + 9a^3 = 3^x.$$

Замена: $3^x = t > 0$

$$t^2 - t + 9a^3 = 0.$$

Задача сводится к нахождению ровно двух положительных корней уравнения

$$3^{2x} + 3^x + 9a^3 = 0.$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 + t_2 = 1 > 0, \\ t_1 \cdot t_2 = 9a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 - 36a^3 > 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leqslant \frac{\sqrt[3]{6}}{6}.$$

Если один из корней равен нулю, то $t_1 \cdot t_2 = 0$ и по теореме Виета $9a^3 = 0$, $a = 0$.

При $a = 0$ уравнение принимает вид $\log_3 9^x = x$, $x = 0 \Leftrightarrow$ одно решение, не удовлетворяет условию задачи.

$D = 0$, $a^3 = \dfrac{1}{36}$.

$\log_3\left(9^x + \dfrac{1}{4}\right) = x$,

$9^x - 3^x + \dfrac{1}{4} = 0$; $3^x = t$; $t^2 - t + \dfrac{1}{4} = 0$ — два равных положительных корня.

$t = \dfrac{1}{2}$

$D < 0$ — решений нет.

Ответ:

$0 < a \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{6}}{6}$.

6.226. **Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.**

Решение

$$\log_2(4^x - a) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - a = 2^x, \\ 4^x - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4^x - a = 2^x.$$

Замена: $2^x = t$, $t > 0$.

$t^2 - t - a = 0$. Задача сводится к нахождению единственного положительного корня.

$D = 1 + 4a$.

1) $D = 0$, $a = -\dfrac{1}{4}$, то $t = \dfrac{1}{2}$ — единственный положительный корень, т. е. $a = -\dfrac{1}{4}$ удовлетворяет условию задачи.

2) $D < 0$, уравнение не имеет корней.

3) $D > 0$. $1 + 4a > 0$. Уравнение имеет 2 действительных корня.

Уравнение будет иметь единственный положительный корень в случае, если другой корень равен 0 или меньше 0.

Если $t_1 = 0$, то по теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = 0 \rightarrow a = 0$.

При $a = 0$ получаем $t^2 - t = 0$, $t = 0$; $t = 1$ — один положительный корень. Итак, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Если один корень отрицательный, то $t_1 \cdot t_2 < 0$ и получаем систему:

$$\begin{cases} 1+4a>0, \\ -a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{4}, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow a>0.$$

Ответ:

$a \geqslant 0,\ a = -\frac{1}{4}.$

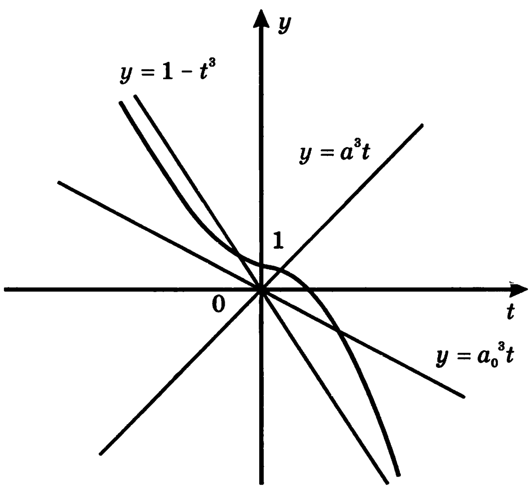
6.227. **Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ имеет ровно два корня.**

Решение

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4^x + a^3 = 2^{-x}, \\ 4^x + a^3 > 0. \end{cases}$

$4^x + a^3 = 2^{-x} \,|\cdot 2^x \Rightarrow 2^{3x} + 2^x \cdot a^3 = 1$.

Уравнение имеет ровно 2 положительных решения. Решим графически. Замена: $2^x = t > 0$; $t^3 + a^3 \cdot t = 1$, уравнение $1 - t^3 = a^3 t$.



Из графика видно, что ни при каком значении a уравнение не может иметь двух положительных корней.

Ответ:

решений нет.

6.228. **Найдите, при каких значениях a уравнение $x-\log_3(2a-9^x)=0$ не имеет корней.**

Решение

1 способ

Переформулируем задачу: найдем те значения a, при которых уравнение имеет решение.

$$\log_3(2a-9^x)=x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-9^x=3^3, \\ 2a-9^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 2a-9^x=3^x.$$

Замена: $3^x=t,\ t>0,\ t^2+t-2a=0$.

Задача сводится к нахождению таких a, при которых существуют положительные корни.

$D=1+8a$.

1) $D=0$, $1+8a=0$, $a=-\dfrac{1}{8}$; $t=-\dfrac{1}{2}$; $a=-\dfrac{1}{8}$ удовлетворяет условию задачи.

2) $D<0$, решений нет.

3) $D>0$, $a>-\dfrac{1}{8}$.

Если один из корней равен 0, то $t_1\cdot t_2=0$, $-2a=0$, $a=0$.

При $a=0$, $t^2+t=0, t=0, t=-1$ нет положительных корней. $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если один из корней отрицательный, то $t_1\cdot t_2<0$, получаем систему

$$\begin{cases} a>-\dfrac{1}{8}, \\ -2a<0 \end{cases} \Leftrightarrow a>0.$$

Итак, при $a>0$ уравнение имеет решение, тогда при $a\leqslant 0$ оно решения не имеет.

2 способ

Исходное уравнение не имеет корней, если:

1) уравнение t^2+t-2a не имеет корней, т. е. $D<0$.

2) оба корня уравнения $t^2 + t - 2a$ не положительны.

1) $D = 1 + 8a$; $D < 0$; $1 + 8a < 0$; $a < -\frac{1}{8}$.

2) Используем теорему Виета: $\begin{cases} 1 + 8a \geqslant 0, \\ -1 \leqslant 0, \\ -2a \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant -\frac{1}{8}, \\ a \leqslant 0. \end{cases}$

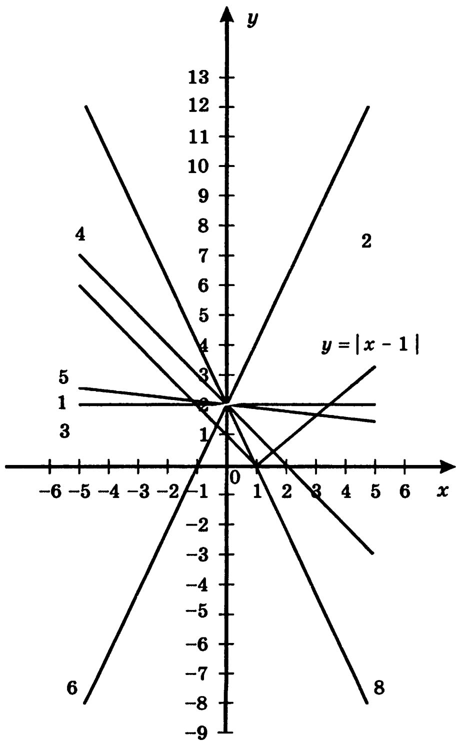
Таким образом, при $a \leqslant 0$ уравнение не имеет решений.

Ответ:

$a \leqslant 0$.

6.229. **Для каждого a найдите число корней уравнения: $|x - 1| = ax + 2$.**

Решение



При $a = 0$ — одно решение (график № 1).

При $a = 1$ — одно решение (график № 2).

При $0 < a < 1$ — два решения (график № 3).

При $a = -1$ — одно решение (график № 4).

При $-1 < a < 0$ — два решения (график № 5).

При $a > 1$ — одно решение (график № 6).

При $a < -1$ — одно решение (график № 7).

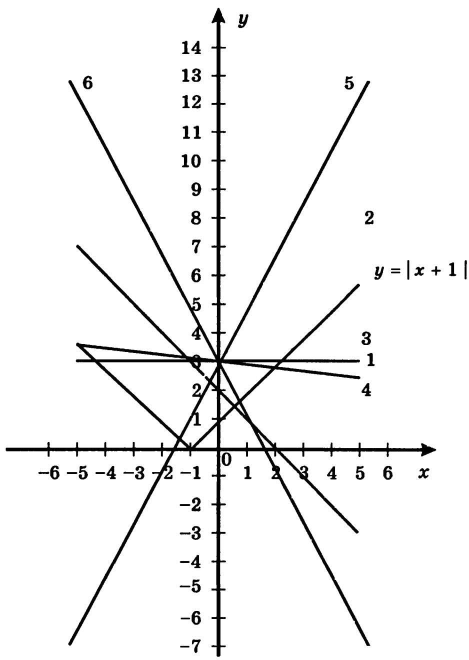
Ответ:

при $a \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1]$ — одно решение, при $-1 < a < 1$ — два решения.

6.230. **Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x + 1| = 3 - ax$.**

Решение

Графики всех функций $y = 3 - ax$, где a — любое число, — прямые с угловым коэффициентом — a, проходят через точку (0; 3).



При $a = 0$ — два решения (график № 1).

При $a = -1$ — одно решение (график № 2).

При $-1 < a < 0$ — два решения (график № 3).

При $0 < a < 1$ — два решения (график № 4).

При $a < -1$ — одно решение (график № 5).

При $a \geqslant 1$ — одно решение (график № 6).

