

Оптика

Решение задач

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по физическим и техническим
специальностям*

Под редакцией Л.И. Бурова



Минск
«Высшая школа»
2018

УДК 535(0.75)8
ББК 22.3я73
О-62

Авторы: Л.И. Буров, А.С. Горбачевич, И.А. Катуцкая, Н.Г. Кембровская, И.И. Медведев

Рецензенты: кафедра общей физики УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (заведующий кафедрой общей физики доктор физико-математических наук, доцент А.А. Маскович); заведующий кафедрой технической физики УО «Белорусский национальный технический университет» кандидат физико-математических наук, доцент А.И. Хоружий, доцент кафедры технической физики УО «Белорусский национальный технический университет» кандидат физико-математических наук С.М. Качан

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-2981-4

© Оформление. УП «Издательство
«Вышэйшая школа»», 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эффективное усвоение студентами понятий, представлений и методов оптической теории невозможно без приобретения умений и навыков по их применению при решении различных теоретических и практических задач. К тому же именно решение задач различного уровня сложности позволяет в значительной мере прояснить те вопросы, которые оказываются плохо понятыми в рамках освоения теоретического курса.

Специфической особенностью преподавания курса оптики в учреждениях высшего образования является существенная ограниченность, если не сказать примитивность, тех понятий и представлений, которые закладываются в средней школе. В учреждениях высшего образования программа курса оптики весьма обширна, и студентам приходится сталкиваться с большим объемом понятий и представлений, которые являются совершенно новыми для них. Более того, при переходе к новым разделам курса оптики набор понятий и представлений может в значительной степени меняться. Формирование и закрепление умений и навыков оперирования этими новыми объектами требует достаточно интенсивной конкретной работы, которая более эффективна, если связана с решением конкретных теоретических и практических задач.

Вместе с тем объем практических занятий всегда ограничен учебным планом, поэтому время на решение определенного круга задач по различным и весьма разнообразным темам курса оптики оказывается также весьма ограниченным. Вследствие этого преподаватель, ведущий практические занятия, для того чтобы разобрать определенное количество задач в аудитории и подготовить студентов к выполнению домашнего задания, в большинстве случаев вынужден рассматривать каждую задачу в достаточно высоком темпе и подсказывать учебной группе путь ее реше-

ния. При этом большинство студентов просто переписывают решение, не успевая разобраться в его сути.

Наконец, огромной проблемой является то, что базовая подготовка студентов к учебной деятельности за последние 10–15 лет значительно снизилась. В каждой учебной группе лишь небольшое количество студентов готовы к интенсивной работе и способны эффективно усвоить не только ход решения рассмотренных задач, но и методику общих подходов и приемов. К тому же хромает и математическая подготовка студентов, что делает подробный разбор решения задач принципиально необходимым. Для большей части даже механическое усвоение хода решения представляет определенные трудности. Поэтому существенное значение приобретает самостоятельная работа студентов, в том числе и по выполнению домашних заданий. А для обеспечения подобной работы необходимы пособия, в которых были бы подробно расписаны те самые методы решения конкретных задач, которые рассматриваются на практических занятиях.

К сожалению, выбор таких пособий крайне ограничен. Например, широко известна прекрасная серия пособий И. В. Иродова по основным разделам курса общей физики. Вопросам оптики посвящена большая часть книги «Волновые процессы. Основные законы» [7]. Однако специфика всей серии заключается в том, что основное содержание связано с кратким изложением теоретических положений, а решение задач играет как бы второстепенную, иллюстративную роль. Задачи здесь подобраны весьма простые (достаточно сравнить с содержанием соответствующего раздела «Оптика» книги того же автора «Задачи по общей физике» [8]) и практически отсутствует анализ полученных решений. Более того, часть вопросов программы, которые должны рассматриваться на практических занятиях, в книге [7] вообще опущены.

Безусловно, можно найти пособия такого плана, которые издавались за пределами республики. Например, очень хорошая книга [4] подготовлена на физическом факультете Московского государственного университета, однако она рассчитана на достаточно подготовленных студентов, поэтому и вопросы теории в ней излагаются конспективно, и сами решения конкретных задач изложены в весьма сжатом виде (по принципу: вот решение — в нем и разбирайся). Книжки подобного плана могут быть рекомендованы лишь незначительному числу студентов.

Все упомянутые учебные пособия (а можно назвать еще целый ряд) изданы в России, и их доступность в Республике Беларусь ограничена в основном фондами библиотек. А собственного качественного учебного пособия по решению задач из курса классической оптики, который был бы пригоден для широкого круга студентов различных специальностей, в настоящее время нет вообще.

Предлагаемое учебное пособие подготовлено с учетом опыта проведения практических занятий по оптике на физическом факультете Белорусского государственного университета, и все базовые разделы пособия построены в соответствии с программой университетского курса общей физики. Каждая глава книги включает теоретическую часть, примеры решения конкретных задач и задачи для самостоятельного решения. Количество задач для самостоятельного решения весьма ограничено, так как они предназначены лишь для элементарного закрепления материала, поскольку само учебное пособие не является заменой имеющимся сборникам задач.

Теоретическая часть каждой главы включает изложение только тех понятий, законов и формул, которые необходимы для решения конкретных задач по данной теме. Однако отдельные вопросы, которые часто вызывают особые затруднения у студентов, рассматриваются достаточно подробно. В то же время теоретическая часть не является кратким конспектом соответствующей главы курса оптики, а ориентирована на те задачи, которые разбираются в дальнейшем. Предполагается, что читателю необходимо в достаточно полном объеме освоить необходимый теоретический материал (на лекциях или самостоятельно). С этой целью в конце пособия приводится перечень рекомендуемой литературы, включающий как учебные пособия разного уровня [1, 3, 9–14, 16], специальную литературу для более глубокого усвоения отдельных вопросов [2, 5, 17], так и другие методические пособия по решению задач [4, 6, 7]. В списке приведено только два сборника задач [8, 15], но в них содержатся задачи разного уровня сложности по всем разделам классического курса оптики.

При отборе разбираемых в пособии задач авторы, с одной стороны, были ограничены объемом пособия, а с другой – постарались максимально охватить все основные вопросы программы, специфические методы решения, характерные для задач именно оптического профиля, демонстрирующие отличительные черты и свойства оптических процессов, а также различный уровень сложности решения. Более того, для разбора в большинстве случаев использованы классические задачи, которые широко известны преподавателям и в различных вариациях представлены в разнообразных сборниках задач по данному курсу.

Принимая во внимание слабую физико-математическую подготовку большинства студентов (это реальный факт современного состояния подготовки выпускников средних школ) решения задач приводятся максимально (насколько возможно) подробно с пояснением основных этапов и математических выкладок. В то же время разобран ряд достаточно сложных задач с последующим анализом полученных решений, что соответствует требованиям образовательного стандарта Республики

Беларусь. Вместе с тем анализ полученных решений, особенно при вариации исходных условий, отражает внутреннюю динамику физических процессов и предостерегает от поспешных «очевидных» выводов, что пробуждает интерес к более глубокому изучению оптики.

Данное пособие ориентировано прежде всего на студентов физических специальностей университетов, однако оно может быть полезно студентам других специальностей, преподавателям учреждений высшего образования и средних специальных учебных заведений, а также учителям специализированных классов средних общеобразовательных школ.

СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Оптика — раздел классической физики, изучающий распространение оптических (световых) волн в средах различной природы и взаимодействие этих волн с различными объектами.

Световые волны имеют электромагнитную природу и перекрывают очень широкий диапазон длин волн ($100 \text{ нм} < \lambda < 0,1 \text{ мм}$), хотя волны только узкого диапазона ($400 \text{ нм} < \lambda < 750 \text{ нм}$ в вакууме) непосредственно воспринимаются зрительной системой человека [11, 12].

Согласно электромагнитной теории электрическая \vec{E} и магнитная \vec{H} компоненты волны в однородном изотропном пространстве должны подчиняться соответственно волновому уравнению

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — электрическая постоянная; ε, μ — соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ — магнитная постоянная.

Частным решением волновых уравнений (1.1) являются функции:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = E_0 \sin(\omega t - kx), \\ H &= H_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = H_0 \sin(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (1.2)$$

которые описывают так называемую *плоскую волну*. В этом случае напряженности электрического и магнитного полей изменяются по одному и тому же гармоническому закону, E_0 и H_0 называются *амплитудами*

дана, выражение, стоящее со знаком синуса, — фазой, поверхность одинаковой фазы является плоскостью.

В формулах (1.2) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ — циклическая частота (ν — частота; T — период); V — фазовая скорость волны, определяемая соотношением

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (1.3)$$

В вакууме относительные диэлектрическая (ϵ) и магнитная (μ) проницаемости равны единице. Следовательно, скорость света в вакууме $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Эта величина является фундаментальной физической постоянной, по определению точной и равной $c = 299\,792\,458$ м/с, и используется для введения основной единицы длины в СИ — метр. При решении задач используется значение скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Фаза волны может быть записана также с использованием волнового числа k , являющегося модулем волнового вектора \vec{k} и в случае плоской волны определяющего направление ее распространения (рис. 1.1):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.4)$$

где λ — длина волны, расстояние, на которое распространяется волна за время t , равное периоду T :

$$\lambda = VT. \quad (1.5)$$

Волновой поверхностью называется непрерывная поверхность, геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, а **волновым фронтом** — волновая поверхность, отделяющая область, в которой распространяется волновой процесс, от невозмущенной области. Для плоской волны, описываемой выражениями (1.2), волновой фронт представляет собой плоскость, ортогональную вектору \vec{k} (плоскость, параллельная плоскости uOz на рис. 1.1).

Плоская электромагнитная волна — физическая модель, результат частного математического решения волнового уравнения. Она не является физически реализуемым объектом вследствие бесконечности в пространстве и во времени. Однако любая электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, поэтому плоская волна — модельный объект волновой оптики.

Основные свойства плоской бегущей волны:

1) волна поперечная, т.е. векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} всегда составляют правую тройку векторов;

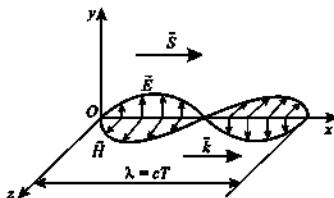


Рис. 1.1

2) в любой момент времени фазы электрической и магнитной компонент волны одинаковы (колебания векторов \vec{E} и \vec{H} синфазны);

3) для амплитудных значений векторов \vec{E} и \vec{H} выполняется соотношение

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0. \quad (1.6)$$

Частота (период) волны определяется ее источником и не изменяется при ее распространении в различных средах, однако согласно выражению (1.3) скорость распространения волны может изменяться. Величина, равная отношению фазовой скорости волны в вакууме к скорости волны в данной среде, называется *абсолютным показателем преломления* и обозначается n :

$$n = \frac{c}{V}. \quad (1.7)$$

Оптической длиной пути между точками A и B среды называется расстояние, на которое свет (оптическое излучение) распространился бы в вакууме за то же время, за которое он проходит от A до B в среде. Поскольку скорость света в любой среде меньше его скорости в вакууме, то оптическая длина пути всегда больше реально пройденного расстояния (в предельном случае в вакууме равна ему).

В однородной среде с показателем преломления n оптическая длина пути L определяется как произведение геометрической длины пути l на абсолютный показатель преломления среды n :

$$L = ln. \quad (1.8)$$

Оптической разностью хода двух волн называется разность оптических путей этих волн между двумя фиксированными точками.

На границе раздела двух однородных изотропных сред скорость электромагнитной волны изменяется скачком, а отношением скоростей определяется относительный показатель преломления второй среды относительно первой:

$$n_{12} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (1.9)$$

Монохроматической называется плоская волна строго определенной частоты. Такая волна не существует в реальности, но используется как удобная модель при рассмотрении различных оптических явлений.

Каждый реальный источник света дает излучение, которое всегда можно представить в виде определенного набора монохроматических волн. *Спектром излучения* называется распределение относительного вклада спектральных компонент (монохроматических волн). На практике излучение можно считать монохроматическим (или квазимонохроматическим), если оно содержит спектральные компоненты в очень узком интервале длин волн или частот.

Перенос энергии электромагнитной волной определяется вектором Умова – Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (1.10)$$

модуль которого имеет смысл плотности потока энергии, переносимой волной, т.е. равен количеству энергии, переносимой через единичную площадку ds_x (нормальную к вектору \vec{S}) за единицу времени:

$$|\vec{S}| = \frac{dW}{ds_x dt}. \quad (1.11)$$

Следовательно направление вектора Умова – Пойнтинга показывает направление распространения энергии световой волны (в геометрической оптике это направление светового луча). Так как векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются с течением времени, то величина $|\vec{S}|$ является быстро осциллирующей (быстро изменяющейся с течением времени) функцией. В связи с этим используется понятие интенсивности излучения как среднего за период значения плотности потока энергии:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = \langle S \rangle. \quad (1.12)$$

На практике (при регистрации какими-либо устройствами) интенсивность излучения определяется как среднее значение плотности

потока энергии за время t , значительно большее периода, т.е. $t \gg T$. При этом если $t \neq mT$, но $m \gg 1$ (что обычно и имеет место на практике), то отличие от значения, определяемого соотношением (1.12), весьма мало (порядка m^{-1}).

В процессах взаимодействия световой волны и вещества основополагающую роль играет ее электрическая составляющая, поэтому вектор напряженности \vec{E} называют *световым вектором*. Согласно третьему свойству электромагнитных волн для амплитудных значений векторов \vec{E} и \vec{H} выполняется соотношение (1.6), поэтому можно показать, что интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитудного значения электрического вектора: $I \sim E_0^2$. В случае распространения света в однородной немагнитной изотропной среде с показателем преломления n интенсивность может быть рассчитана по формуле

$$I = \frac{\epsilon_0 c n E_0^2}{2}, \quad (1.13)$$

где использованы соотношения $n = \sqrt{\epsilon}$ и $\mu = 1$.

Простейшей моделью элементарного излучателя электромагнитной волны является электрический диполь, дипольный момент которого гармонически изменяется во времени:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t.$$

Такой электрический диполь называется *гармоническим осциллятором*. Для точек, удаленных от диполя на расстояния, много большие излучаемой длины волны ($r \gg \lambda$), в так называемой волновой зоне зависимость модуля напряженности электрического поля $E(r, t)$ в вакууме (рис. 1.2) определяется следующим выражением:

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\partial^2 p(0, (t-r/c))}{\partial t^2} \sin \theta, \quad (1.14)$$

где аргумент $(t-r/c)$ отражает запаздывание волны, обусловленное конечной скоростью ее распространения; θ — угол между направлениями радиуса-вектора \vec{r} и дипольным моментом \vec{p} .

Необходимо подчеркнуть, что вектор \vec{E} лежит в одной плоскости с векторами \vec{p} и \vec{r} и ортогонален радиусу-вектору.

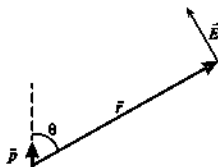


Рис. 1.2

Важным модельным объектом в оптике является так называемый *точечный источник света*. В однородном изотропном пространстве такой источник должен испускать *сферическую волну*, т.е. волну, амплитуда которой зависит только от расстояния до источника. Такая волна может также испускаться совокупностью хаотически ориентированных гармонических осцилляторов, сосредоточенной в очень малом объеме.

При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга наблюдается изменение частоты, регистрируемой приемником. Это явление называется *эффектом Доплера* (в честь ученого, теоретически обосновавшего зависимость регистрируемой приемником частоты от скорости и направления движения источника волн и приемника относительно друг друга). Формула для расчета регистрируемой приемником частоты при эффекте Доплера для электромагнитных волн установлена на основе специальной теории относительности (СТО):

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c) \cos \alpha}, \quad (1.15)$$

где ν , ν_0 — соответственно регистрируемая частота и частота источника волн; V — модуль относительной скорости приемника и источника; c — скорость света; α — угол между направлением на источник волн и вектором относительной скорости в системе отсчета приемника.

При небольшой относительной скорости $V \ll c$ релятивистская формула совпадает с классической формулой эффекта Доплера для механических волн:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (V/c) \cos \alpha}. \quad (1.16)$$

Эффект Доплера называется *продольным* при движении источника и приемника вдоль одной прямой. При направлении относительной скорости навстречу приемнику $\alpha = \pi$ и $\cos \alpha = -1$, а при направлении относительной скорости от приемника $\alpha = 0$ и $\cos \alpha = 1$.

Эффект Доплера называется *поперечным* при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, т.е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно к линии наблюдения (например, приемник расположен в центре окружности, по которой движется источник). В этом случае регистрируемая частота определяется по формуле

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} < \nu_0. \quad (1.17)$$

Поперечный эффект Доплера определяется отношением V^2/c^2 , а продольный — отношением V/c , т.е. поперечный эффект изменения регистрируемой частоты по сравнению с частотой источника слабее продольного. В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие вдоль направления наблюдения и перпендикулярно к этому направлению. Соответственно одна из составляющих скорости будет обеспечивать продольный эффект Доплера, а другая — поперечный.

В предлагаемых далее задачах (если это не оговорено специально) подразумевается, что распространение световых волн рассматривается в немагнитных средах, для которых относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$, а при распространении в воздухе $\epsilon = 1$.

Примеры решения задач

Задача 1.1. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, электрический вектор которой задан соотношением

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega t - kx),$$

где \vec{e}_y — орт оси Oy (см. рис. 1.1); $E_0 = 0,14$ В/м; $k = 1,0 \cdot 10^7$ м⁻¹.

- Найти длину волны.
- Записать выражение для вектора \vec{H} .
- Определить интенсивность волны.

Решение. а) Из соотношения (1.4) находим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6,28 \cdot 10^{-7}, \quad \lambda \approx 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

б) Поскольку в электромагнитной волне векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов, то направление вектора \vec{H} определяется векторным произведением $[\vec{k} \times \vec{E}]$, где \vec{k} — волновой вектор. Тогда, если колебания вектора \vec{E} происходят вдоль оси Oy , то вектор \vec{H} колеблется синфазно вектору \vec{E} вдоль оси Oz согласно формулам (1.2). Следовательно, можно записать:

$$\vec{H} = \vec{e}_z H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Для определения амплитуды H_0 используем соотношение (1.6) для вакуума:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0, \quad H_0 = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{1,257 \cdot 10^{-6}}} \cdot 0,14 \approx 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ А/м.}$$

в) Для расчета интенсивности используем выражение (1.12). Поскольку векторы напряженности электрического и магнитного полей волны перпендикулярны друг к другу ($\vec{E} \perp \vec{H}$), то модуль плотности потока энергии $S = |\vec{S}| = |\vec{E}||\vec{H}| = E_0 \cdot H_0 \cos^2(\omega t - kx)$. Согласно формуле (1.12)

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} t - kx \right) dt = \frac{E_0 H_0}{2},$$

$$I = \frac{0,14 \cdot 0,37 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,026 \cdot 10^{-3} = 26 \text{ мкВт/м}^2.$$

Задача 1.2. Плоская электромагнитная волна с амплитудой вектора напряженности $E_0 = 0,50$ мВ/м распространяется в воде с показателем преломления $n = 1,33$. Найти интенсивность волны и амплитудное значение напряженности магнитного поля.

Решение. Используем выражение (1.13) для интенсивности:

$$I = \frac{\epsilon_0 c n E_0^2}{2}, \quad I = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot (0,50 \cdot 10^{-3})^2}{2} = 0,44 \cdot 10^{-9} \text{ Вт/м}^2.$$

Для расчета модуля амплитуды напряженности магнитного поля используем полученное в предыдущей задаче выражение $I = \frac{E_0 H_0}{2}$. Тогда

$$H_0 = \frac{2I}{E_0}, \quad H_0 = \frac{2 \cdot 0,44 \cdot 10^{-9}}{0,50 \cdot 10^{-3}} \approx 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ А/м}.$$

Задача 1.3. Плоская синусоидальная электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрической компоненты $E_0 = 1$ мВ/м распространяется в воздухе. Вычислить энергию, переносимую волной через плоскую поверхность площадью $s = 10 \text{ см}^2$, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны, за промежуток времени $t = 1$ мин. Принять, что период волны $T \ll t$.

Решение. Перенос энергии электромагнитной волной определяется вектором Умова – Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$. Поскольку электрический и магнитный векторы перпендикулярны друг к другу ($\vec{E} \perp \vec{H}$), а их колебания синфазны, то модуль вектора Умова – Пойнтинга в фиксированной точке пространства можно записать следующим образом:

$$|\vec{S}| = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t.$$

Согласно соотношению (1.6) $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0$, тогда

$$H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}, \quad |\vec{S}| = E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \sin^2 \omega t.$$

В то же время согласно выражению (1.11) модуль вектора Умова – Пойнтинга $|\vec{S}| = \frac{dW}{sd t}$. Выразим $dW = s(E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \sin^2 \omega t) dt$ и рассчитаем энергию, переносимую волной за время t через поверхность площадью s :

$$W = \int_0^t (E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \sin^2 \omega t) dt = s E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \int_0^t \sin^2 \omega t \cdot dt.$$

Используем то, что $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$. Тогда

$$W = s E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \int_0^t \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) dt = s E_0^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right).$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) = \left(\frac{t}{2} - \frac{T}{8\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right).$$

Поскольку согласно условию задачи $T \ll t$, то

$$\left(\frac{t}{2} - \frac{T}{8\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right) \ll \left(\frac{t}{2} - \frac{T}{8\pi} \right) \approx \frac{t}{2}.$$

Следовательно, искомая энергия

$$W = \frac{s E_0^2 t}{2} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}.$$

$$W = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot (10^{-3})^2 \cdot 60}{2} \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{1,26 \cdot 10^{-6}}} \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

Задача 1.4. Световое излучение с длиной волны $\lambda_1 = 500$ нм распространяется из воздуха в воду с абсолютным показателем преломления $n = 1,33$. Как при этом переходом изменяются характеристики светового излучения и его восприятие человеком?

Решение. Согласно формуле (1.3) скорость излучения в воздухе равна скорости света:

$$V_1 = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Абсолютный показатель преломления характеризует изменение скорости света при переходе из вакуума в среду, поэтому из соотношения (1.7) следует, что скорость в воде $V_2 = \frac{c}{n}$, $V_2 = 2,3 \cdot 10^8$ м/с. Следовательно, скорость изменилась на $\Delta V = V_2 - V_1 = c \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$, $\Delta V = -0,74 \cdot 10^8$ м/с, т.е. уменьшилась.

Поскольку при переходе из одной среды в другую частота и период электромагнитной волны не изменяются, то, согласно формуле (1.5), изменяется длина волны:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V_2 T}{V_1 T} = n, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n}, \quad \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1 \left(\frac{1}{n} - 1 \right),$$

$$\Delta \lambda = 500 \cdot 10^{-9} (0,752 - 1) \approx -124 \text{ нм,}$$

т.е. длина волны уменьшилась.

Как уже указывалось выше, частота светового излучения определяется источником и не изменяется при переходе из одной среды в другую. Установлено, что восприятие светового излучения зрительной системой человека определяется интенсивностью и частотой излучения. При переходе светового излучения из воздуха в воду частота не изменяется, поэтому в воде при достаточной интенсивности заданное излучение человеком будет восприниматься того же цвета, как и в воздухе.

Задача 1.5. Монохроматический свет падает нормально на прозрачную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 1$ см. Для волны данной длины показатель преломления пластинки линейно изменяется от значения $n_1 = 1,4$ на верхней грани до значения $n_2 = 1,6$ на нижней грани. Найти время распространения света в пластинке.

Решение. Введем ось Ox , направленную перпендикулярно к пластинке, и начало отсчета в точке падения света на верхнюю грань пластинки. Изменение показателя преломления $n(x)$ пластинки вдоль выбранного направления обусловлено изменением скорости распространения света $V(x)$ вдоль оси Ox .

Пусть $dt = \frac{dx}{V(x)}$ – время прохождения светом слоя малой толщины dx .

Согласно формуле (1.7) $n(x) = \frac{c}{V(x)}$, тогда $dt = \frac{dx}{V(x)} = \frac{n(x)}{c} dx$.

По условию показатель преломления изменяется вдоль заданного направления линейно, т.е. $n_x = a + bx$, где a и b – константы. Определим эти константы. В выбранной системе отсчета $n_x = a = n_1$ при $x = 0$, а при $x = H$ $n_x = a + bH = n_2$. Отсюда $a = n_1$, $b = \frac{n_2 - n_1}{H}$. Показатель преломления зависит от координаты согласно выражению $n_x = n_1 + \frac{n_2 - n_1}{H} x$.

Определим время распространения света в пластинке:

$$t = \int_0^H dt = \int_0^H \frac{n_x}{c} dx = \frac{1}{c} \int_0^H \left(n_1 + \frac{n_2 - n_1}{H} x \right) dx, \quad t = \frac{n_1 H}{c} + \frac{n_2 - n_1}{cH} \frac{H^2}{2} = \frac{H(n_2 + n_1)}{2c},$$

$$t = \frac{10 \cdot 10^{-3}(1,4 + 1,6)}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

Задача 1.6. На пути плоской световой волны, распространяющейся в вакууме, поставили стеклянную пластину толщиной $H = 1,0$ мм с показателем преломления $n = 1,55$. Определить, на сколько ΔL изменится оптическая длина пути волны, если свет падает на пластину:

- нормально;
- под углом $\theta_1 = 45^\circ$.

Решение. а) Согласно формуле (1.8) оптическая длина пути света в пластине при нормальном падении $L_2 = nH$, а в отсутствие пластины оптическая длина пути $L_1 = H$. Изменение оптической длины пути $\Delta L = L_2 - L_1 = H(n - 1)$, $\Delta L = 0,55$ мм.