Ответ:

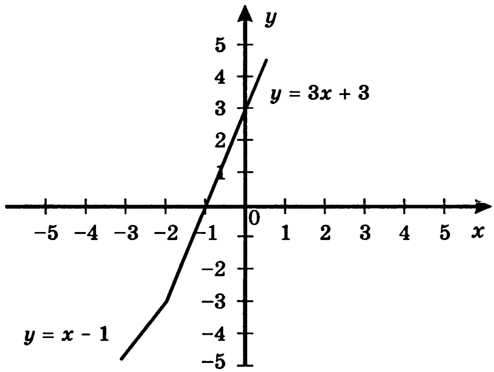
При $a \in (-1;\ 1)$ — 2 решения, при $a \leqslant -1$ и при $a \geqslant 1$ — одно решение.

6.231. **Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x+2|+1 = a-2x$.**

Решение

Построим график функции $y = |x+2| + 2x + 1$ и $y = a$.

По графику видно, что всякая прямая $y = a$ пересекает этот график в одной точке, т. е. при любом значении a уравнение имеет один корень.



Ответ:

один корень при любом a.

2 способ. $|x+2|+1 = a - 0{,}5x$

$$1)\ \begin{cases} x \geqslant -2, \\ a - 0{,}5x > 0, \\ x + 3 = a - 0{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x = \dfrac{2a}{3} - 2, \\ x < 2a \end{cases} \Leftrightarrow\ -2 \leqslant \frac{2a}{3} - 2 < 2a\ \Rightarrow\ a > 0,$$

$$4\frac{a}{3} > -2\ \Rightarrow\ a > -\frac{3}{2}.$$

Итак, при $a > 0$ $x = \frac{2}{3}a - 2$, где $x \geqslant 2$.

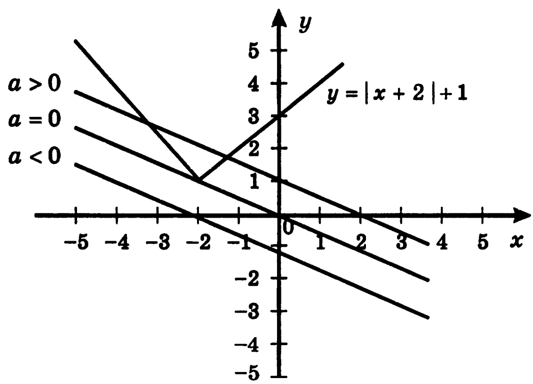
2) $\begin{cases} x < -2, \\ a - 0{,}5x > 0, \\ x = -2a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x < 2a, \\ x = -2a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2a - 2 < -2;\ a > 0.$

$-2a - 2 < 2a,\ a > -\frac{1}{2}.$

При $a > 0$ корень $x < -2$.

Значит, при $a > 0$ уравнение имеет два корня, при $a = 0$ — один корень, при $a < 0$ — корней нет (расхождение с графическим решением).

3 способ. Решаем уравнение графически. На координатной плоскости xoy строим графики функций $y = |x + 2| + 1$ и $y = a - 2x$ для каждого фиксированного значения a.



Ответ:

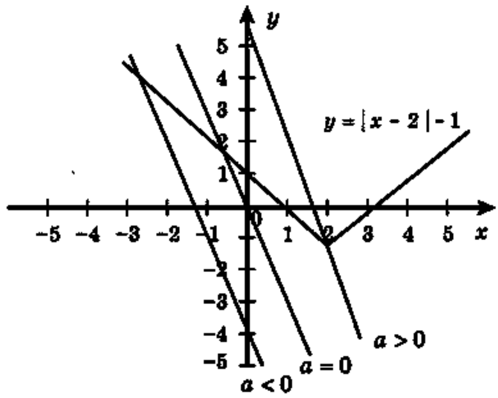
при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ одно решение; при $a > 0$ два решения.

6.232. **Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 2| - 1 = a - 3x$.**

Решение

1 способ.

Решаем уравнение графически. На координатной плоскости $x0y$ строим графики функций $y = |x - 2| - 1$ и $y = a - 3x$ для каждого фиксированного значения a.



Ответ:

При любом a одно решение.

2 способ

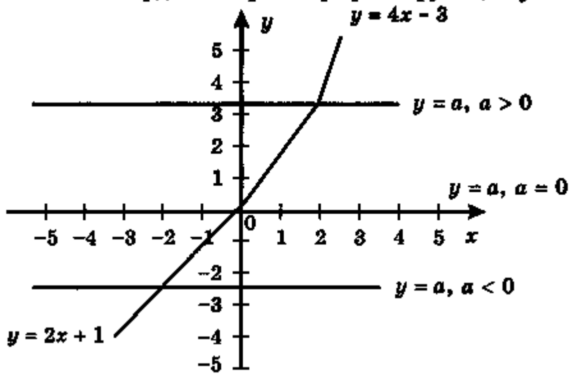
Решаем уравнение графически.

При $x-2 \geqslant 0, x \geqslant 2, x-2-1=a-3x, x+3x-3=a$.

При $x-2<0, x<2, -x+2-1=a-3x$

$y=2x+1, y=a$.

В одной системе координат строим графики функций $y=4x-3$, $y=a$.



Горизонтальная прямая $y=a$, непараллельная ни одной из двух прямых, лучи которых составляют график возрастающей функции, пересекает при любом a один из этих лучей, т. е. уравнение всегда имеет один корень.

Ответ:

при всех значениях a решение единственное.

§ 13. Задания с параметром части 3 единого государственного экзамена (ЕГЭ)

Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство: $\log_{\operatorname{tg} a}(3x+13) > 2\log_{\operatorname{tg} a}(x+3)$.

Решение

$\log_{\operatorname{tg} a}(3x+13) > 2\log_{\operatorname{tg} a}(x+3) \Leftrightarrow$

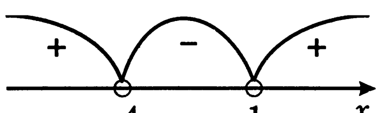
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\operatorname{tg} a<1,\\ 3x+13>0,\\ x+3>0,\\ 3x+13<(x+3)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} a>1,\\ 3x+13>0,\\ x+3>0,\\ 3x+13>(x+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\operatorname{tg} a<1,\\ x>-\dfrac{13}{3},\\ \left[\begin{array}{l} x<-4,\\ x>1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} a>1,\\ x>-\dfrac{13}{3},\\ x>-3,\\ -4<x<1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\operatorname{tg} a<1,\\ x>1; \end{cases}\\ \begin{cases} \operatorname{tg} a>1,\\ -3<x<1. \end{cases}\end{array}\right.$$

Решаем квадратное неравенство первой системы совокупности:

$3x + 13 < x^2 + 6x + 9$, $x^2 + 3x - 4 > 0$.

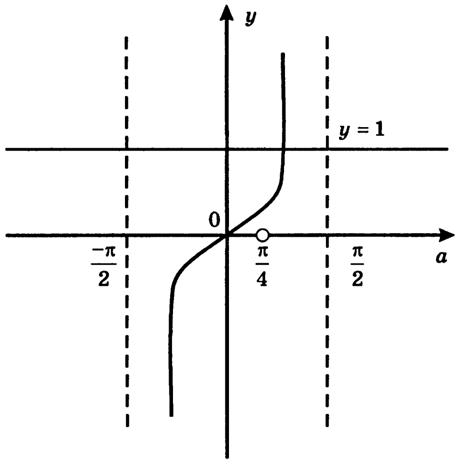
Решаем неравенство методом интервалов:

$x^2 + 3x - 4 = 0$, $x_1 = -4$; $x_2 = 1$.



Решением является $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Графическое решение неравенства $0 < \operatorname{tg} a < 1$ представлено на рисунке.



Ответ:

При $a \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$ $x \in (-3; 1)$; при $a \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$ $x \in (1; +\infty)$.

II **Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство $2\log_{\operatorname{ctg} a}(x+4) \leqslant \log_{\operatorname{ctg} a}(26+5x)$.**

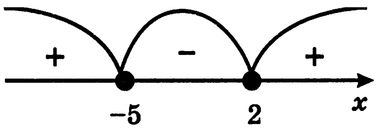
Решение

$2\log_{\operatorname{ctg} a}(x+4) \leqslant \log_{\operatorname{ctg} a}(26+5x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} a < 1, \\ x+4 > 0, \\ 26+5x > 0, \\ (x+4)^2 \geqslant 26+5x; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} a > 1, \\ x+4 > 0, \\ 26+5x > 0, \\ (x+4)^2 \leqslant 2+5x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} a < 1, \\ x > -4, \\ x > -5{,}2, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 5; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} a > 1, \\ x > -4, \\ x > -5{,}2, \\ -5 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} a < 1, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} a > 1, \\ -4 < x \leqslant 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем четвертое неравенство первой системы совокупности методом интервалов:

$x^2 + 8x + 16 - 26 - 5x \geqslant 0$, $x^2 + 3x - 10 \geqslant 0$, $x^2 + 3x - 10 = 0$,

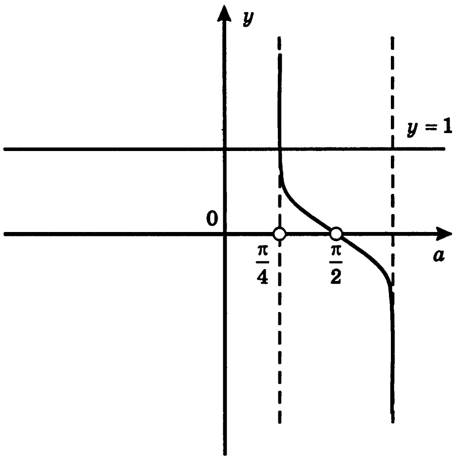


$$x = \left(\frac{-3 \pm 7}{2}\right); \; x_1 = -5; \; x_2 = 2.$$

Решение

$x \in (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$.