б) На рис. 1.3 показано направление распространения волны в момент падения на пластину под углом $\theta_1 = 45^\circ$ к перпендикуляру в точку падения и положение плоского фронта волны ($A_1 A_2$). В ре-

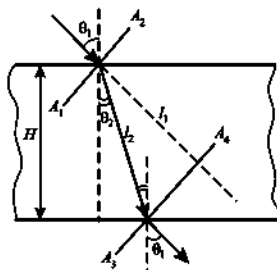


Рис. 1.3

в результате преломления направление распространения волны изменится, и по закону преломления

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n,$$

где θ_2 — угол между направлением распространения световой волны в пластине и перпендикуляром. На выходе из пластины направление распространения волны будет параллельно первоначальному, положение волнового фронта в этот момент — A_3A_4 .

Оптическая длина пути в пластине $L_2 = l_2 n$. Используем тригонометрические формулы и закон преломления:

$$l_2 = \frac{H}{\cos \theta_2} = \frac{H}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \frac{Hn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}, \quad L_2 = \frac{Hn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}.$$

При отсутствии пластины фронт волны прошёл бы в вакууме расстояние, равное l_1 . Выразим это расстояние через величины, заданные в условии задачи:

$$l_1 = l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2).$$

Используя те же соотношения и выражение для l_2 , получим:

$$l_1 = \frac{H}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} (\cos \theta_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + \sin^2 \theta_1) = H \left(\cos \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right).$$

Изменение оптической длины пути

$$\begin{aligned} \Delta L = L_2 - l_1 &= \frac{Hn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} - H \left(\cos \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right) = \\ &= H \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \cos \theta_1 \right), \end{aligned}$$

$$\Delta L = 1,0 \left(\sqrt{(1,55)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,6752 \approx 0,68 \text{ мм.}$$

Задача 1.7. Получить зависимость плотности потока излучаемой энергии от времени в волновой зоне диполя с дипольным моментом $\vec{p} = \vec{e}_z p_0 \sin \omega t$, где \vec{e}_z — орт оси Oz; $p_0 = 1,6 \cdot 10^{-29}$ Кл·м; $\omega = 39 \cdot 10^{14}$ рад/с.

Найти интенсивность излучения на расстоянии $r = 1,0$ м от диполя при угле θ между радиусом-вектором и вектором дипольного момента, равном $0^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

Решение. Длина излучаемой диполем волны в вакууме

$$\lambda = cT = \frac{c \cdot 2\pi}{\omega} \approx 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ м,}$$

т.е. выполняется соотношение $\lambda \ll r$, что соответствует волновой зоне. В этом случае найдем выражение для светового вектора согласно формуле (1.14):

$$E(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} p_0 \omega^2 \sin \omega t \sin \theta$$

и выражение для напряженности магнитного поля волны для вакуума согласно формуле (1.6):

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{E}{\mu_0 c}.$$

По формуле (1.10)

$$S = |\vec{S}| = |\vec{E}||\vec{H}| = \frac{(E)^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t \sin^2 \theta.$$

Поскольку $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c} = c$, то выражение для плотности потока энергии излучения диполя имеет вид

$$S(\theta) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} p_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t \sin^2 \theta.$$

Из соотношения (1.12) следует, что интенсивность излучения — среднее по времени значение плотности потока энергии:

$$I(\theta) = \langle S \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta.$$

Рассчитаем величину, стоящую перед $\sin^2 \theta$:

$$\frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} p_0^2 \omega^4 \approx 0,79 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2 = 0,79 \text{ мкВт/м}^2.$$

Следовательно, интенсивность излучения зависит от угла между радиусом-вектором \vec{r} точки и вектором \vec{p} дипольного момента (см. рис. 1.2):

$$I = 0,79 \sin^2 \theta \text{ мкВт/м}^2.$$

При $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ интенсивность $I = 0$, т.е. если колебания дипольного момента происходят вдоль оси Oz , то в этом направлении не происходит излучения электромагнитных волн. При $\theta = 90^\circ$ интенсивность $I = 0,79 \text{ мкВт/м}^2$, т.е. интенсивность излучения диполя максимальна в направлении, перпендикулярном к направлению колебаний дипольного момента. При $\theta = 30^\circ$ $I = 0,40 \text{ мкВт/м}^2$.

Задача 1.8. Найти максимальное отношение относительной скорости сближения источника и приемника к скорости света V/c , при котором для расчета регистрируемой приемником частоты с относительной погрешностью $\delta = 0,01$ можно использовать классическую формулу (1.16) вместо релятивистской формулы (1.15).

Решение. Согласно релятивистской формуле (1.15) регистрируемая частота

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c) \cos \alpha},$$

где α — угол между направлением на источник волн и вектором относительной скорости в системе отсчета приемника.

При сближении источника и приемника $\alpha = \pi$, $\cos \alpha = -1$. В этом случае регистрируемая частота

$$\nu_p = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)},$$

Согласно классической формуле $\nu_k = \frac{\nu_0}{1 + (V/c) \cos \alpha}$ в случае сближения источника и приемника $\nu_k = \frac{\nu_0}{1 - (V/c)}$.

$$\text{Относительная погрешность } \delta = \frac{\nu_k - \nu_p}{\nu_k} = 1 - \frac{\nu_p}{\nu_k} \text{ и } \frac{\nu_p}{\nu_k} = 1 - \delta.$$

Найдем отношение частот: $\frac{\nu_p}{\nu_k} = \sqrt{1 - V^2/c^2} = 1 - \delta$. Выразим отношение скоростей:

$$V/c = \sqrt{1 - (1 - \delta)^2}, \quad V/c = \sqrt{1 - (1 - 0,01)^2} \approx 0,14,$$

т.е. классическую формулу можно использовать вместо релятивистской при относительной скорости сближения источника и приемника $V < 0,14c$, $V = 0,14 \cdot 3 \cdot 10^8 = 0,42 \cdot 10^8$ м/с, что составляет примерно 14% от скорости света в вакууме.

Задача 1.9. Определить линейную скорость вращения точек, расположенных на экваторе Солнца, если при фотографировании спектра Солнца с поверхности Земли было обнаружено, что желтая спектральная линия с длиной волны $\lambda_0 = 5890 \text{ \AA}$ в спектрах, полученных от одного и другого краев солнечного диска, была смещена на $\Delta\lambda = 0,08 \text{ \AA}$. Считать, что линейная скорость вращения точек, расположенных на экваторе Солнца, $V \ll c$.

Решение. Поскольку Земля движется вокруг Солнца, то относительная скорость краев солнечного диска относительно Земли не направлена вдоль прямой наблюдения. Но согласно астрономическим данным линейная скорость вращения точек, расположенных на экваторе Солнца, и скорость движения Земли вокруг Солнца много меньше скорости света.

Как отмечалось ранее, поперечный эффект Доплера определяется отношением V^2/c^2 , а продольный – отношением V/c , поэтому поперечным эффектом изменения регистрируемой частоты по сравнению с продольным в данном случае можно пренебречь.

Будем считать, что в системе отсчета, связанной с местом фотографирования, при наблюдении краев солнечного диска линейная скорость для одного края диска будет направлена на наблюдателя, а для другого края – от наблюдателя. По формуле (1.16) для приближающегося к наблюдателю края диска получим:

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + (V/c)\cos\alpha} = \frac{\nu_0}{1 + (V/c)\cos\pi} = \frac{\nu_0 c}{c - V}.$$

Поскольку $\lambda = \frac{c}{\nu}$, то регистрируемая для этого края длина волны $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{\lambda_0(c - V)}{c}$. Для удаляющегося края диска $\nu_2 = \frac{\nu_0 c}{c + V}$ и соответственно регистрируемая длина волны $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{\lambda_0(c + V)}{c}$. Следовательно, регистрируемое смещение наблюдаемой спектральной линии $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2V\lambda_0}{c}$. Отсюда линейная скорость вращения Солнца

$$V = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda}, \quad V = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0,08}{2 \cdot 5890} \approx 0,02 \cdot 10^5 \text{ (м/с)} = 2 \text{ км/с.}$$

Задача 1.10. При изучении спектра паров натрия ($M = 23 \times 10^{-23}$ кг/моль) было обнаружено, что для спектральной линии с длиной волны $\lambda = 590$ нм ее полуширина $\Delta\lambda = 3,0 \cdot 10^{-3}$ нм. Оценить температуру газа.

Решение. Для разреженных одноатомных паров и газов при пропускании электрического тока регистрируется характерный для каждого газа линейчатый спектр (набор электромагнитных волн) излучения, состоящий из отдельных спектральных линий с максимальной интенсивностью при определенных частотах (длинах волн). Полушириной спектральной линии называется интервал длин волн (частот), на границах которого интенсивность в 2 раза меньше ее максимального значения. Уширение спектральной линии может определяться различными факторами. Одним из наиболее существенных является эффект Доплера.

Выражение «оценить температуру» предполагает, что учитывается лишь одна причина уширения спектральной линии – хаотическое движение атомов с различными достаточно большими скоростями, поэтому для оценки температуры используем понятие средней квадратичной скорости хаотического движения, которая для разреженного одноатомного газа определяется по формуле

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где T – температура газа; $m = \frac{M}{N_A}$ – масса атома натрия; N_A – число Авогадро; M – молярная масса.

Будем учитывать, как и в задаче 1.8, только продольный эффект Доплера. Для оценки температуры по уширению спектральной линии используем полученное в задаче 1.8 выражение $\Delta\lambda = \frac{2V\lambda_0}{c}$, подставив в него среднюю квадратичную скорость: $\Delta\lambda = \frac{2\langle V \rangle\lambda_0}{c}$. Тогда

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda}.$$

Получим формулу для оценки температуры:

$$T = \frac{M(c\Delta\lambda)^2}{3R(2\lambda)^2}, \quad T = \frac{23 \cdot 10^{-3} (3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-12})^2}{3 \cdot 8,31 (2 \cdot 590 \cdot 10^{-9})^2} \approx 5,4 \cdot 10^2 \text{ К.}$$

Задача 1.11. При изучении спектра излучения некоторой галактики было обнаружено, что для спектральной линии излучения водорода $\lambda_0 = 656,3$ нм было зарегистрирована длина волны $\lambda = 658,8$ нм (увеличение регистрируемой длины волны называется красным смещением). Найти скорость галактики относительно Земли. Удаляется или приближается галактика?

Решение. Согласно астрономическим данным скорость галактик намного меньше скорости света ($V \ll c$), поэтому воспользуемся формулами, полученными в задаче 1.8. В случае приближения источника $\lambda_1 = \frac{\lambda_0(c-V)}{c}$, а в случае удаления — $\lambda_2 = \frac{\lambda_0(c+V)}{c}$, т.е. при удалении источника длина волны возрастает. Следовательно, поскольку зарегистрированная длина волны больше, то галактика удаляется от Земли. Тогда

$$\lambda = \frac{\lambda_0(c+V)}{c}, \quad V = \frac{(658,8 - 656,3) \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^8}{656,3 \cdot 10^{-9}} \approx 1,14 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. а) В каком направлении распространяется электромагнитная волна, направление линий вектора напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} которой показано на рис. 1.4? б) Как изменится направление распространения волны, если:

- 1) линии вектора \vec{E} будут направлены в противоположную сторону;
- 2) линии вектора \vec{H} будут направлены в противоположную сторону?

Отв е т: а) направлении, противоположном оси Oz; б) 1), 2) направление распространения волны изменится на противоположное.

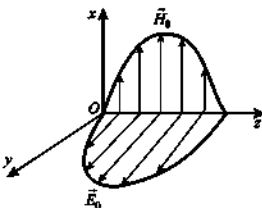


Рис. 1.4

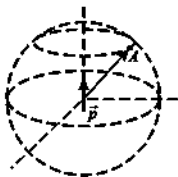


Рис. 1.5

2. На рис. 1.5 показано положение электрического диполя и точки A , расположенной на сферической поверхности в волновой зоне диполя. Показать направление векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{S} , \vec{k} в какой-либо момент времени и спустя полпериода колебаний диполя.

3. Длительность импульса излучения рубинового лазера $t = 100$ мкс, его энергия $W = 300$ мДж, диаметр пучка $d = 5,0$ мм. Найти интенсивность излучения лазера и амплитудное

значение напряженности электрического поля, считая распределение энергии по сечению импульса равномерным.

Ответ: $I = \frac{W}{St} = \frac{4W}{\pi d^2 t}$, $I \approx 1,5 \cdot 10^8$ Вт/м²; $E_0 = \sqrt{I/(\epsilon_0 \epsilon)}$, $E_0 \approx 0,24$ МВ/м.

4. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,0$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 5,0$ В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны H_0 , ее скорость V в данной среде и абсолютный показатель преломления среды n .

Ответ: $H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon \epsilon_0 / \mu_0}$, $H_0 \approx 19$ мА/м; $V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, $V \approx 2,1 \cdot 10^8$ м/с; $n = \frac{c}{V}$, $n \approx 1,4$.

5. Монохроматическая электромагнитная волна распространяется в однородной изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,5$. Вектор напряженности электрического поля волны зависит от времени по закону $\vec{E} = 2,0 \cos(2\pi \nu t + \alpha) \vec{e}_y$, В/м, где \vec{e}_y — орт оси Oy в декартовой системе координат. Записать зависимость от времени для вектора напряженности магнитного поля \vec{H} и вектора Умова — Пойнтинга \vec{S} в этой системе отчета.

Ответ: $\vec{H} = 8,4 \cos(2\pi \nu t + \alpha) \vec{e}_z$ (мА/м), $\vec{S} = 17 \cos^2(2\pi \nu t + \alpha) \vec{e}_x$ (мВт/м²).

6. В однородной изотропной среде с показателем преломления $n = 1,5$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности магнитного поля $H_0 = 50$ мА/м. Найти амплитуду напряженности электрического поля волны E_0 и интенсивность волны I .

Ответ: $E_0 = \frac{H_0}{n} \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $E_0 \approx 13$ В/м; $I = \frac{E_0 H_0}{2}$, $I \approx 0,33$ Вт/м².

7. Оптическая длина пути световой волны в некоторой однородной среде $L = 3,0$ м, а геометрическая длина пути $l = 2,0$ м. Найти показатель преломления среды.

Ответ: $n = 1,5$.

8. Две плоские световые волны распространяются в воздухе вдоль параллельных направлений, расположенных на расстоянии $d = 10$ мм друг от друга, и падают перпендикулярно к грани треугольной призмы (рис. 1.6) с преломляющим углом $\alpha = 30^\circ$ и показателем преломления $n = 1,5$. Найти оптическую разность путей волн при выходе из призмы.

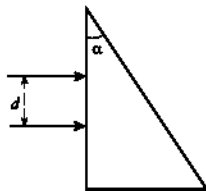


Рис. 1.6

Ответ: $\Delta L = nd \operatorname{tg} \alpha$, $\Delta L = 8,7$ мм.

9. Найти интенсивность света I на расстоянии $l = 2$ м от горящей лампочки мощностью $P = 100$ Вт, если на таком расстоянии считать ее точечным изотропным источником света.

Ответ: $I = \frac{W}{St} = \frac{P}{4\pi l^2}$, $I \approx 2$ Вт/м².

10. При движении космического корабля к Земле красный луч лазера с поверхности Земли с длиной волны $\lambda_1 = 650$ нм воспринимался космонавтом как зеленый луч с длиной волны $\lambda_2 = 510$ нм. а) Найти отношение скорости космического корабля к скорости света, используя релятивистскую и классическую формулы для расчета регистрируемой частоты. б) Оценить относительную погрешность использования классической формулы, если это отношение неизвестно.

Ответ: а) $(V/c)_k = (1 - \lambda_2/\lambda_1)$, $(V/c)_k = 0,215$; $(V/c)_p = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$,
 $(V/c)_p = 0,238$; б) $\frac{(V/c)_p - (V/c)_k}{(V/c)_p} \cdot 100\% = 9,66\%$.

11. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью $V = 10$ км/с, передатчик на корабле излучает электромагнитную волну с частотой $\nu_0 = 30$ МГц. На сколько частота сигнала $(\nu - \nu_0)$, принимаемого на Земле, отличается от этой частоты излучаемого сигнала?

Ответ: $\nu - \nu_0 = -\nu_0 \frac{V}{c+V}$, $\nu - \nu_0 \approx -1,0$ кГц.

12. Для определения скорости движения машин по шоссе используют передатчик сантиметровых электромагнитных волн, который регистрирует скорость приближения и удаления машины. Передатчик работает на частоте $\nu_0 = 2450$ МГц. На сколько отличается частота, регистрируемая прибором при приближении машины ($\nu_{\text{пр}}$), от частоты, регистрируемой при удалении машины ($\nu_{\text{уд}}$) при скорости движения машины $V = 90,0$ км/ч?

Ответ: $\nu_{\text{пр}} - \nu_{\text{уд}} = \frac{2\nu_0 c V}{c^2 - V^2}$, $\nu_{\text{пр}} - \nu_{\text{уд}} = 408$ Гц.

2

ФОТОМЕТРИЯ

Фотометрические величины и понятия можно разделить на два класса, связанных с двумя подходами к регистрации светового воздействия. С одной стороны, свет ассоциируется со зрительным оцепенением человека. Фотометрические величины этого класса называют *световыми*. С другой стороны, электромагнитная природа света позволяет проводить «абсолютные» измерения в том плане, что они выполняются с помощью приборов и всегда могут быть воспроизведены с заданной точностью. Фотометрические величины этого класса называются *энергетическими*. Различие в способах измерения отражается не в определении фотометрических величин, а только в названиях единиц измерения. Дадим определение «световых» величин.

Основной фотометрической величиной является *световой поток* Φ , который определяется количеством световой энергии Q , переносимой через произвольную поверхность за единицу времени t .

$$\Phi = \frac{Q}{t}.$$

Широко используемым объектом в оптике является точечный источник, в качестве которого может выступать любой источник световой энергии, размеры которого существенно меньше расстояния до точки наблюдения. Если такой источник находится в однородной непоглощающей среде, то через любое сечение конуса, вершиной которого является источник, будет протекать один и тот же световой поток. Рассмотрим распространение светового потока от источника L через малую площадку dS , нормаль к которой образует угол α с направлением на источник, а расстояние от источника до центра площадки рав-

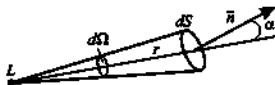


Рис. 2.1

но r (рис. 2.1). Линии, которые соединяют источник и точки, расположенные на краях площадки dS , являются образующими конуса, в вершине которого находится источник. Раствор этого конуса образует телесный угол $d\Omega$. Величина

малого угла $d\Omega$ определяется как отношение площади площадки, перпендикулярной к направлению на источник, к квадрату расстояния от источника до площадки:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}. \quad (2.1)$$

Можно ввести характеристику точечного источника — *силу света* J как отношение светового потока в некотором направлении в пределах малого телесного угла $d\Omega$ к величине этого угла, т.е.

$$J = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (2.2)$$

Если величина J не зависит от направления, то источник называется *изотропным*.

Для источника, который в условиях конкретной задачи уже нельзя считать точечным, можно использовать принцип суперпозиции, т.е. рассматривать световой поток, испускаемый с поверхности источника, как суперпозицию потоков, испускаемых совокупностью элементарных светящихся поверхностей dS' , на которые можно разбить исходную поверхность источника.

Яркостью L источника называется величина, определяемая световым потоком $d\Phi$, испускаемым в данном направлении с поверхности источника dS' в пределах малого телесного угла $d\Omega$ (рис. 2.2):

$$L = \frac{d\Phi}{dS' \cos \theta d\Omega}, \quad (2.3)$$

где θ — угол между нормалью к поверхности dS' и направлением наблюдения. Величина $dS' \cos \theta$ представляет собой видимую площадь светящейся площадки в выбранном направлении. Видимая площадь, как правило, меньше величины dS' .

Если яркость источника не зависит от направления излучения светового потока, то такой источник называют *ламбертовым*. Солнце с небольшим допущением можно считать ламбертовым источником:

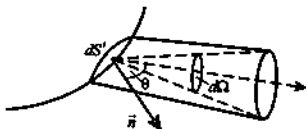


Рис. 2.2

яркость его поверхности почти не зависит от направления. Вследствие этого Солнце выглядит почти как плоский диск равномерной яркости.

Светимость M называется величина, равная отношению исходящего с площадки dS' по всем направлениям светового потока к величине dS' :

$$M = \frac{d\Phi_{\text{изл}}}{dS'} = \frac{\int d\Phi(\Omega)}{dS'}. \quad (2.4)$$

Для ламбертовых источников выполняется соотношение

$$M = \pi L. \quad (2.5)$$

Доказательство этого соотношения приведено в решении задачи 2.4.

Для объектов, на которые падает световое излучение, вводится величина *освещенности* E_{Φ} как отношение падающего на произвольную площадку освещаемого объекта потока $d\Phi_{\text{пад}}$ к площади этой площадки dS :

$$E_{\Phi} = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}. \quad (2.6)$$

Освещенность площадки dS будет меняться при изменении ее ориентации относительно падающего на нее излучения. Для освещенности, создаваемой точечным источником, используя формулы (2.1), (2.2), получим:

$$E_{\Phi} = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS} = \frac{J d\Omega}{dS} = \frac{J dS \cos \alpha}{r^2 dS} = \frac{J \cos \alpha}{r^2}. \quad (2.7)$$

Это соотношение известно как *закон обратных квадратов*.

Все приведенные выражения справедливы как для световых, так и для энергетических величин. Для расчета энергетических величин будем использовать те же формулы, что и для световых, заменяя соответствующие световые величины энергетическими, например световой поток — потоком энергии, светимость — энергетической светимостью и т.д.

Для сопоставления световых и энергетических величин учтем, что человеческий глаз является спектральным селективным приемником электромагнитного излучения, т.е. его чувствительность зависит от длины волны излучения. Спектральная чувствительность глаза индивидуальна для каждого человека, более того, даже для конкретного человека она зависит от условий наблюдения, в частности от освещенности. Усредненные характеристики чувствительности глаза, полученные в определенных заданных условиях эксперимента (выбор условий определяется анатомическим строением глаза и механизмами фоторецепции), являются стандартом, и мы будем использовать эти характеристики в дальнейшем. Установлено, что при нормальной освещенности (при дневном свете) глаз обладает максимальной чувствительностью к излучению с длиной волны $\lambda_m = 0,555$ мкм.

Относительной спектральной чувствительностью глаза $V(\lambda)$ для излучения с длиной волны λ называют отношение двух потоков излучения с длинами волн соответственно $\lambda_m = 0,555$ мкм (соответствует максимуму чувствительности глаза) и λ , вызывающих в стандартных условиях одинаковые зрительные ощущения:

$$V(\lambda) = \frac{\Phi_{\lambda_m}}{\Phi_{\lambda}}$$

где Φ_{λ_m} , Φ_{λ} — потоки энергии, выраженные в единицах мощности СИ — ваттах.

Одинаковые зрительные ощущения можно трактовать так, что «измеряемые» глазом величины потоков излучения оказываются одинаковыми, т.е. $\Phi_{\lambda_m} = \Phi_{\lambda}$, где Φ_{λ_m} и Φ_{λ} — потоки излучения, выраженные в люменах. Относительная спектральная чувствительность глаза представлена на рис. 2.3.

Кривая имеет максимум при $\lambda_m = 0,555$ мкм, что соответствует $V(0,555) = 1,0$. Для излучения, например, с длиной волны 0,520 мкм $V(0,520) = 0,68$ (рис. 2.3). Это означает, что при воздействии излучения с длиной волны 0,520 мкм для достижения такого же зрительного ощу-

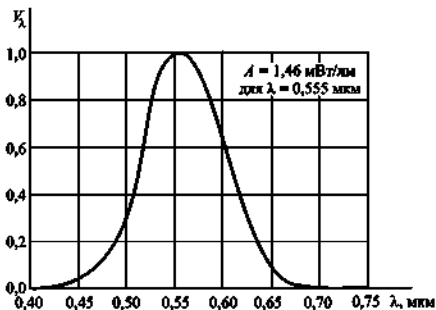


Рис. 2.3

щения, как и вызываемого излучением с длиной волны 0,555 мкм, необходим в 1,5 раза больший поток энергии:

$$\Phi_{\Sigma(\lambda=0,520)} = \frac{1}{0,68} \Phi_{\Sigma(\lambda=0,555)} \approx 1,5 \Phi_{\Sigma(\lambda=0,555)}$$

Для излучения с длиной волны $\lambda_m = 0,555$ мкм (соответствующего максимуму кривой относительной спектральной чувствительности глаза) определены соотношения, позволяющие сопоставлять величины светового потока, выраженные в люменах (световые единицы) и ваттах (энергетические единицы), а именно:

$$\Phi = K \Phi_{\Sigma}, \quad \Phi_{\Sigma} = A \Phi. \quad (2.8)$$

Здесь Φ — световой поток, выраженный в люменах; Φ_{Σ} — поток энергии, выраженный в ваттах.

Величина $K = 683$ лм/Вт называется *световой эффективностью излучения*, а обратная ей величина $A = 0,00146$ Вт/лм — *механическим эквивалентом света*.

Следует отметить, что кривая относительной спектральной чувствительности глаза является усредненной и спектральная чувствительность конкретного человека может отличаться (иногда весьма сильно) от этой усредненной. В условиях слабой освещенности (например, в сумерках) максимум кривой чувствительности смещается в область меньших значений длин волн.

В заключение приведем соответствующие световые и энергетические единицы для фотометрических величин (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Световые и энергетические единицы

Величина	Обозначение	Единица световая		Единица энергетическая	
		Наименование обозначения	Обозначение	Наименование обозначения	Обозначение
Световой поток	Φ	люмен	лм	ватт	Вт
Сила света	J	кандела	кд	ватт на стерадиан	Вт/ср
Яркость	L	кандела на метр квадратный	кд/м ²	ватт на стерадиан на метр квадратный	Вт/(ср·м ²)
Светимость	M	люмен на метр квадратный	лм/м ²	ватт на метр квадратный	Вт/м ²
Освещенность	E_{Φ}	люкс	лк	ватт на метр квадратный	Вт/м ²

Примеры решения задач

Задача 2.1. Найти с помощью кривой относительной спектральной чувствительности глаза (рис. 2.3):

а) величины потоков энергии, если величина световых потоков $\Phi = 1,00$ лм, а длины волн излучения $\lambda_1 = 0,51$ и $\lambda_2 = 0,64$ мкм соответственно;

б) величину светового потока в световых единицах, если излучение занимает интервал длин волн от $\lambda_1 = 0,58$ мкм до $\lambda_2 = 0,64$ мкм. Величина потока энергии $\Phi_0 = 4,50$ мВт, причем она равномерно распределена по всем длинам волн указанного интервала. Считать, что в данном спектральном интервале функция $V(\lambda)$ линейно зависит от длины волны.