Графически решаем неравенство $0 < \operatorname{ctg} a < 1$.



Ответ:

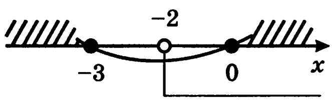
при $a \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ $x \in [2; +\infty)$; при $a \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$ $x \in (-4; 2]$.

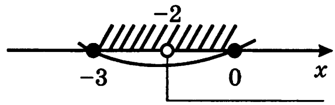
Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство $\log_{2\cos a}(x + 4) \geqslant 2\log_{2\cos a}(x + 2)$.

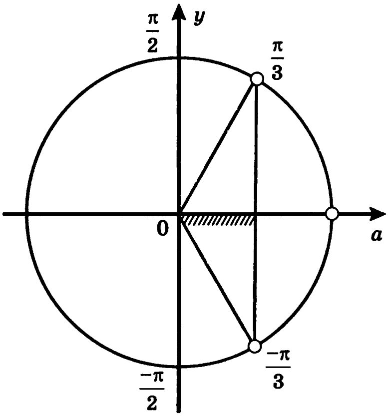
Решение

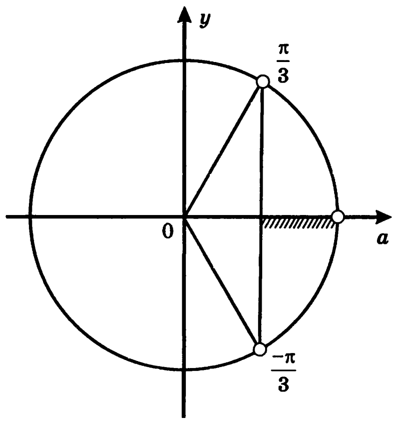
$$\begin{cases} 0 < 2\cos a < 1, \\ x + 4 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 4 \leqslant (x+2)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\cos a > 1, \\ x + 4 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ (x+4) \geqslant (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<\cos a<\dfrac{1}{2}, \\ x>-2, \\ x^2+3x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos a>\dfrac{1}{2}, \\ x>-2, \\ x^2+3x\leqslant 0. \end{cases}$$









Ответ:

при $a \in \left(\dfrac{-\pi}{2}+2\pi k; \dfrac{-\pi}{3}+2\pi k\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \in [0; +\infty)$;

при $a \in \left(\dfrac{-\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \in (-2; 0]$.

IV **Найдите все значения a, при которых уравнение $(4a + x)\arcsin x = 0$ имеет ровно один корень.**

Решение

$$(4a+x)\arcsin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4a+x=0, \\ \dfrac{-\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \\ \arcsin x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4a+x=0, \\ -1\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \\ x=0 \end{array}\right.$$

$-1 \leqslant -4a \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{4}$. Но так как корень только один: $x = 0$, то $a = 0$. Также одно решение получается, если значения a не входят в отрезок $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$, т. е. $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ответ:

$a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right) \cup \{0\}$.

V **Найдите все значения a, при которых уравнение $(4x - a)\lg(x + 2) = 0$ имеет ровно один корень.**

Решение

$$(4x - a)\lg(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x - a = 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases} \\ \lg(x + 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{a}{4}, \\ x > -2, \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\dfrac{a}{4} > -2$ при $a > -8$; $x = -1$ при $a = 4$ — единственное решение.

Также получится единственное решение, если значения a не содержатся на промежутке $(-8; +\infty)$; т. е. $a \in (-\infty; -8]$.

Ответ:

$a \in (-\infty; -8] \cup \{4\}$.

VI **Найдите все значения a, при которых уравнение $(5a - x)\sqrt{2x - 2} = 0$ имеет ровно один корень.**

Решение

$$(5a - x)\sqrt{2x - 2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5a - x = 0, \\ 2x - 2 \geqslant 0; \end{cases} \\ 2x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5a, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$x = 1$ является единственным решением при $a = \dfrac{1}{5}$.

$5a \geqslant 1$ при $a \geqslant \dfrac{1}{5}$. Отсюда видно, что нет решений при $a < \dfrac{1}{5}$. Объединяя решения, получим ответ.

Ответ:

$a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right]$.

VII **Найдите все целые значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{\dfrac{(2-x)}{(x+4)}} \geqslant ax+2-\sqrt{\dfrac{(x+1)}{(5-x)}}$ не имеет решений.**

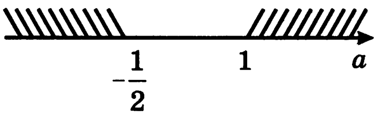
Решение

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-x-2\geqslant 0, \\ \dfrac{2-x}{x+4}\geqslant 0, \\ \dfrac{x+1}{5-x}\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)\geqslant 0, \\ \dfrac{x-2}{x+4}\leqslant 0, \\ \dfrac{x+1}{x-5}\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant -1, \end{array}\right. \\ -4<x<2, \\ -1\leqslant x<5; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Подставляем $x=-1$, $x=2$ в неравенство: $x=-1$: $1\geqslant -a+2 \Leftrightarrow a\geqslant 1$.

$x=2$: $0\geqslant 2a+2-1 \Leftrightarrow a\leqslant -\dfrac{1}{2}$.



Отсюда видно, что неравенство не имеет решений при $-\dfrac{1}{2}<a<1$. Целое значение в этом промежутке $a=0$.

Ответ:

0.

VIII **Найдите все целые положительные значения параметра a, при которых уравнение $|\sin x|=|\cos x|+a$ имеет корни. Найдите эти корни.**

Решение

Так как $|\sin x|\leqslant 1$, то $\big||\cos x|+a\big|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant|\cos x|+a\leqslant 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -a-1\leqslant|\cos x|\leqslant 1-a$.

$a=0$ не удовлетворяет условию задачи. При $a=1$ $-2\leqslant|\cos x|\leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |\cos x|=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ:

При $a=1$ $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

IX При каких значениях a число корней уравнения $|x^2 - 8|x| + 7| = a$ равно a?

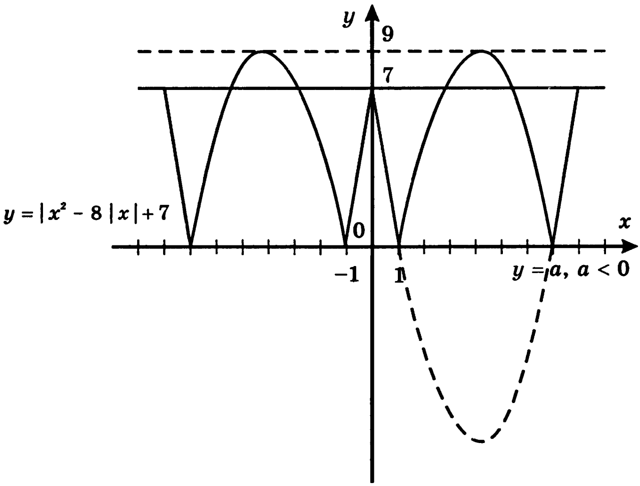
Решение

Строим график функции $y = x^2 - 8x + 7$, отрицательные участки $0y$ зеркально отражаем относительно оси $0x$; часть графика для отрицательных значений x отбрасываем, а для положительных x отражаем симметрично оси $0y$.

$y = x^2 - 8x + 7$, находим координаты вершины параболы $O'(m; n)$:

$m = \frac{-b}{2a} = 4$, $n = y(4) = -9$, $O'(4; -9)$.

Нули: $x = 1$, $x = 7$, точки пересечения с осью $0y$ $(0; 7)$.



Значения a	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 7)$	7	$(7; 9)$	$(9; +\infty)$	9
Число корней ($a = a$)	0	4	8	7	6	2	4

Ситуация из первой графы невозможна, так как $a < 0$ и $a = 0$ не может быть одновременно. В случае с четвертой графой есть число a, для которого $a = 7$.

Ответ:

7.

При каких целых значениях a уравнение $x^2(x-4)+a=0$ имеет ровно три корня?

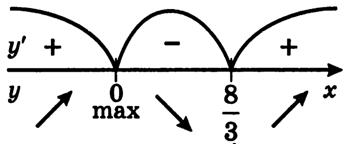
Решение

Решаем данное уравнение графически: в одной системе координат строим графики функций $y=x^2(x-4)$ и $y=-a$ и находим абсциссы их точек пересечения.

Строим график функции $y=x^2(x-4)$ с помощью производной.

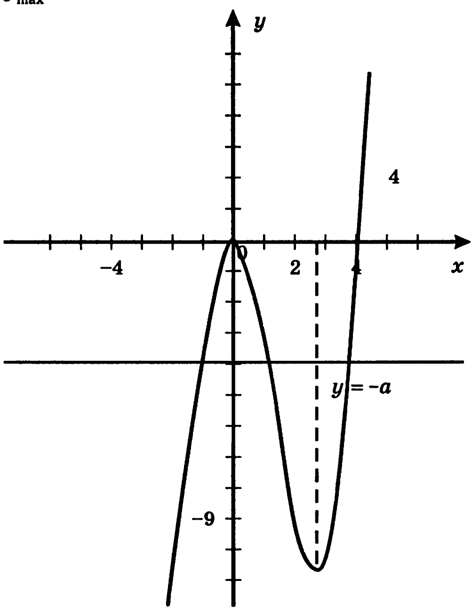
Нули: $x=0$, $x=4$.