Решение. а) С помощью рис. 2.3 найдем относительную спектральную световую чувствительность $V(\lambda_1)$ излучения с длиной волны $\lambda_1 = 0,51$ мкм: $V(0,51) = 0,50$. Это означает, что для того чтобы потоки излучения с длинами волн 0,555 мкм и 0,51 мкм вызывали одинаковое зрительное ощущение, их величины должны быть связаны соотношением $\Phi_{\lambda=0,555} = 0,50\Phi_{\lambda=0,51}$. Для того чтобы найти поток $\Phi_{\lambda=0,555}$ (в ваттах) для излучения с длинной волны $\lambda = 0,555$ мкм, воспользуемся

соотношением (2.8) в виде $\Phi_{\lambda(\lambda=0,555)} = A\Phi$. Тогда для потока с длиной волны $\lambda_1 = 0,51$ мкм получим:

$$\Phi_{\lambda(\lambda=0,51)} = \frac{\Phi_{\lambda(\lambda=0,555)}}{V(0,51)} = \frac{A\Phi}{V(0,51)}, \quad \Phi_{\lambda(\lambda=0,51)} = \frac{0,00146 \cdot 1}{0,5} = 2,9 \text{ мВт.}$$

Аналогично для $\lambda_2 = 0,64$ мкм $V(0,64) = 0,15$ (рис. 2.3). Искомый поток энергии

$$\Phi_{\lambda(\lambda=0,64)} = \frac{A\Phi}{V(0,64)}, \quad \Phi_{\lambda(\lambda=0,64)} = \frac{0,00146 \cdot 1}{0,15} = 9,7 \text{ мВт.}$$

б) По условию поток энергии Φ_2 распределен равномерно по заданному интервалу длин волн, поэтому на малый интервал $d\lambda$ приходится поток энергии $d\Phi_2 = \frac{\Phi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda$. Используя формулу (2.8) и с учетом спектральной чувствительности глаза для соответствующего светового потока запишем:

$$d\Phi = KV(\lambda) \frac{\Phi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda.$$

Согласно кривой относительной спектральной чувствительности глаза (рис. 2.3) функция $V(\lambda)$ убывает в интервале от $\lambda_1 = 0,58$ мкм до $\lambda_2 = 0,64$ мкм. По условию задачи в этом интервале длин волн $V(\lambda)$ линейно зависит от длины волны. Следовательно, зависимость $V(\lambda)$ в указанном интервале длин волн можно изобразить в виде отрезка прямой (рис. 2.4).

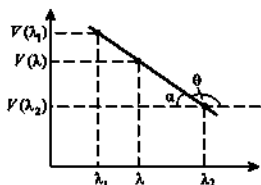


Рис. 2.4

С помощью рис. 2.4 найдем коэффициент $V(\lambda)$ для излучения с длиной волны λ , удовлетворяющей условию $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$:

$$V(\lambda) = V(\lambda_1) + (\lambda - \lambda_1) \operatorname{tg} \theta, \quad V(\lambda) = V(\lambda_1) - (\lambda - \lambda_1) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Значения коэффициентов найдены по кривой относительной спектральной чувствительности глаза (рис. 2.3): $V(\lambda_1) = 0,85$ и $V(\lambda_2) = 0,15$.

Следовательно,

$$d\Phi = K \left(V(\lambda_1) - \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) \right) \frac{\Phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda.$$

Проинтегрируем последнее выражение по заданному диапазону длин волн:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{K\Phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(V(\lambda_1) - \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) \right) d\lambda = \\ &= \frac{K\Phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(V(\lambda_1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda - \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\lambda + \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \right) = \\ &= \frac{K\Phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(V(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{(V(\lambda_1) - V(\lambda_2))(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} + (V(\lambda_1) - V(\lambda_2))\lambda_1 \right) = \\ &= \frac{K\Phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(V(\lambda_1)\lambda_2 - \frac{(V(\lambda_1) - V(\lambda_2))(\lambda_2 + \lambda_1)}{2} - V(\lambda_2)\lambda_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} K\Phi_0 (V(\lambda_1) + V(\lambda_2)) = 1,5 \text{ лм}. \end{aligned}$$

Задача 2.2. Испускаемый точечным изотропным источником по всем направлениям полный световой поток $\Phi = 10$ лм, длина волны излучения $\lambda = 0,59$ мкм. Найти амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей на расстоянии $r = 1,0$ м от источника в вакууме.

Решение. Для расчета напряженностей электрического и магнитного полей надо найти поток энергии, испускаемый источником. Поскольку соотношения (2.8), позволяющие сопоставить световые и энергетические единицы, установлены для излучения с длиной волны, соответствующей максимальной чувствительности глаза (0,555 мкм), то предварительно найдем величину потока энергии (в ваттах), соответствующую $\Phi = 10$ лм, для излучения с длиной волны $\lambda = 0,555$ мкм.

По соотношениям (2.8) $\Phi_{\lambda=0,555} = A\Phi$. Поскольку чувствительность глаза на других длинах волн ниже, то поток (в ваттах), соответствующий 10 лм, для излучения с длиной волны $\lambda = 0,59$ мкм будет больше:

$$\Phi_{\lambda=0,59} = \frac{\Phi_{\lambda=0,555}}{V(\lambda)} = \frac{A\Phi}{V(\lambda)}$$

Коэффициент $V(\lambda)$ найдем по кривой относительной спектральной чувствительности глаза (рис. 2.3): $V(\lambda) = V(0,59) = 0,70$.

Плотность потока энергии (интенсивность) I на расстоянии r от точечного изотропного источника можно найти, разделив полный поток энергии $\Phi_{\lambda=0,59}$, излучаемый источником по всем направлениям, на площадь (площадь поверхности сферы радиусом r , в центре которой расположен источник), через которую этот поток проходит. Получим:

$$I = \frac{\Phi_{\lambda=0,59}}{4\pi r^2} = \frac{A\Phi}{4\pi r^2 V(\lambda)}$$

При решении задачи 1.1 для интенсивности плоской волны было получено выражение $I = E_0 H_0 / 2$, где E_0 , H_0 – амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей соответственно. С учетом соотношения (1.6) получим:

$$\frac{\sqrt{\epsilon_0} E_0^2}{\sqrt{\mu_0} 2} = \frac{A\Phi}{4\pi r^2 V(\lambda)}$$

Следовательно,

$$E_0^2 = \frac{A\Phi}{2\pi r^2 V(\lambda)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \text{и} \quad H_0^2 = \frac{A\Phi}{2\pi r^2 V(\lambda)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

Окончательно имеем: $E_0 = 1,1$ В/м, $H_0 = 3,0$ мА/м.

Задача 2.3. Найти среднюю освещенность облучаемой части непрозрачной сферы, если на нее падает:

а) параллельный однородный световой поток, создающий в точке нормального падения на сферу освещенность $E_{\text{п}}$;

б) свет от точечного изотропного источника L , находящегося на расстоянии $l = 100$ см от центра сферы; радиус сферы $R = 60$ см, сила света $J = 36$ кд.

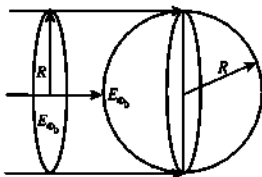


Рис. 2.5

Решение. а) Среднюю освещенность облучаемой части непрозрачной сферы можно найти так:

$$\langle E_{\Phi} \rangle = \Phi_{\text{пад}} / S,$$

где $\Phi_{\text{пад}}$ – световой поток, падающий на сферу; S – площадь облучаемой части сферы.

Световой поток, падающий на сферу в течение некоторого промежутка времени, равен потоку, переносимому за то же время через круглую площадку радиусом, равным радиусу сферы, и расположенную перпендикулярно к падающему излучению (рис. 2.5).

Световой поток, переносимый ежесекундно через единицу площади площадки dS_n , нормальной к потоку, определим как $I = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS_n}$, где $d\Phi_{\text{пад}}$ – величина потока; dS_n – площадь площадки. Вследствие однородности светового потока на круглую площадку, нормальную к падающему излучению, падает световой поток $\Phi_{\text{пад}} = I\pi R^2$. По определению освещенность произвольной площадки dS $E_{\Phi} = d\Phi_{\text{пад}} / dS$, следовательно, I совпадает с освещенностью E_{Φ} точки сферы, на которую световой поток падает нормально. Световой поток освещает ровно половину сферы, освещаемая площадь $S = 2\pi R^2$. С учетом полученных соотношений

$$\langle E_{\Phi} \rangle = \frac{E_{\Phi_0} \pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{E_{\Phi_0}}{2}.$$

Решение можно найти и другим способом. В соответствии с определением среднее значение освещенности

$$\langle E_{\Phi} \rangle = \frac{1}{S} \int_S E_{\Phi} dS,$$

где E_{Φ} – освещенность элемента сферы dS ; S – площадь освещенной части сферы.

Свяжем центр сферы с системой сферических координат (r, θ, φ) , где r – расстояние от заданной точки до центра системы координат (точка O) (рис. 2.6). Расстояние от точки O до всех точек поверхности сферы

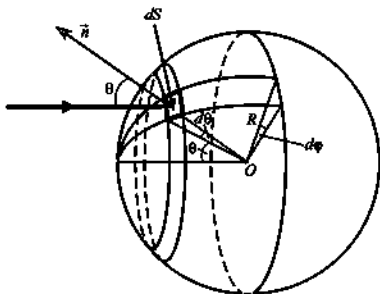


Рис. 2.6

равно R . Площадь элемента поверхности сферы dS в выбранной системе координат $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Величина падающего на этот элемент dS поверхности сферы светового потока $d\Phi_{\text{пад}} = IdS_n$, где I — плотность потока (которая равна E_{Φ_0}); $dS_n = dS \cos \theta$ — проекция элемента dS на плоскость, перпендикулярную к падающему излучению. Тогда

$$E_{\Phi} = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS} = \frac{E_{\Phi_0} dS_n}{dS} = E_{\Phi_0} \cos \theta,$$

где E_{Φ_0} — освещенность в точке нормального падения.

Окончательно получаем:

$$\langle E_{\Phi} \rangle = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} E_{\Phi_0} R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = E_{\Phi_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{E_{\Phi_0}}{2}.$$

б) Среднюю освещенность определяем как $\langle E_{\Phi} \rangle = \Phi_{\text{пад}}/S$. Освещенная часть сферы радиусом R представляет собой шаровой сегмент высотой h и площадью S (рис. 2.7).

Воспользуемся формулой для площади поверхности шарового сегмента $S = 2\pi R h$. Из геометрических соображений (рис. 2.7) найдем: $h = R - R \sin \alpha$, $\sin \alpha = R/l$. Тогда $S = 2\pi R^2 (1 - R/l)$.

Источник является точечным изотропным, следовательно, падающий на сферу поток энергии $\Phi_{\text{пад}} = J\Omega$, где J — сила света, не зависящая от

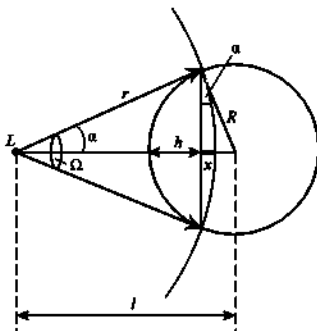


Рис. 2.7

направления излучения; Ω – телесный угол, под которым сфера видна из точки, где расположен источник (рис. 2.7): $\Omega = \frac{S'}{r^2}$; $S' = 2\pi r x$ – площадь поверхности шарового сегмента сферы радиусом r и высотой x .

Из геометрических соображений (рис. 2.7) найдем: $r = \sqrt{l^2 - R^2}$, $x = r - r \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{r}{l}$, $\Omega = \frac{S'}{r^2} = \frac{2\pi r x}{r^2} = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{r}{l}\right)$.

Окончательно получим:

$$\langle E_{\Phi} \rangle = \frac{J\Omega}{S} = J \frac{2\pi\left(1 - \frac{r}{l}\right)}{2\pi R^2\left(1 - \frac{R}{l}\right)} = J \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}}\right)}{R^2\left(1 - \frac{R}{l}\right)} = 50 \text{ лк.}$$

Задача 2.4. Определить светимость однородной плоской поверхности, яркость которой зависит от направления по закону $L = L_0 \cos \theta$, где θ – угол между направлением излучения и нормалью к поверхности.

Решение. Выделим элемент светящейся поверхности dS' . Свяжем элемент dS' с центром сферической системы координат (r, θ, φ) , где r – расстояние от центра системы координат (точка O) до заданной точки; θ и φ – соответственно зенитный и азимутальный углы (рис. 2.8).