Точка пересечения с осью $0y$: $(0; 0)$, $y'=3x^2-8x=0$ при $x=0$, $x=\dfrac{8}{3}$.



$$x_{\min}=\frac{8}{3};\ y_{\min}=\frac{64}{9}\cdot\left(\frac{8}{3}-4\right)=-\frac{4}{3}\cdot\frac{64}{9}=-\frac{256}{27}=-9\frac{13}{27}.$$

$$x_{\max}=0,\ y_{\max}=0$$



Значения $-a$	$\left(-\infty; -\dfrac{256}{27}\right)$	$-\dfrac{256}{27}$	$\left(-\dfrac{256}{27}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
Число корней	1	2	3	2	1

Уравнение имеет 3 корня, если $-\dfrac{256}{27} < -a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{256}{27}$.

Ответ:

1, 2, 3, ..., 8, 9.

XI **При каком натуральном значении d уравнение $-\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - d = 0$ имеет ровно 2 корня?**

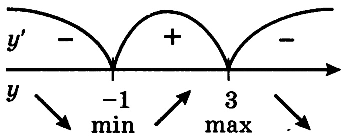
Решение

Решаем данное уравнение графически (см. предыдущую задачу).

Находим абсциссы точки пересечения графика функции:

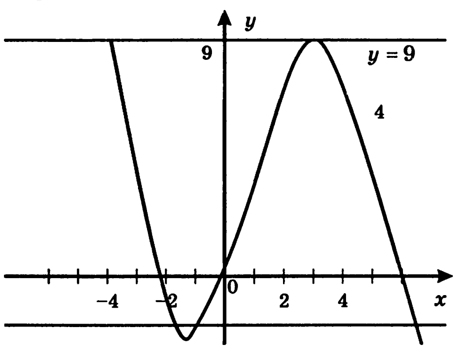
$y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ с осью $0x$: $x^3 - 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 3x^2 - 9x) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \left(\dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right.$



$y' = -x^2 + 2x + 3$, $y' = 0$ при $x = -1$; 3.

$x_{min} = -1$, $y_{min} = \dfrac{1}{3} + 1 - 3 = -\dfrac{5}{3}$ $x_{max} = 3$, $y_{max} = y(3) = -9 + 9 + 9 = 9$.



Уравнение имеет ровно 2 корня при натуральном $d = 9$.

Ответ:

9.

XII **(МГУК — 1999 г) Найдите все a, при которых неравенство** $\left|\dfrac{x^2+2ax+a^2+9}{x+a}\right| \leqslant 2x+5-x^2$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение

$$\left|\frac{(x+a)^2+9}{x+a}\right| \leqslant -(x-1)^2+6 \;\Leftrightarrow\; \frac{\left|(x+a)^2+9\right|}{|x+a|} \leqslant -(x-1)^2+6.$$

Замена: $|x+a| = t,\ t \geq 0$. $\dfrac{\left|t^2+9\right|}{t} = \dfrac{t^2+9}{t} \leqslant 6-(x-1)^2$.

1) $\dfrac{t^2+9}{t} < 6$; $t^2-6t+9 < 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 < 0$ неверно.

2) $\dfrac{t^2+9}{t} = 6$; $t = 3$; Пусть $x = 1$, тогда $|1+a| = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+a=3, \\ 1+a=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, \\ a=-4. \end{array}\right.$ Если $a \neq 2, a \neq -4$, решений нет.

Подставим $a = 2$ в исходное неравенство $\left|\dfrac{x^2+4x+13}{x+2}\right| \leqslant 2x+5-x^2$.

Если $x = 1$, то неравенство примет вид: $\left|\dfrac{1+4+13}{3}\right| \leqslant 2+5-1 \Leftrightarrow \dfrac{18}{3} \leqslant 6$ верно, $x = 1$ — решение неравенства.

Подставим $a = -4$ в исходное неравенство. $\left|\dfrac{x^2-8x+8+9}{x-4}\right| \leqslant 2x+5-x^2$, если $x = 1$, то последнее неравенство примет вид

$\left|\dfrac{1-8+8+9}{1-4}\right| \leqslant 2-15-1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \leqslant 6$ — верно, $x = 1$ — решение неравенства.

Ответ:

-4; 2.

XIII **Найдите все a, для каждого из которых ни при одном значении φ уравнение $\cos 2x + 9\sin x\cos x + \sin(2x-\varphi) = a$ не имеет решения.**

Решение

$$\cos 2x + \frac{9}{2}\sin 2x = \left|\sqrt{1+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}\right| = \frac{\sqrt{85}}{2}\sin(2x+a),$$

где $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{85}}$, $\cos a = \dfrac{9}{\sqrt{85}} \cdot \left|\dfrac{\sqrt{85}}{2}\sin(2x+a)\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{85}}{2}$, $|\sin(2x-\varphi)| \leqslant 1$

Итак, $-\dfrac{\sqrt{85}}{2} \leqslant \cos 2x + 9\sin x\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{85}}{2}$,

$$-\frac{\sqrt{85}}{2} - 1 \leqslant \cos 2x + 9\sin x\cos x + \sin(2x-\varphi) \leqslant \frac{\sqrt{85}}{2} + 1,$$

$$-\frac{\sqrt{85}}{2} - 1 \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{85}}{2} + 1.$$

Следовательно, уравнение имеет решение при $-\dfrac{\sqrt{85}}{2} - 1 \leqslant a \leqslant$,

$\leqslant \dfrac{\sqrt{85}}{2} + 1$ а не имеет при $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{\sqrt{85}}{2} - 1\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{85}}{2} + 1;\ +\infty\right)$.

Ответ:

$$a \in \left(-\infty;\ -\frac{\sqrt{85}}{2} - 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{85}}{2} + 1;\ +\infty\right).$$

XIV **(МГУК – 2000 г) Найдите все a, при которых промежутки, составляющие множество решений неравенства $\dfrac{a}{2^x - 5} \leqslant \dfrac{a}{2 \cdot 2^x - a}$, имеют конечную суммарную длину.**

Решение

Исходное неравенство можно записать в виде $\dfrac{a}{2^x - 5} - \dfrac{a}{2 \cdot 2^x - a} \leqslant 0$, или,

приводя дроби к общему знаменателю, в виде $\dfrac{a(2^x - (a-5))}{2(2^x + 5)\left(2^x - \dfrac{a}{2}\right)} \leqslant 0$.

Заменой $2^x = t$, $t > 0$ неравенство сводится к виду: $\dfrac{a(t-(a-5))}{2(t-5)\left(t - \dfrac{a}{2}\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

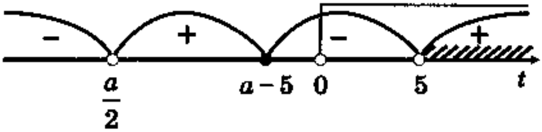
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(t-(a-5))(t-5)\left(t - \dfrac{a}{2}\right) \leqslant 0, \\ t \neq 5,\ t \neq \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая:

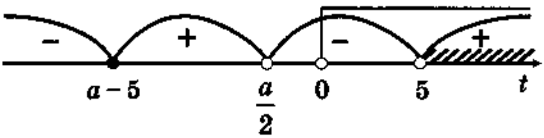
1 случай. Пусть $a < 0$. Разделив на a обе части неравенства системы, получим $(t-(a-5))(t-5)\left(t - \dfrac{a}{2}\right) \geqslant 0$. Решаем неравенство методом интервалов.

$$(t-(a-5))(t-5)\left(t-\frac{a}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=a-5<0,\\ &t=5,\\ &t=\frac{a}{2}<0.\end{aligned}\right.$$

а)



б)



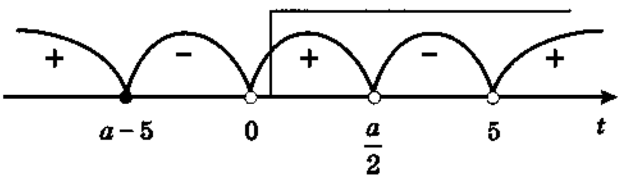
С учетом $t>0$ получаем решение $t>5$, $2^x>5$ и $x>\log_2 5$.

В этом случае требование условия задачи не выполнено.

2 случай. Пусть $a>0$, тогда неравенство системы примет вид

$$(t-(a-5))(t-5)\left(t-\frac{a}{2}\right)\leqslant 0.$$

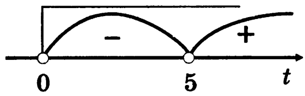
$5>0$, $\frac{a}{2}>0$, $(a-5)\leqslant 0$. Тогда $0<a\leqslant 5$.



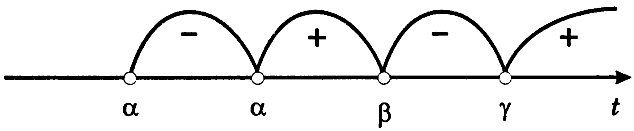
Решением неравенства будут $\frac{a}{2}<t<5 \Leftrightarrow \frac{a}{2}<2^x<5 \Leftrightarrow \log\frac{a}{2}<x<\log 5$.

Таким образом, при $0<a\leqslant 5$ решения исходного неравенства составляют интервал конечной длины и, следовательно, требование задачи выполнено.

Если $a-5>0$, то могут быть два случая: когда все три числа $a-5$, $\frac{a}{2}$, 5 различны и когда некоторые из них совпадают. Последний случай имеет место при $a=10$ (совпадут все три корня).



$0<t<5 \Leftrightarrow 0<2^x<5 \Leftrightarrow 2^x<5 \Leftrightarrow x<\log_2 5$. Итак, требование задачи при $a=10$ не выполнено. Если же $a>5$ и $a \neq 10$, т. е. все три числа $(a-5)$, $\frac{a}{2}$, 5 положительны и различны, то, не выясняя порядка их следования друг за другом, обозначим их в порядке возрастания буквами α, β, γ и отметим на оси t.