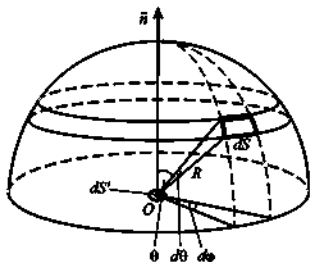


Рис. 2.8

Световой поток, излучаемый элементом dS' , распространяется в полусфере. Согласно формуле (2.3) поток энергии, падающий на элемент dS полусферы радиусом R , $\delta\Phi = L dS' \cos\theta d\Omega$, где θ — угол между нормалью к dS' и направлением на dS ; $d\Omega$ — телесный угол. Из определения телесного угла $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$ получаем: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, $\delta\Phi = L_0 dS' \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi$. Поток, испускаемый элементом dS' по всем направлениям, — это поток, проходящий через полусферу:

$$d\Phi_{\text{полн}} = \int \delta\Phi = L_0 dS' \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad d\Phi_{\text{полн}} = \frac{2\pi}{3} L_0 dS'.$$

По определению (см. формулу (2.4)) светимость $M = \frac{d\Phi_{\text{полн}}}{dS'}$. Получим: $M = \frac{2\pi}{3} L_0$.

Теперь допустим, что $L(\theta) = L_0 = \text{const}$ (ламбертов источник). Повторив всю ту же последовательность процедур для полного потока, излученного с элемента dS' , получим:

$$d\Phi_{\text{полн}} = \int \delta\Phi = L_0 dS' \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi L_0 dS'.$$

Окончательно имеем: $M = \frac{d\Phi_{\text{полн}}}{dS'} = \pi L_0$, что соответствует закону Ламберта.

Задача 2.5. Над центром круглого стола радиусом $R = 1,0$ м подвешен небольшой светильник в виде плоского горизонтального диска площадью $S' = 100$ см². Яркость L светильника не зависит от направления излучения и равна $1,6 \cdot 10^4$ кд/м². На какой высоте от поверхности стола надо поместить светильник, чтобы освещенность периферийных точек стола была максимальной? Какова будет эта освещенность?

Решение. По определению освещенность участка стола (см. формулу (2.6)) $E_\Phi = \frac{d\Phi}{dS}$, где $d\Phi$ — световой поток, падающий на элемент стола dS (рис. 2.9). Однако следует иметь в виду, что поток $d\Phi$ формируется как сумма потоков от разных элементов dS' светящегося диска S' , т.е. $d\Phi = \int_S \delta\Phi$, где поток $\delta\Phi$ определяется исходя из соотношения (2.3): $\delta\Phi = L dS' d\Omega \cos\theta$. Здесь L — яркость светильника, не зависящая от направления излучения; $d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{l^2}$ — телесный угол, под которым виден рассматриваемый участок стола из элемента dS' ; θ — угол между нормалью к поверхности dS' и направлением на dS ; l — расстояние между элементом dS' светящегося диска и элементом стола dS . Площадь элемента dS' можно определить как $dS' = r dr d\varphi$, где r — расстояние от центра светящегося диска до элемента dS' (рис. 2.9).

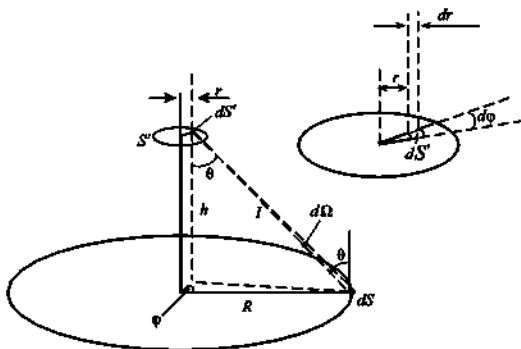


Рис. 2.9

Итак, $\delta\Phi = LdS' \frac{dS \cos^2 \theta}{r^2}$. Учитывая, что $l^2 = h^2 + r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi$, где h – расстояние от светильника до поверхности стола; R – радиус стола; $\cos^2 \theta = \frac{h^2}{l^2}$, для освещенности периферийных точек стола окончательно можно записать:

$$E_{\Phi} = 2L \int_0^{r_d} r dr \int_0^{\pi} \frac{h^2}{(h^2 + r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^2} d\varphi, \quad (2.9)$$

где r_d – радиус светящегося диска, $r_d = \sqrt{\frac{S'}{\pi}} \approx 5,6$ см.

Выражение (2.9) имеет весьма громоздкий вид, и решение может быть найдено только численно.

Обратим внимание на то, что радиус диска $r_d \approx 5,6$ см, поэтому расстояние l от любой точки диска до периферийной точки стола меняется в небольших пределах: от минимального

$$l_{\min} = \sqrt{(R - r_d)^2 + h^2} \approx \sqrt{(0,94R)^2 + h^2}$$

до максимального

$$l_{\max} = \sqrt{(R + r_d)^2 + h^2} \approx \sqrt{(1,06R)^2 + h^2}$$

(рис. 2.10). В этом случае для любого элемента диска расстояние от этого элемента до периферийного участка стола dS незначительно отлича-

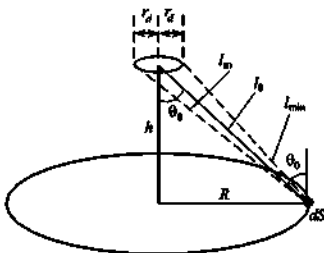


Рис. 2.10

ется от расстояния $l_0 = \sqrt{R^2 + h^2}$ от центральной точки диска до dS . Также для любого элемента диска значения углов нормалию и направлением на участок стола dS незначительно отличаются от угла θ_0 между нормалью к центральной точке диска и направлением на dS . Телесный угол, под которым виден участок dS из любой точки диска, тоже практически одинаков. Для любого элемента dS' диска будем использовать средние значения расстояния до dS , угла между нормалью к элементу dS' и направлением на dS , а также телесного угла, под которым виден участок dS из элемента dS' , т.е. будем считать их такими же, как для центральной точки светящегося диска. Тогда суммирование потоков $d\Phi$ сведется к замене в формуле (2.3) элемента площади светильника dS' на площадь светильника S' . Излучаемый светильником в направлении рассматриваемого элемента стола световой поток $d\Phi = LS'd\Omega \cos\theta_0$. Здесь $d\Omega$ – телесный угол, под которым рассматриваемый участок стола виден из центра светильника: $d\Omega = \frac{dS \cos\theta_0}{l_0^2}$; l_0 – расстояние от центра светильника до участка стола; θ_0 – угол между нормалью к поверхности стола и направлением на светильник.

Теперь для освещенности получим:

$$E_\Phi = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{LS'd\Omega \cos\theta_0}{dS} = \frac{LS'}{l_0^2} \cos^2\theta_0. \quad (2.10)$$

Из геометрических соображений (рис. 2.10) $\cos\theta_0 = \frac{h}{l_0}$, $l_0^2 = R^2 + h^2$.

Следовательно,

$$E_\Phi = \frac{LS'h^2}{l_0^4} = \frac{LS'h^2}{(R^2 + h^2)^2}.$$

Освещенность периферийных точек стола максимальна при условии, что производная данной функции по h равна нулю:

$$\frac{dE_\Phi}{dh} = 2LS' \frac{h(R^2 - h^2)}{(R^2 + h^2)^3} = 0,$$

значит, $h(R^2 - h^2) = 0$. Физический смысл имеет корень этого уравнения $h = R$.

Окончательно получаем: $h_m = R = 1,0$ м, $E_{\Phi_m} = \frac{LS'}{4R^2} = 40$ лк.

Если подставить найденное значение $h_{\text{н}} = R = 1,0$ м в выражение (2.9), то получим освещенность E_{Φ} , немного отличающуюся от $E_{\Phi_{\text{н}}}$, рассчитанной с помощью формулы (2.10): разница между E_{Φ} и $E_{\Phi_{\text{н}}}$ составляет менее 0,1%. Таким образом, использование при решении данной задачи приближений является вполне оправданным.

Следует отметить еще один важный факт. Указанное приближение фактически позволяет заменить в расчетах пространственный источник точечным (тот же характер приближений). Более того, выражение (2.10) в точности совпадает с выражением (2.7), если принять $J = LS' \cos \theta_1$, где $S' \cos \theta_1$ определяет видимую площадь плоского источника в данном направлении.

Задача 2.6. Вертикальный луч проектора освещает центр потолка круглой комнаты радиусом $R = 2,0$ м. На потолке образуется небольшой «зайчик» площадью $S = 100$ см². Освещенность «зайчика» $E_{\Phi} = 1000$ лк. Коэффициент отражения потолка $\rho = 0,80$. Считая «зайчик» ламбертовским источником, найти наибольшую освещенность стены, созданную «зайчиком».

Решение. Будем считать, что проектор равномерно освещает центр потолка. Тогда падающий на потолок световой поток $\Phi_{\text{пад}} = E_{\Phi} S$, где E_{Φ} — освещенность светового пятна — «зайчика»; S — его площадь. Исходящий от «зайчика» световой поток $\Phi = \rho \Phi_{\text{пад}} = \rho E_{\Phi} S$, где ρ — коэффициент отражения. По определению светимость источника равна световому потоку, испускаемому с его поверхности по всем направлениям, т.е. светимость «зайчика» $M = \frac{\Phi}{S} = \rho E_{\Phi}$. В то же время по условию задачи «зайчик» является ламбертовским источником, его светимость $M = \pi L$ (формула (2.5)), где L — яркость «зайчика». Следовательно, $\rho E_{\Phi} = \pi L$, откуда $L = \frac{\rho E_{\Phi}}{\pi}$.

Радиус «зайчика» составляет порядка 5,5 см, что существенно меньше расстояния от «зайчика» до стены комнаты, т.е. меньше $R = 1,0$ м, поэтому будем применять приближения, аналогичные использованным при решении задачи 2.5. Будем считать для любого элемента «зайчика» расстояние до элемента $dS_{\text{ст}}$, поверхности стены, угол между нормалью к элементу «зайчика» и направлением на элемент $dS_{\text{ст}}$, телесный угол, под которым виден элемент $dS_{\text{ст}}$, такими же, как для центральной точки «зайчика».

В соответствии с формулой (2.3) падающий на элемент $dS_{\text{ст}}$ поверхности стены световой поток $d\Phi = LS \cos \theta d\Omega$ (см. задачу 2.5).

Найдем телесный угол, под которым элемент стены $dS_{ст}$ виден из центра «зайчика»:

$$d\Omega = \frac{dS_{ст}}{r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{dS_{ст}}{r^2} \sin\theta,$$

где r – расстояние от центра «зайчика» до элемента $dS_{ст}$; $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ – угол между нормалью к элементу $dS_{ст}$ и прямой, соединяющей этот участок с центром «зайчика» (рис. 2.11).

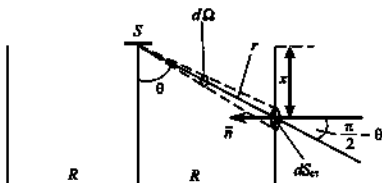


Рис. 2.11

Используя геометрические соотношения $\sin\theta = \frac{R}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, где R – радиус комнаты; r , x – расстояния соответственно от центра «зайчика» и от потолка до освещенного участка стены, получим:

$$L = \frac{d\Phi r^2}{S dS_{ст} \sin\theta \cos\theta} = \frac{d\Phi r^4}{S dS_{ст} R x} = \frac{d\Phi (R^2 + x^2)^2}{S dS_{ст} R x},$$

откуда

$$d\Phi = \frac{L S dS_{ст} R x}{(R^2 + x^2)^2}.$$

По определению освещенность участка стены $E_{\Phi_{ст}} = \frac{d\Phi}{dS_{ст}}$. С учетом выражения $L = \frac{\rho E_{\Phi}}{\pi}$, полученного ранее,

$$E_{\Phi_{ст}} = \frac{\rho E_{\Phi} S R x}{\pi (R^2 + x^2)^2}.$$

В точке стены, освещенность которой максимальна, производная этой функции равна нулю:

$$\frac{dE_{\Phi_{\pi}}}{dx} = \frac{\rho E_{\Phi} S R (R^2 - 3x^2)}{\pi (R^2 + x^2)^3} = 0.$$

Физический смысл имеет корень $x = R/\sqrt{3}$. Отметим, что положение точки, которая максимально освещена, не зависит от площади S «зайчика». Это следствие того, что в рамках использованного приближения «зайчик» рассматривался как точечный источник.

Максимальная освещенность стены

$$E_{\Phi_{\pi}} = \frac{3\sqrt{3}\rho E_{\Phi} S}{16\pi R^2}, \quad E_{\Phi_{\pi}} = 0,21 \text{ лк.}$$

Задача 2.7. Ламбертовский источник имеет вид бесконечной плоскости. Его яркость равна L . Найти освещенность плоскости, расположенной параллельно этому источнику.