Из рисунка видно, что множество решений рассматриваемого неравенства содержит значения $t \in (0;\ a)$. Значит, множество исходного неравенства содержит значения x, для которых $0<2^x<\alpha$, т. е. $x \in (-\infty;\ \log_2 \alpha)$. Отсюда следует, что требование задачи при $a>5, a \neq 10$ не выполняется. Оно выполняется во втором случае только при $0<a \leqslant 5$.

3 случай. Пусть $a=0$. Тогда исходное неравенство принимает вид: $\frac{0}{2^x-5} \leqslant \frac{0}{2 \cdot 2^x}$. Оно верно при любом x из ОДЗ, т. е. при $x \in (-\infty;\ \log_2 5) \cup$ $\cup (\log_2 5;\ +\infty)$. В этом случае требование задачи тоже не выполнено. Итак, окончательно получаем, что искомые значения параметра: $0<a \leqslant 5$.

Ответ:

$a \in (0;\ 5]$.

XV **(МГУК – 2001 г.) Найти все принадлежащие отрезку [2; 5] значения числа a, при которых хотя бы при одном значении x из отрезка [4; 8] выполняется следующее равенство $(a^2-1)\sin^2(ax) = 2(\sin x \cos(ax) - a\cos x \sin(ax) - 1)$.**

Решение

Сначала преобразуем уравнение следующим образом:

$a^2\sin^2(ax) - \sin^2(ax) = 2\sin x\cos(ax) - 2a\cos x\sin(ax) - \sin^2 x -$ $-\cos^2 x - 1$, $a^2\sin^2(ax) + 2a\cos x\sin(ax) + c\cos^2 x = 2\sin x\cos(ax) -$ $-\sin^2 x + \sin^2(ax) - 1$, $(a\sin(ax) + \cos x)^2 = -(\sin x - \cos(ax))^2$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x = \cos(ax), \\ \cos x = -a\sin(ax) \end{cases} \qquad (1)$$

Если x — решение системы (1), то
$\sin^2 x + \cos^2 x = \cos^2(ax) + a^2\sin^2(ax)$,
т. е. $\cos^2(ax) + a^2\sin^2(ax) = 1$, $\cos^2(ax) + \sin^2(ax) + (a^2 - 1)\sin^2(ax) = 1$.
Отсюда $(a^2 - 1)\sin^2(ax) = 0$.

Таким образом, если система (1) имеет решение при $2 \leqslant a \leqslant 5$, то $\sin(ax) = 0$ и из второго уравнения получаем:

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $4 \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant 8$, $4 - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant 8 - \frac{\pi}{2}$;

$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \leqslant n \leqslant y = -\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6} \leqslant n \leqslant \frac{13}{6}$, $n = 1$, $n = 2$. При $n = 1$ $x = \frac{3}{2}\pi$,

при $n = 2$ $x = \frac{5}{2}\pi$.

1) Если $x = \frac{3}{2}\pi$, то $\cos x = 0$ и $\cos(ax) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$ из первого уравнения. Отсюда $a \cdot \frac{3}{2}\pi = \pi + 2\pi n$, $a = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}n$. Подставим эти значения a и x во второе уравнение системы: $0 = -\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}n\right)\sin(\pi + 2\pi n)$, $0 = 0$ — верно.

Из серии точек $a = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}n$, $n \in Z$, отрезку [2; 5] принадлежат только

значения 2, $\frac{10}{3}$ и $\frac{14}{3}$.

2) Если $x = \frac{5}{2}\pi$, то $\sin\frac{5}{2}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \cos ax$ из первого уравнения системы.

Тогда $ax = a \cdot \frac{5}{2}\pi = 2\pi m$; $a = \frac{4m}{5}$, $m \in Z$.

Из этой серии в отрезок [2; 5] попадают числа:
$\left(2 \leqslant \frac{4}{5}m \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m \leqslant 6\frac{1}{4}; m = 3; m = 4; m = 5; m = 6\right)$.

$a = \frac{12}{5}; \frac{16}{5}; 4; \frac{24}{5}$.

Ответ:

$2;\ \frac{10}{3};\ \frac{14}{3};\ \frac{12}{5};\ \frac{16}{5};\ 4;\ \frac{24}{5}.$

XVII **(СПбГУТ – 2001 г) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $9x^2 + (12a^2 - 6)x + 4a^2 - 3 = 0$ не превосходит числа решений уравнения $x^3 + x + (a-1)^2 2^x = (4^a - 4)\log_2\left(2^a - \frac{1}{2}\right)$.**

Решение

Функция $f(x) = x^3 + x + (a-1)^2 2^x$ определена и монотонно возрастает на всей числовой оси. Следовательно, при любом значении a второе уравнение имеет не более одного решения. Найдем дискриминант первого уравнения:

$D_1 = (6a^2 - 3)^2 - 9(4a^2 - 3) = 36(a^2 - 1)^2 \geqslant 0$. Если $a \neq \pm 1$, то $D_1 > 0$ и первое уравнение имеет два различных корня. Значит, число решений первого уравнения не может превосходить числа решений второго лишь при условии $a = \pm 1$. Случай $a = -1$ невозможен, так как $\log_2\left(2^a - \frac{1}{2}\right)$ не определен при $a = -1$.

В случае $a = 1$ второе уравнение принимает вид $x^3 + x = 0$ и имеет одно решение $x = 0$.

Ответ:

$a = 1.$

XVIII **(МГУК – 2002 г.) Найдите сумму всех целых значений вещественного параметра a, для которых каждое решение неравенства $z^2 + a^2 + 5a + 4 < 2az + 5z$ является решением неравенства $z^4 + 40z < 4z^3 + 37z^2$.**

Решение

Решим неравенство $z^2 + a^2 + 5a + 4 < 2az + 5z$.

$z^2 - z(2a+5) + a^2 + 5a + 4 < 0,\ z^2 - z(2a+5) + a^2 + 5a + 4 = 0,$
$D = (2a+5)^2 - 4(a^2 + 5a + 4) = 4a^2 + 20a + 25 - 4a^2 - 20a - 16 = 9.$

$$z = \frac{2a+5\pm 3}{2};\ \left[\begin{array}{l} z = a+4, \\ z = a+1. \end{array}\right.\ (z-a-4)(z-a-1) < 0 \Leftrightarrow a+1 < z < a+4.$$

Решим неравенство $z^4+40z<4z^3+37z^2$.

$z^4-4z^3-37z^2+40z<0 \Leftrightarrow z(z^3-4z^2-37z+40)<0$

Разложим $z^3-4z^2-37z+40$ на множители. Найдем корень многочлена подбором из чисел (делителей числа 40):

$\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm5;\ \pm8;\ \pm10;\ \pm20;\ \pm40$.

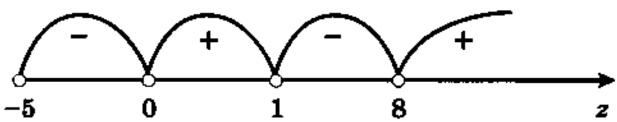
$z=1.\ 1-4-37+40=0$

Понизим степень уравнения по схеме Горнера

	1	−4	−37	40
1	1	−3	−40	0

$z^2-3z-40=0.\ D=9+160=169;\ z=\dfrac{3\pm13}{2};\ \left[\begin{array}{l}z=-5,\\ z=8\end{array}\right.$

$z(z^3-4z^2-37z+40)<0 \Leftrightarrow z(z-1)(z-8)(z+5)<0.$



Решение неравенства: $\left[\begin{array}{l}-5<z<0,\\ 1<z<8.\end{array}\right.$

Чтобы каждое решение неравенства $a+1<z<a+4$ являлось решением $\left[\begin{array}{l}-5<z<0,\\ 1<z<8,\end{array}\right.$ должно выполняться условие:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+1\geqslant-5,\\ a+4\leqslant0,\end{cases}\\ \begin{cases}a+1\geqslant1,\\ a+4\leqslant8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant-6,\\ a\leqslant-4,\end{cases}\\ \begin{cases}a\geqslant0,\\ a\leqslant4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-6\leqslant a\leqslant-4,\\ 0\leqslant a\leqslant4.\end{array}\right.$$

Сумма всех целых значений параметра a, для которого каждое решение неравенства $z^2+a^2+5a+4<2az+5z$ является решением неравенства $z^4+40z<4z^3+37z^2$; $-6+(-5)+(-4)+0+1+2+3+4=-5$.

Ответ:

-5.

XVIII **(С 4 – ЕГЭ – 2003 г.) В области определения функции $y = \log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a\right)$ взяли все целые целочисленные числа и сложили их. Найдите все значения, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 16.**

Решение

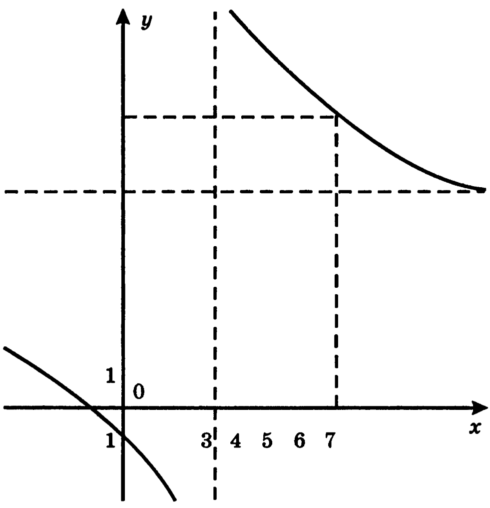
$D(y): a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a > 0 \Leftrightarrow a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a.$

Рассмотрим три случая: 1) $0 < a < 1$; 2) $a = 1$; 3) $a > 1$.