Решение. Для решения данной задачи можно использовать процедуру, описанную в решении задачи 2.5. На плоскости, где измеряется освещенность, выберем площадку dS (рис. 2.12). На нее падает световой поток $d\Phi$, который представляет собой сумму световых потоков от разных элементов источника, т.е. $d\Phi = \int_S \delta\Phi$. Поток $\delta\Phi$ определяется исходя из соотношения (2.3):

$$\delta\Phi = L dS' \cos\theta d\Omega,$$

где L – яркость источника; dS' – площадь элемента светящейся плоскости; θ – угол между нормалью к dS' и направлением на площадку dS

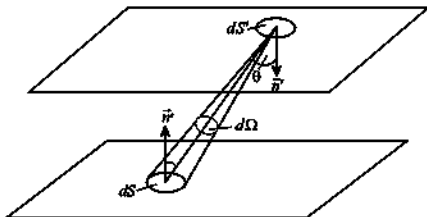


Рис. 2.12

(угол между нормалью к площадке dS и направлением на элемент светящейся плоскости dS' также равен θ (рис. 2.12)); $d\Omega$ — телесный угол, под которым видна площадка dS из элемента dS' . Из определения телесного угла находим $d\Omega = \frac{dS}{l^2} \cos\theta$, где l — расстояние между площадкой dS и элементом dS' .

Выберем систему координат x, y, z таким образом, чтобы ее центр (точка O) находился на светящейся плоскости (рис. 2.13). Тогда для всех точек источника $z = 0$.

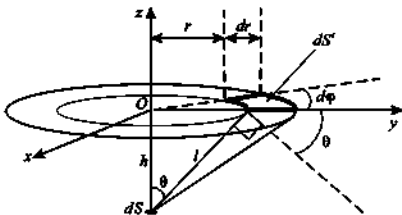


Рис. 2.13

Пусть r — расстояние от заданной точки источника до точки O , φ — угол между радиусом-вектором заданной точки и положительным направлением оси Ox . Площадь элемента светящейся плоскости $dS' = r dr d\varphi$,

$l = \frac{h}{\cos\theta}$, $\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, где h — расстояние от светящейся плоскости

до параллельной ей площадки $dS \Rightarrow d\Omega = \frac{dS}{h^2} \cos^3\theta$,

$$\delta\Phi = L dS' \cos\theta d\Omega = L \frac{dS}{h^2} \cos^4\theta r dr d\varphi = L \frac{dS h^2}{(h^2 + r^2)^2} r dr d\varphi,$$

$$d\Phi = L dS h^2 \int_0^\infty \frac{r}{(h^2 + r^2)^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

В отличие от выражения (2.9), полученного при решении задачи (2.5), данный интеграл легко вычислять:

$$d\Phi = \pi L dS h^2 \left(\frac{1}{h^2 + r^2} \right)_{\cos}^0 = \pi L dS.$$

Освещенность площадки $E_{\Phi} = \frac{d\Phi}{dS} = \pi L$.

Задача 2.8. Над столом находится светильник — светящийся шар радиусом $R = 5,0$ см. Расстояние от центра шара до поверхности стола $h = 1,0$ м. Освещенность стола под центром светильника $E_{\Phi} = 50$ лк. Найти светимость этого источника, считая его ламбертовским.

Решение. Поток, посылаемый шаром в центр стола, представляет собой сумму потоков от разных элементов dS' светящегося шара:

$$\delta\Phi = L dS' d\Omega \cos\theta = L dS' \cos\theta \frac{dS \cos\theta}{r^2}.$$

Здесь L — яркость светильника; $d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$ — телесный угол, под которым элемент dS в центре стола виден из элемента dS' ; θ — угол между нормалью к поверхности dS' и направлением на dS ; r — расстояние между dS' и dS (рис. 2.14).

Используя теорему косинусов, получим: $r^2 = h^2 + R^2 - 2hR \cos\theta_0$, где h — расстояние от центра шара до поверхности стола; R — радиус шара; θ_0 — угол между h и радиусом шара, проведенным к dS' .

Представим площадь элемента dS' в сферической системе координат как $dS' = R^2 \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi$, а для угла θ воспользуемся соотношением $\theta = \theta_0 + \alpha$, где α — угол между h и r . Тогда

$$\delta\Phi = \frac{LR^2 \cos^2(\theta_0 + \alpha) \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi dS}{h^2 + R^2 - 2hR \cos\theta_0}.$$

Используя тригонометрические преобразования косинуса суммы двух углов, получаем:

$$\delta\Phi = \frac{LR^2 (\cos\theta_0 \cos\alpha - \sin\theta_0 \sin\alpha)^2 \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi dS}{h^2 + R^2 - 2hR \cos\theta_0}.$$

Применив теорему синусов, будем иметь:

$$\sin\alpha = \frac{R}{r} \sin\theta_0, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2\theta_0}.$$

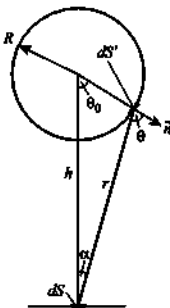


Рис. 2.14

Тогда

$$\delta\Phi = \frac{LR^2 \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi dS}{h^2 + R^2 - 2hR \cos\theta_0} \times$$

$$\times \left(\cos^2\theta_0 + \frac{R^2}{r^2} \sin^2\theta_0 (2\sin^2\theta_0 - 1) - 2\frac{R}{r} \cos\theta_0 \sin^2\theta_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2\theta_0} \right) \sin\theta_0.$$

Для того чтобы найти поток $d\Phi$, полученное выражение надо проинтегрировать по углу θ_0 в пределах от 0 до $\arccos \frac{R}{h}$ (этот предел определяется исходя из того, что r будет касательной к поверхности светящегося шара, при этом R и r образуют прямой угол) и по углу φ в пределах от 0 до 2π . Значение интеграла может быть найдено только численно.

Поскольку радиус R светящегося шара намного меньше расстояния h от его центра до поверхности стола, используем приближения, аналогичные использованным при решении задачи 2.5. Для любого элемента шара будем считать расстояние до центральной точки стола таким же, как для точки, расположенной в центре светильника, тогда $r^2 \approx h^2$. Для любого элемента шара будем считать, что $\cos\theta \approx \cos\theta_0$, т.е. косинусы такие же, как для центральной точки стола: $\cos\theta = \cos\theta_0 = 1$. Тогда

$$\delta\Phi = LdS' \cos^2\theta_0 \frac{dS}{h^2} \Rightarrow d\Phi = \int \frac{LdS}{h^2} dS' = \frac{L\pi R^2}{h^2} dS.$$

Освещенность в центре стола $E_\Phi = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{L\pi R^2}{h^2}$, а светимость ламбертовского источника $M = \pi L = E_\Phi \frac{h^2}{R^2} = 2 \cdot 10^4$ (лк).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти с помощью кривой относительной спектральной чувствительности глаза (см. рис. 2.3):

а) величину потока энергии, если световой поток составляет 1,0 лм, а длина волны излучения 0,60 мкм;

б) световой поток, если излучение занимает интервал длин волн от $\lambda_1 = 0,51$ мкм до $\lambda_2 = 0,53$ мкм. Величина потока энергии $\Phi_e = 3,0$ мВт, причем она распределена равномерно по всем длинам волн указанного интервала. Считать, что в данном спектральном интервале функция $V(\lambda)$ линейно зависит от длины волны.

Ответ: а) 2,4 мВт; б) $\Phi = \frac{1}{2} K \Phi_0 (V(\lambda_1) + V(\lambda_2))$, $\Phi = 1,3$ лм.

2. Найти полный поток энергии, испускаемый изотропным источником. Сила света источника $J = 10$ кд, а длина волны излучения $\lambda = 0,64$ мкм.

Ответ: 1,22 Вт.

3. На лист белой матовой (коэффициент отражения $\rho = 0,9$) бумаги формата А4 ($29,7 \times 21,0$ см) нормально падает световой поток $\Phi = 100$ лм. Найти освещенность; светимость; яркость листа.

Ответ: 1600 лк; 1440 лм/м^2 ; 460 кд/м^2 .

4. Сила света светильника $J = 45$ кд. Найти светимость и яркость светильника, если он представляет собой сферу радиусом $R = 0,15$ м. Светильник считать ламбертовым.

Ответ: $2 \cdot 10^3 \text{ лм/м}^2$; 637 кд/м^2 .

5. Над центром квадратного стола со стороной $a = 2,0$ м на высоте $h = 1,2$ м от его поверхности висит лампа. Как изменится освещенность в центре стола, если лампу повесить на этой же высоте над одним из углов стола?

Ответ: уменьшится в $\frac{\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}{h^3} \approx 3,7$ раза.

6. В углах квадратной комнаты со стороной $a = 6,0$ м и высотой потолка $h = 3,0$ м висят одинаковые лампы. Освещенность пола посередине комнаты $E_{\Phi_1} = 6,0$ лк. Какова освещенность E_{Φ_2} пола в углах комнаты?

Ответ: $E_{\Phi_2} = E_{\Phi_1} \frac{(a^2 + 4h^2)(a^4 + 5a^2h^2 + 2h^4)}{8h^2(a^2 + h^2)(2a^2 + h^2)}$, $E_{\Phi_2} = 5,1$ лк.

7. Круглая комната радиусом $R = 10$ м с потолком высотой $h = 4,0$ м освещается точечным изотропным источником света, находящимся в центре потолка. Во сколько раз средняя освещенность стены комнаты больше средней освещенности пола?

Ответ: $\frac{R}{2(\sqrt{h^2 + R^2} - h)} \approx 0,74$ раза.

8. Две лампочки, сила света которых $J_1 = 4$ кд, $J_2 = 1$ кд, расположены на расстоянии $l = 1,0$ м. На каком расстоянии x от первой лампочки (на линии, соединяющей лампочки) надо поместить лист плотной бумаги, чтобы его освещенность с обеих сторон была одинаковой?

Ответ: $x = \frac{2}{3}$ м.

9. Лампочка, сила света которой $J = 200$ кд, расположена на расстоянии $l = 1,5$ м от экрана. За лампочкой параллельно экрану на расстоянии $L = 2,0$ м от него поставили идеально отражающее плоское зеркало. Как изменилась освещенность в центре экрана?

Ответ: возросла на $\Delta E_{\Phi} = \frac{J}{(2L-l)^2} = 32$ лк.

10. На зеркальном потолке висит лампочка. После того как она перегорела, ее заменили другой, но освещенность пола непосредственно под лампочкой оказалась в $\eta = 2$ раза меньше. На какое расстояние x надо опустить лампочку, чтобы освещенность пола под ней стала прежней? Высота потолка $h = 3,0$ м.

Ответ: $x = 1,4$ м.

11. Точечный изотропный источник света мощностью $W = 100$ Вт расположен на потолке комнаты, а на полу под ним лежит мяч радиусом $R = 10$ см. Какой поток энергии Φ падает на поверхность мяча? Высота потолка $h = 3,0$ м.

Ответ: $\Phi = \frac{W}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{h(h-2R)}}{h-R} \right)$, $\Phi = 30$ мВт.

12. С помощью линзы с фокусным расстоянием $F = 1,0$ м и диаметром $D = 8,0$ см на экране получают изображение Солнца. Какой будет диаметр d этого изображения, если угловой диаметр Солнца $\alpha = 32'$? Во сколько раз освещенность изображения, полученного с помощью линзы, будет больше освещенности, создаваемой Солнцем на экране?

Ответ: $d = 2F \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 9,3$ мм; в $\frac{D^2}{d^2} = 74$ раза.

13. Точечный изотропный источник света силой $J = 100$ кд находится в фокусе собирающей линзы, за которой расположен экран. Освещенность экрана напротив источника $E_{\Phi} = 25$ лк. Определить оптическую силу линзы.

Ответ: $\sqrt{\frac{E_{\Phi}}{J}} = 0,5$ дптр.

14. Над столом находится светильник – плоский горизонтальный диск радиусом $R = 25$ см. Расстояние от него до поверхности стола $h = 75$ см. Светимость диска $M = 1000$ лк. Найти освещенность E_{Φ} стола под центром этого источника, считая его ламбертовским.

Ответ: $E_{\Phi} = \frac{M}{1 + \frac{h^2}{R^2}}$, $E_{\Phi} = 100$ лк.

15. Точечный источник света S находится на главной оптической оси выпуклого зеркала 1, радиус которого $R = 20$ см. Расстояние от источника до зеркала $d = 30$ см. На таком же расстоянии d от источника перпендикулярно к главной оптической оси зеркала расположен экран (рис. 2.15). Зеркало 1 заменили вогнутым зеркалом 2 такого же радиуса. Центры кривизны зеркал 1 и 2 — точка O . Определить, во сколько раз изменилась максимальная освещенность экрана. Считать, что оба зеркала отражают весь падающий на их поверхность поток.

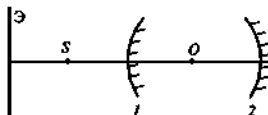


Рис. 2.15

$$\text{Ответ: } \frac{E_{\phi_2}}{E_{\phi_1}} = \frac{1 + \left(\frac{R}{3R + 4d}\right)^2}{1 + \frac{R^2 d^2}{(4d^2 + 4R^2 + 9Rd)^2}} \approx 1,009 \text{ раза.}$$

16. В непрозрачной шторке, закрывающей окно, имеется небольшая круглая дырка. Солнечный свет падает нормально на окно и, проходя через дырку, освещает некоторую область на противоположной стене комнаты. Определить, на каком расстоянии от стены нужно поместить на пути луча собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 0,8$ м, чтобы средняя освещенность пятна увеличилась в $\eta = 4$ раза (потерями энергии при распространении света сквозь линзу пренебречь). Считать, что после установки линзы на стене появляется четкое изображение дырки.

$$\text{Ответ: } F(1 + \sqrt{\eta}) = 2,4 \text{ м.}$$

3

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция света — явление возникновения устойчивого пространственного перераспределения энергии в области перекрытия двух и более световых волн, для которого не выполняется условие суперпозиции для интенсивностей, т.е.

$$I \neq \sum I_k.$$

В этом случае пространственное распределение интенсивности называется *интерференционной картиной*.