1) $0 < a < 1$

$a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a \Leftrightarrow \dfrac{7x+3}{x-3} < a$, так как функция $y = a^t$ при $0 < a < 1$ убывает.

Графиком дробно-линейной функции $u = \dfrac{7x+3}{x-3} = 7 + \dfrac{24}{x-3}$ является гипербола с горизонтальной асимптотой $y = 7$ и вертикальной асимптотой $x = 3$. Строим ее график, который проходит через точки $\left(-\dfrac{3}{7};\ 0\right)$; $(0; -1)$.



Если $x > 3$, то $\dfrac{7x+3}{x-3} > 7 > a$.

Целых положительных $x < 3$ всего два: числа 1 и 2. Их сумма меньше 9. Значит, такие a не удовлетворяют условию задачи.

2) $a = 1$ $u = \log_a (1-1) = \log_a 0$ не существует.

3) $a > 1$ $a\dfrac{7x+3}{x-3} - a^a > 0 \Leftrightarrow a\dfrac{7x+3}{x-3} > a^a \Leftrightarrow \dfrac{7x+3}{x-3} > a$, так как функция $u = a^t$ возрастает при $a > 1$.

Если $a \leqslant 7$, то любое число больше 3 является его решением и указанную в условии сумму нельзя найти.

Если $a > 7$, то множество его положительных решений — это интервал $(3; x_0)$, где $a = Z(x_0)$.

Целые числа расположены в этом интервале, начиная с 4. Вычислим суммы последовательно идущих натуральных чисел, начиная с 4: 4; $4 + 5 = 9$; $4 + 5 + 6 = 15$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; ... Значит, указанная сумма будет больше 9 и меньше 16, только если число 6 лежит в интервале $(3; x_0)$, а число 7 не лежит в этом интервале. Следовательно, $0 < x_0 \leqslant 7$. Поскольку $Z = \dfrac{7x+3}{x-3}$ убывает на $[6; 7]$, то $Z(7) \leqslant Z(x_0) <$ $< Z(6)$, т. е. $\dfrac{7\cdot 7+3}{7-3} \leqslant a < \dfrac{7\cdot 6+3}{6-3}$.

Ответ:

$[13; 15)$.

XIX **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г. (Ф Ф. Лысенко)) Найти все значения параметра a, при которых любое решение неравенства $\dfrac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)} < 1$ будет также решением неравенства $x^2 + (5-2a)x \leqslant 7{,}5a - 0{,}75a^2$.**

Решение

Решаем первое неравенство

$$\frac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)} < 1 \Leftrightarrow \log_{3x+2}(x^2 - 3x + 7) < \log_{3x+2}(3x + 2)$$

Рассмотрим случаи:

$$1)\ \begin{cases} 3x+2>1, \\ x^2-3x+7<3x+2, \\ x^2-3x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{3}, \\ 1<x<5, \\ x\in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5.$$

2) $\begin{cases} 0<3x<1, \\ x^2-3x+7>3x+2, \\ 3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x>5, \\ x<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3}.$

Итак, $\left[\begin{array}{l} 1<x<5, \\ -\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ — решение первого неравенства.

Решаем второе неравенство:

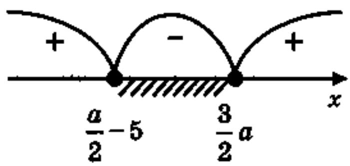
$x^2+(5-2a)\,x+0,75a^2-7,5a \leqslant 0.$

$x^2+(5-2a)\,x+0,75a^2-7,5a=0,$

$D=(5-2a)^2-4\,(0,75a^2-7,5a)=25-20a+4a^2-3a^2+30a=a^2+10a+$
$+25=(a+5)^2,\ x=\dfrac{2a-5\pm(a+5)}{2};\ x_1=\dfrac{3}{2}a,\ x_2=\dfrac{a}{2}-5.$

Рассмотрим взаимное расположение x_1 и x_2 на числовой оси.

1) $\frac{3}{2}a>\frac{a}{2}-5,\ a>-5.$



В отмеченном промежутке могут содержаться решения первого неравенства при условии $\begin{cases} \frac{a}{2}-5\leqslant-\frac{2}{3}, \\ \frac{3}{2}a\geqslant5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant\frac{26}{3}, \\ a\geqslant\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow\ \frac{10}{3}\leqslant a\leqslant\frac{26}{3}.$

2) $\frac{3}{2}a<\frac{a}{2}-5,\ a<-5\ \begin{cases} \frac{3}{2}a\leqslant-\frac{2}{3}, \\ \frac{a}{2}-5\geqslant5, \\ a<-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant-\frac{4}{9}, \\ a>20, \\ a<-5 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$

Ответ:

$a\in\left[\frac{10}{3};\ \frac{26}{3}\right].$

XX **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г. (Л.Д. Лаппо)) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-5) \leqslant (2a+1)(|x-2{,}5|-2{,}5)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2-5x+2=0$.**

Решение

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2-5x+2=0$.

По теореме Виета $x_1+x_2=5$, $x_1 \cdot x_2=2$.

$(x_1+x_2)^3 = x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3 = x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$,

$x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) = 5^3-3\cdot 2\cdot 5 = 125-30 = 95$.

При решении неравенства раскроем модуль:

1) $x-2{,}5 \geqslant 0$ $x(x-5) \leqslant (2a+1)(x-5)$; $(x-5)(x-(2a+1) \leqslant 0$.

Если $2a+1 \geqslant 5$, $a \geqslant 2$, то $5 \leqslant x \leqslant 2a+1$; если $2a+1 \leqslant 5$, $a \leqslant 2$, то $2a+1 \leqslant x \leqslant 5$.

2) $x-2{,}5 \leqslant 0$ $x(x-5)(2a+1)(-x+2{,}5-2{,}5)$, $x(x-4+2a)$, $x(x-(4-2a)) \leqslant 0$.

Если $4-2a \geqslant 0$, $a \leqslant 2$, то $0 \leqslant x \leqslant 4-2a$; если $4-2a \leqslant 0$, $a \geqslant 2$, то $4-2a \leqslant x \leqslant 0$.

Число 95 может содержаться в отрезке $[5;\ 2a+1]$ при условии, что $95 \leqslant 2a+1$; $a \geqslant 47$.

Ответ:

$[47; +\infty]$.

XXI **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г. (Ф.Ф. Лысенко)) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-10) \leqslant (a+5)(|x-5|-5)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 9,8, и положительным знаменателем.**

Решение

Преобразуем неравенство:

$x^2-10x+25 \leqslant (a+5)|x-5|-5a$

$(x-5)^2 \leqslant (a+5)|x-5|-5a$. Замена: $|x-5|=t$, $t \geqslant 0$;

$t^2-(a+5)t+5a \leqslant 0$ (1). Решаем неравенство методом интервалов.

$t^2-(a+5)t+5a=0$, $D=(a+5)^2-20a=a^2-10a+5^2=(a-5)^2$,

$t=\dfrac{a+5\pm(a-5)}{2}$; $t_1=a$; $t_2=5$.

Так как $x=9{,}8$ — решение неравенства, то $|9{,}8-5|=4{,}8=t$ — решение неравенства (1).

$4{,}8^2-(a+5)4{,}8+5a \leqslant 0$

$23{,}04-4{,}8a-24+5a=0{,}2a-0{,}98 \leqslant 0$; $a \leqslant \dfrac{9{,}6}{2}$, $a \leqslant 4{,}8$, и неравенство (1) будет иметь решения, изображенные на рисунке.

Итак, $a \leqslant t \leqslant 5$ (2).

Рассмотрим 2 случая:

1) $a \leqslant 0$; 2) $0 < a \leqslant 4{,}8$.

В первом случае неравенство (2) равносильно $t \leqslant 5$, т. е.
$|x-5| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x-5 \leqslant 5 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 10$.

$9{,}8 \in [0;\ 10]$.

$a_2=9{,}8g$, где $|g|<1$, и все последующие члены геометрической прогрессии принадлежат этому промежутку. Значит, $a \leqslant 0$ удовлетворяют условию задачи.

2) Если $0 < a \leqslant 4{,}8$,

то $\begin{cases}|x-5| \geqslant a,\\ |x-5| \leqslant 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-5 \geqslant a,\\ x-5 \leqslant -a;\end{array}\right.\\ 0 \leq x \leqslant 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geqslant a+5,\\ x \leqslant 5-a;\end{array}\right.\\ 0 \leqslant x \leq 10\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+5 \leqslant x \leqslant 10,\\ 0 \leqslant x \leqslant 5-a.\end{array}\right.$

Поскольку $0 < a \leqslant 4{,}8$, то $5 < a+5 \leqslant 9{,}8$, значит, $a_1=9{,}8 \in [a+5;\ 10]$.

Чтобы $a_2=9{,}8g$ и все последующие члены принадлежали отрезку $[0;\ 5-a]$, нужно, чтобы $9{,}8g \leqslant 5-a$. Это возможно, например, при $g=0{,}1$.

Значит, $0 < a \leqslant 4{,}8$ удовлетворяют условию задачи. Объединяя 1) и 2), получим ответ: $a \leqslant 4{,}8$.

Ответ:

$a \in (-\infty;\ 4{,}8)$.

XXII **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г.) Найдите все положительные значения a, при которых множество решений неравенства $a^{3x^2-2ax}\ 4^{2a+0{,}5} \geqslant 2^{6x+1}$ не имеет общих точек с промежутком (0,5; 50).**

Решение

Преобразуем неравенство и прологарифмируем обе части по основанию 2:

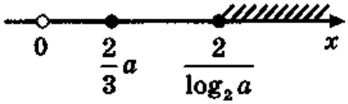
$$a^{3x^2-2ax} \geqslant 2^{6x+1-4a-1},\quad a^{3x^2-2ax} \geqslant 2^{6x-4a}$$

$$x(3x-2a)\log_2 a \geqslant 2(3x-2a),\ (3x-2a)(x\log_2 a - 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 3x-2a \geqslant 0, \\ x\log_2 a - 2 \geqslant 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} 3x-2a \leqslant 0, \\ x\log_2 a - 2 \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}a, \\ \left[\begin{aligned} &x \geqslant \dfrac{2}{\log_2 a},\ a>1 \\ &x \leqslant \dfrac{2}{\log_2 a},\ 0<a<1 \end{aligned}\right. \end{cases} \qquad (1) \\ &\begin{cases} x \leqslant \dfrac{2}{3}a, \\ \left[\begin{aligned} &x \leqslant \dfrac{2}{\log_2 a},\ a>1 \\ &x \geqslant \dfrac{2}{\log_2 a},\ 0<a<1. \end{aligned}\right. \end{cases} \qquad (2) \end{aligned}\right.$$

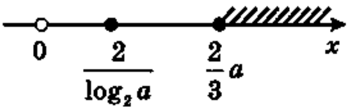
Решаем первую систему совокупности:

$$(1)\ \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}a, \\ x \geqslant \dfrac{2}{\log_2 a} > 0, \\ a > 1 \end{cases}$$

а) 

$x \geqslant \dfrac{2}{\log_2 a} > 0$. Условию задачи удовлетворяют:

$\dfrac{2}{\log_2 a} \geqslant 50 \Leftrightarrow \log_2 a \leqslant \dfrac{1}{25}$, $a \leqslant 2^{\frac{1}{25}}$, что противоречит условию $a > 1$.

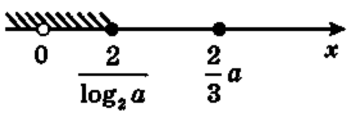
б) 

$x \geqslant \dfrac{2}{3}a$. Условию задачи удовлетворяют $\dfrac{2}{3}a \geqslant 50$; $a \geqslant \dfrac{150}{2}$; $a \geqslant 75$ удовлетворяют условию задачи.

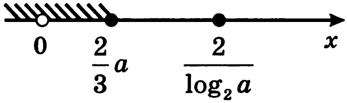
$$(1)\ \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}a, \\ x \leqslant \dfrac{2}{\log_2 a} < 0, \Leftrightarrow \varnothing. \\ 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x \leqslant \dfrac{2}{3}a, \\ x \leqslant \dfrac{2}{\log_2 a}, \\ a > 1 \end{cases}$$

Поскольку $\dfrac{2}{3}a > 0$, $\dfrac{2}{\log_2 a} > 0$, возможны два варианта взаимного расположения корней.

а) 

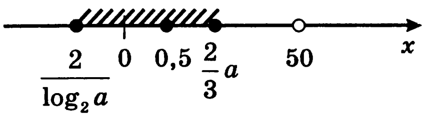
Условию задачи удовлетворяют a из неравенства $\dfrac{2}{\log_2 a} \leqslant 0,5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_2 a \geqslant 4 \Leftrightarrow a \geqslant 16$.

б) 

Здесь $\frac{2}{3}a \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow a \leqslant \frac{3}{4}$ не удовлетворяют условию $a > 1$.

$$(2)\ \begin{cases} x \leqslant \frac{2}{3}a, \\ x \geqslant \frac{2}{\log_2 a}, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{2}{3}a > 0$, а $\frac{2}{\log_2 a} < 0$, то расположение корней будет таким:



Решения $x \in \left[\frac{2}{\log_2 a}; \frac{2}{3}a\right]$ содержат решения из промежутка (0; 50) и не удовлетворяют условию задачи.

Объединяя решения $\left[\begin{array}{l} a \geqslant 75, \\ a \geqslant 16, \end{array}\right.$ получим ответ $a \geqslant 16$.

Ответ:

$[16; \infty)$.

XXIII **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г.) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x}\left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2}\right)$ содержит какой-либо отрезок длиной 4 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 7.**

Решение

1) Проведем равносильные преобразования:

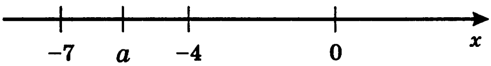
$$\frac{x-a}{x} < \frac{8(x^2-(a+2)x+2a)}{x^3} \cdot \frac{x-a}{x} < \frac{8(x(x-a)-2(x-a))}{x^3},$$

$$\frac{x^2(x-a)-8(x-a)(x-2)}{x^3}<0,\ \frac{(x-a)(x^2-8(x-2))}{x^3}<0,\ \frac{(x-a)(x-4)^2}{x^3}<0.$$

2) Поскольку $(x-4)^2 \geqslant 0$, $x^2 > 0$, то x и $x-a$ должны быть противоположных знаков, т. е. получаем систему $\begin{cases}\dfrac{x-a}{x}<0,\\ x\neq 4,\end{cases}$ равносильную исходному неравенству.

3) При $0 \leqslant a < 4$ множество решений — это интервал $(0; a)$ длиной, меньшей 4, а при $a \geqslant 4$ множество решений — это объединение двух интервалов $(0; 4) \cup (4; a)$. Содержать отрезок длиной 4 может только интервал $(4; a)$. Но тогда $a > 8$, и объединение $(0; 4) \cup (4; a)$ уже не содержится ни в каком отрезке длиной 7. Значит, такие a не удовлетворяют условию.

4) При $a < 0$ множество решений — это интервал $(a; 0)$. Он содержит отрезок длиной 4, только если его длина больше 4, т. е. при $a < -4$. Он содержится в отрезке длиной 7, только если его длина не больше 7, т. е. при $-7 \leqslant a$.



Ответ:

$[-7; -4]$.

XXIV **(С 4 – ЕГЭ – 2004 г). Найдите все положительные значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^{ax^2+3x}\ 243^{5,8x-4,8} \leqslant 81^{(2a+7)x}$ содержит числа бóльшие, чем 2, но не содержит чисел, меньших, чем −0,6.**

Решение

Преобразуем неравенство и прологарифмируем обе части по основанию 3.

$a^{ax^2+3x} \cdot 243^{5,6x-4,8} \leqslant 81^{(2a+7)x}$; $a^{ax^2+3x} \leqslant 3^{4x(2a+7)-5(5,6x-4,8)}$;

$a^{ax^2+3x} \leqslant 3^{8ax+28x-28x+24}$; $a^{x(ax+3)} \leqslant 3^{8(ax+3)}$; $x(ax+3)\log_3 a \leqslant 8(ax+3)$;

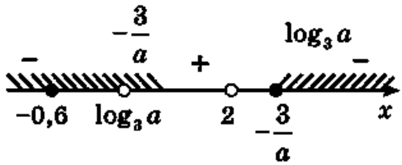
$(ax+3)(x\log_3 a-8) \leqslant 0$.

Решаем неравенство методом интервалов. Так как $a > 0$, то, разделив обе части неравенства на a, получим $\left(x+\dfrac{3}{a}\right)(x\log_3 a-8) \leqslant 0$.

Находим контрольные значения параметра:

$\log_3 a = 0$; $a = 1$. Рассмотрим 3 случая: 1) $0 < a < 1$; 2) $a = 1$; 3) $a > 1$.

1) $0 < a < 1$, $-\dfrac{3}{a} < 0$, $\log_3 a < 0$. Числа $-\dfrac{3}{a}$ и $\log_3 a$ нельзя сравнить.



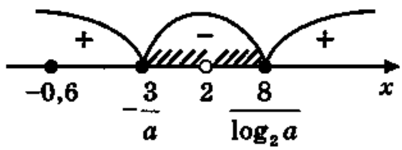
Как видно из рисунка, решения неравенства

$x \in (-\infty;\ \log_3 a) \cup \left[-\dfrac{3}{a};\ +\infty\right)$ содержат числа меньшие, чем −0,6, и не удовлетворяют условию задачи.

2) $a = 1$. $(x+3)(-8) \leqslant 0 \Leftrightarrow x+3 \geqslant 0$; $x \geqslant -3$. Решения $x \in [-3;\ +\infty)$ содержат числа, меньшие −0,6, также не удовлетворяют условию задачи.

3) $a > 1$, $\log_3 a > 0$, $-\dfrac{3}{a} < 0$.

$$\left(x + \frac{3}{a}\right)(x \log_3 a - 8) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x + \frac{3}{a}\right)\left(x - \frac{8}{\log_3 a}\right) \leqslant 0$$



Решения неравенства $-\dfrac{3}{a} \leqslant x \leqslant \dfrac{8}{\log_3 a}$. Условию задачи удовлетворяют те значения a, которые являются решением системы неравенств.

$$\begin{cases} -0{,}6 \leqslant -\dfrac{3}{a} < 2, \\ \dfrac{8}{\log_3 a} > 2, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 5, \\ a > -\dfrac{3}{2}, \\ a < 81, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leqslant a < 81.$$

Ответ:

$a \in [5;\ 81)$.

XXIV **(С4 ЕГЭ – 2005 г.). Даны два уравнения:**

$$2x+\sqrt{3x^2+(1-p)x+3(p+2)}=0 \text{ и } \sqrt[3]{x^3-100p^2-52}=\frac{10}{p+2}-x.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \geqslant -2$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p+1$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение

Второе уравнение имеет одно решение, так как в левой части — возрастающая функция, а в правой части — убывающая.

Решаем первое уравнение.

Если $x=0$, то $3(p+2)=0$, $p=-2$.

$$\begin{cases} 2x<0 \\ 3x^2+(1-p)x+3(p+2)=4x^2 \end{cases}$$

$$x^2+(p-1)x-3(p+2)=0$$

$$D=(p-1)^2+12(p+2)=p^2+10p+25=(p+5)^2$$

Уравнение имеет одно или два решения.

Тогда: $\left[\begin{array}{l} 1=(p+1)+1, \quad (1) \\ 2=(p+1)+1, \quad (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=-1, \\ p=0. \end{array}\right.$

Если $p=0$, то первое уравнение примет вид $x^2-x-6=0$, $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3 \end{array}\right.$ — одно отрицательное решение, что противоречит уравнению (2).

При $p=-1$ первое уравнение примет вид $x^2-2x-3=0$, $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1 \end{array}\right.$ — одно отрицательное решение, что удовлетворяет уравнению (1).

При $p=-1$ второе уравнение примет вид $\sqrt[3]{x^3-152}=10-x$. Проверкой убеждаемся, что $x=6$ является решением уравнения.

Ответ:

$x=6$ при $p=-1$.

XXVI **(С4 – ЕГЭ – 2005 г.). Даны два уравнения.**

$$\frac{x^4+4(p+8)x+(p^2+29p+136)}{x^2+p}=x^2-p-4$$

и $2\cos\left(\frac{\pi x}{x+4}\right)=\left(2+\sqrt{p+9}\right)x-17$.

Значения параметра p выбираются так, что $p\geqslant -9$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $9+p$ дает число различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение

Преобразуем первое уравнение.

$$x^4+4(p+8)x+(p^2+29p+136)=x^4-px^2-4x^2+px^2-p^2-4p,$$

$$4x^2+4(p+8)x+2p^2+33p+136=0,$$

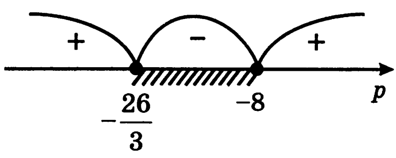
$$D_1=(2(p+8))^2-4(2p^2+33p+136)=2p^2+32p+128-8p^2-132p-544=$$
$$=-6p^2-100p-416,$$

$$-6p^2-100p-416\geqslant 0,\ 3p^2+50p+208\leqslant 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов.

$$3p^2+50p+208=0,\quad D=25^2-3\cdot 208=625-624=1,$$

$$p=\frac{-25\pm 1}{3};\quad \left[\begin{array}{l} p=-\dfrac{26}{3} \\ p=-8 \end{array}\right.$$



Итак, $D_1\geqslant 0$ при $p\in\left[-\frac{26}{3};-8\right]$, т. е. первое уравнение может иметь одно или два решения.

Если $x\leqslant 0$, то второе уравнение решений не имеет, так как левая часть меняется от -2 до 2, а правая часть меньше -17.

Если $x>0$, то $2\cos\left(\frac{\pi x}{x+4}\right)=2\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{x+4}\right)=\left(2+\sqrt{p+9}\right)x-17.$

Левая часть убывает от 2 до -2, а правая возрастает от -17 до $+\infty$, и уравнение имеет одно решение:

$$\left[\begin{array}{l}1+(9+p)=0,\\ 2+(9+p)=0,\\ 2+(9+p)=1,\\ 1+(9+p)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}p=-10, & \text{не удовлетворяет условию } p\geqslant -9,\\ p=-11, & \text{не удовлетворяет условию } p\geqslant -9,\\ p=-10, & \text{не удовлетворяет условию } p\geqslant -9,\\ p=-9, & \text{удовлетворяет условию } p\geqslant -9.\end{array}\right.$$

При $p=-9$ получаем $2\cos\frac{\pi x}{x+4}=2x-17.$

При $x=8$ $2\cos\frac{8\pi}{12}=-1;$ $2\cos\frac{2}{3}\pi=2(-\frac{1}{3})=-1;$ $-1=-1$ верно.

Ответ:

$x=8$ при $p=-9$.

Для самостоятельного решения

1. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $(0{,}4)^{x^2+1}\geqslant(6{,}25)^{a-3x}$ является решением неравенства $x^2-a^2<6x-4$.

Ответ:

$a\in(-\infty;\ -3)\cup(1;\ 4]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x+4a>5\sqrt{ax}$ содержит все члены некоторой бесконечной арифметической прогрессии, первый член которой меньше a, а разность которой равна 225.

Ответ:

$[0;\ 15)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $a^2+8a<\frac{4a^2}{x}-x(x-2a-4)$ содержит какой-либо отрезок длиной 2, но не содержит никакого отрезка длиной 3.

Ответ:

$(1;\ 2] \cup (2;\ 3]$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2 - 4x - 5)(x^2 - x - 6)(x^2 - 7x + 6) = a$ имеет нечетное число различных корней.

Ответ:

-144.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 6x - 9y + 14 = -a(a+5), \\ a = 7y - x^2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ:

-2.

6. Найдите все положительные значения числа t, при которых ровно при двух различных положительных значениях x одновременно выполняются следующие два условия $(24x - 9t + 5)(t - 9x^2 + 5) \geqslant 0$ и $\cos\left(4\pi x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$.

Ответ:

$(0;\ 1] \cup \left[5;\ \dfrac{19}{3}\right) \cup \left(\dfrac{29}{4};\ \dfrac{23}{3}\right)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых число решений уравнения $a^2(2x + a^2 - 1) = x(3x - 1)$ не превосходит числа решений уравнения $4x + x^3 = \left(4^a - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1 - 3a} - (2a + 1)^2 4$.

Ответ:

$a = -\dfrac{1}{2}$.

8. Найдите все положительные значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^{3x^2-4ax} \cdot 9^{4a-0,5} \geqslant 3^{3x-1}$ не имеет общих точек с промежутком $(1;\ 4)$.

Ответ:

$a \in \left(0; \frac{3}{4}\right] \cup [9; +\infty)$.

9. Даны два уравнения: $2\sqrt{(6p-70)x+5p-42} = p-1-4x$ и $\left(1+2^{\frac{p-11}{p-15}}\right)^x = 28-3x$. Значение параметра $p \neq 15$ выбирается так, что при умножении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается число $0{,}25(p-7)$. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Ответ:

$x = 4$ при $p = 11$.

10. В области определения функции $y = \left(a^a - a^{\frac{8x+3}{x+2}}\right)^{0,5}$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения, при которых такая сумма будет больше 5, но меньше 10.

Ответ:

$\left(3{,}4; \frac{11}{3}\right]$.

Список использованной литературы

1. *Алексеев А. Б., Климова А. А.* Математика. Примеры экзаменационных билетов для поступающих в СПбГУТ. СПб.: СТ «Факультет ДВО» 2004 — 94 с.
2. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. Минск, 1996.
3. *Горнштейн П., Полонский В., Якир М.* Необходимые условия и задачи с параметрами. Квант, 1995. № II. — С. 44–49.
4. *Денищева Л. О., Глазков Ю. А.* и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному. Математика. — М., 2004.
5. *Денищева Л. О., Глазков Ю. А.* и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. — М., 2005.
6. *Дорофеев Г. В., Муравин Г. К., Серова Е. А.* Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс. — М., 2002.
7. *Егерев В. К., Мордкович А. Г.* 100x4 задач. — М., 1993. — С. 191–196.
8. Единый государственный экзамен 2001: Тестовые задания: Математика/ *Климин С. В., Стрункина Т. В.* и др.: М-во образования РФ. — М., 2001.
9. Журналы «Квант» за 1997–2002 годы.
10. *Казак В. В., Козак А. В.* Тесты по математике. Серия «Тестирование и единый экзамен». — Ростов н/Д., 2002.
11. *Лаппо Л. Д., Попов М. А.* ЕГЭ 2004. Математика. Типовые тестовые задания: Учебно-практическое пособие. — М., 2004.
12. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике. — М., 1991.
13. *Лысенко Ф. Ф., Неймарк А. Б., Давыдов Б. Е.* Единый государственный экзамен. Математика. Учебно-тренировочные тесты. — Таганрог, 2004.
14. *Потапов М. К., Олехник С. Н.* Уравнения и неравенства с параметрами. М., 1992.
15. *Розов Н. Х., Стасенко А. Л.* Материалы вступительных экзаменов. 1993.
16. *Учебно-тренировочные* материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика./Денищева Л. О., Глазков Ю. А. и др. — М., 2002.
17. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решения задач. 10 класс. — М., 1989.
18. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решения задач. 11 класс. — М., 1991.
19. *Ястребинецкий Г. А.* Задачи с параметрами. — М., 1986.

Серия «Математика: элективный курс»

Субханкулова Софья Андреевна

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Подписано в печать 08.10.2009. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 12,71. Тираж 1000 экз. Заказ № 138.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО "ИМИРА"
143980, Московская обл, г. Железнодорожный,
ул. Керамическая, д. 3

С. А. СУБХАНКУЛОВА

ISBN 978-5-89237-291-6

9 785892 372916