Рассмотрим формирование интерференционной картины в случае сложения двух волн. Пусть в некоторую точку пространства приходят две волны, электрические компоненты которых \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . В соответствии с принципом суперпозиции электрическая компонента результирующего поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Эту величину нельзя измерить непосредственно из-за высокой частоты оптических колебаний, поэтому измеряют интенсивность света (или другие энергетические величины, усредненные за промежуток времени, во много раз превышающий период световых колебаний). Интенсивность света пропорциональна среднему по времени значению квадрата \vec{E} :

$$I \sim \langle \vec{E}^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \quad (3.1)$$

Для формирования устойчивой интерференционной картины необходимо, чтобы величина слагаемого $2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$, называемого *интерференционным членом*, была различна в разных точках области перекрытия волн. Если интерференционный член равен нулю во всей области перекрытия световых волн, например при сложении ортогонально поляризованных волн,

то интерференционная картина отсутствует и суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей отдельных волн.

Поскольку любую световую волну можно представить как суперпозицию монохроматических плоских волн, рассмотрим интерференцию только двух одинаково поляризованных плоских волн в некоторой фиксированной точке:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ E_2 &= E_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

где E_{10} , E_{20} — амплитудные значения электрических компонент волн; ω_1 , ω_2 — частоты; φ_1 , φ_2 — начальные фазы интерферирующих волн.

Если временной интервал τ , по которому ведется усреднение, намного больше периодов колебаний волн $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$, то:

$$\langle E_1^2 \rangle = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} E_{10}^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) dt \approx \frac{E_{10}^2}{2}, \quad \langle E_2^2 \rangle \approx \frac{E_{20}^2}{2}.$$

Для одинаково поляризованных волн скалярное произведение $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ в формуле (3.1) можно заменить произведением модулей величин $E_1 E_2$.

Введем обозначения: $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Тогда среднее значение величины $E_1 E_2$ за время τ , которое намного больше величины $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{E_{10} E_{20}}{2} \frac{\sin(\delta\omega\tau)}{\delta\omega\tau} \cos(\delta\omega\tau + \Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз складываемых волн.

Подставим полученные выражения в формулу (3.1):

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10} E_{20} \frac{\sin(\delta\omega\tau)}{\delta\omega\tau} \cos(\delta\omega\tau + \Delta\varphi) \right). \quad (3.2)$$

Если первые два члена в формуле (3.2) остаются постоянными, то последнее слагаемое (интерференционный член) зависит от времени, поэтому при сложении волн разных частот возможность наблюдения интерференционной картины определяется разностью их частот и временем экспозиции τ . В случае сложения волн одинаковых частот, разность фаз $\Delta\varphi$ между которыми остается постоянной во времени, интерференционный член принимает определенное, постоянное для каждой

точки области перекрытия волн значение и регистрируется устойчивая интерференционная картина. Пусть при сложении волн близких частот, т.е. $\frac{\delta\omega}{\omega} \ll 1$, выполняется условие $\delta\omega t \ll 1$. Если разность фаз $\Delta\phi$ для таких волн не изменяется с течением времени либо изменяется плавно, то величина интерференционного члена также меняется медленно. Вследствие этого интенсивность света в разных точках области перекрытия волн меняется достаточно медленно и возможно наблюдение сменяющихся друг друга интерференционных картин.

В случае, когда частоты складываемых волн одинаковы и равны ω , а разность фаз $\Delta\phi$ постоянна, имеем:

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}(E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \Delta\phi),$$

а для интенсивности света выполняется соотношение

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi, \quad (3.3)$$

где I_1, I_2 — интенсивности интерферирующих волн.

Теперь рассмотрим распределение интенсивности результирующего поля в области перекрытия двух плоских монохроматических волн одинаковой поляризации и частоты ω , но разного направления распространения. Для определения интенсивности результирующего колебания в точке, положение которой определяется радиусом-вектором \vec{r} , представим уравнения, описывающие интерферирующие волны, в следующем виде:

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t + \phi_1) = E_{10} \cos(\omega t + \vec{k}_1 \cdot \vec{r}),$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t + \phi_2) = E_{20} \cos(\omega t + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}).$$

Здесь $\phi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}$; $\phi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$; \vec{k}_1, \vec{k}_2 — волновые векторы рассматриваемых волн, модули которых согласно формуле (1.4) $k_1 = k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны излучения.

Для упрощения расчетов начальные фазы будем считать одинаковыми и равными нулю. Для интенсивности результирующего поля

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

где $\vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$.

В точках, в которых косинус принимает одинаковые значения, интенсивность результирующего поля одинакова. Максимальная интенсивность соответствует значению косинуса $+1$, а минимальная — значению косинуса -1 . В максимуме значения интенсивности $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, в минимуме $-I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. При $I_1 = I_2 = I_0$ получаем: $I_{\max} = 4I_0$, $I_{\min} = 0$. Это условия наилучшего наблюдения интерференции. Уравнение $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ представляет собой уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{k} . Значит, поверхности равных интенсивностей, описываемые уравнением $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$, представляют собой плоскости, перпендикулярные к вектору \vec{k} (рис. 3.1).

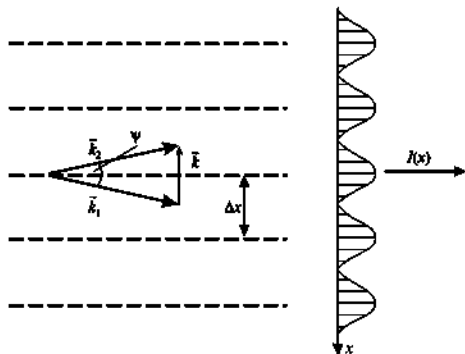


Рис. 3.1

Значения аргумента косинуса для точек, принадлежащих двум соседним плоскостям, где интенсивность максимальна (минимальна), должны отличаться на 2π . Выберем ось Ox параллельно вектору \vec{k} . Пусть $(\vec{r} + \Delta\vec{r})$ и \vec{r} — радиусы-векторы точек, принадлежащих двум выбранным соседним плоскостям. Для указанных точек справедливо соотношение $\vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{k} \cdot \vec{r} = 2\pi$. Тогда $k\Delta x = 2\pi$. Расстояние Δx между соседними плоскостями

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(k_1 + k_2) \sin \frac{\psi}{2}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\psi}{2}},$$

где ψ — угол между \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , т.е. угол между направлениями, вдоль которых распространяются волны. Для случая, когда волны распространяются под малым углом друг к другу $\psi \ll 1$, получим:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\psi}. \quad (3.4)$$

Если на пути волн поместить плоский экран, то плоскости равной интенсивности пересекут его по параллельным прямым. Интерференционная картина на экране будет представлять собой чередование параллельных друг другу светлых и темных полос. Расстояние Δx между соседними светлыми (темными) полосами называется *шириной интерференционной полосы*. Когда экран расположен перпендикулярно к биссектрисе угла между направлениями распространения волн, величина Δx определяется выражением (3.4).

Для характеристики четкости полос используется *функция видности (видности)*, которая определяется следующим образом:

$$V = \frac{I_m - I_{\min}}{I_m + I_{\min}}, \quad (3.5)$$

где I_m, I_{\min} — интенсивности в соседних максимуме и минимуме интерференционной картины.

Интерференционные полосы наиболее отчетливо видны при $V = 1$, т.е. в областях экрана, где интенсивность темной полосы $I_{\min} = 0$, что и соответствует соблюдению условия $I_1 = I_2$.

Если интенсивности интерферирующих волн одинаковы ($I_1 = I_2 = I_0$), то интенсивность в точке экрана с координатой x (начало отсчета совпадает с положением одного из максимумов) определяется выражением

$$I = 2I_0(1 + \cos(kx)) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right) = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{x}{\Delta x}\right).$$

Таким образом, анализ сложения двух плоских монохроматических волн показывает, что устойчивая интерференционная картина образуется при следующих условиях:

- 1) частоты волн совпадают;
- 2) разность фаз двух волн остается неизменной во времени;
- 3) волны не являются ортогонально поляризованными.

При выполнении первых двух условий волны называются *когерентными*. Влияние состояния поляризации при интерференции будет подробно рассмотрено в гл. 11, а в этой главе будем считать, что волны поляризованы одинаково или вообще не поляризованы.

Получить когерентные волны от разных источников практически невозможно. Свет, испущенный обычными источниками, не может быть строго монохроматическим. Даже в предположении, что источник представляет собой совокупность элементарных излучателей строго фиксированной частоты, его можно рассматривать как совокупность отдельных дугов (длительностью порядка 10^{-9} с) синусоидальных волн, излученных отдельными атомами или молекулами источника. При наложении волн от разных реальных источников фазовые соотношения волн многократно меняются случайным образом и при усреднении по времени интерференционный член обращается в нуль. Поэтому разработаны методы получения когерентных волн от одного источника. Все эти методы можно разделить на два типа.

1. В методах деления волнового фронта меняют направления распространения частей волнового фронта так, что образуется область перекрытия волн от одного источника, для которых выполняется условие когерентности. Подобные изменения направлений распространения частей волнового фронта реализуются с помощью специальных оптических схем (схема Юнга, зеркало Ллойда, биезеркала Френеля, бипризма Френеля, билинза Бийе).

2. Идея методов деления амплитуды состоит в создании разности фаз между частями одной и той же волны. Например, при падении волны на плоскопараллельную стеклянную пластинку происходит частичное отражение от ее верхней и нижней поверхностей. При определенных условиях отраженные волны будут когерентными и, перекрывшись в некоторой области пространства, будут интерферировать. Методы деления амплитуды реализуются при интерференции в тонких пленках, в схеме колец Ньютона и т.п.

Рассмотрим эти типы подробно. В методе деления волнового фронта на две части образуются фактически две волны, которые можно представить как бы исходящими из двух когерентных источников S_1 и S_2 (в зависимости от схемы реализации они могут быть как действительными, так и мнимыми). В области, где волны, испускаемые источниками S_1 и S_2 , перекрываются, возникает интерференционная картина, которую можно наблюдать на экране.

Определим некоторые параметры интерференционной картины, воспользовавшись общей интерференционной схемой, которая представляет собой два одинаковых синфазных точечных монохроматических источника S_1 и S_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга и на расстоянии l от экрана (рис. 3.2).

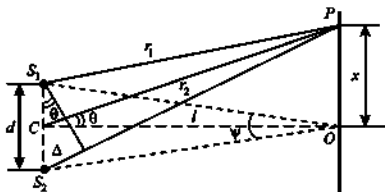


Рис. 3.2

Разностью хода (оптической разностью хода) Δ двух волн называют разность оптических длин путей, проходимых волнами. Если волны от источников S_1 и S_2 распространяются в однородной среде с показателем преломления n , то, придя в точку P , они будут иметь разность хода $\Delta = n(r_2 - r_1)$, где r_1, r_2 — расстояния от источников соответственно S_1 и S_2 до точки P . Далее будем полагать, что $n = 1$, если не указано иное значение. Тогда для рассматриваемых лучей разность хода $\Delta = r_2 - r_1$.

Пусть в рассматриваемой точке P области перекрытия волн разность хода Δ между интерферирующими волнами с длиной волны λ удовлетворяет условию $\Delta = m\lambda$, тогда соответствующая разность фаз $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi m$. Величину m называют **порядком интерференции**, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Согласно соотношению (3.3) интенсивность в точке P будет максимальной, и на экране наблюдается локальный максимум освещенности. Если $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, то соответствующая разность фаз $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$, освещенность экрана в точке P оказывается минимальной. Таким образом, условия максимума и минимума интерференционной картины можно записать в следующем виде:

$$\text{m: } \Delta = m\lambda, \text{ min: } \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

Выразим разность хода Δ через координату x точки наблюдения P (рис. 3.2). Для наблюдения интерференционной картины с помощью одной из оптических схем необходимо, чтобы угол θ был мал: $\theta \ll 1$ (данное ограничение будет пояснено при рассмотрении схемы Юнга). При этом разность хода $\Delta \approx \theta d$ (рис. 3.2). Поскольку $\theta \approx x/l$, то

$$\Delta \approx x \frac{d}{l}. \quad (3.7)$$

Интенсивность в точке P

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \right) \right) = 2I_0 (1 + \cos(k\Delta)) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(kx \frac{d}{l} \right) \right). \quad (3.8)$$

При $x = 0$ будет расположен максимум, соответствующий нулевой разности хода. Это максимум порядка $m = 0$, являющийся центром интерференционной картины. Расстояние между соседними максимумами (или минимумами), соответствующее изменению m на единицу (ширина интерференционной полосы),

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (3.9)$$

Введем угол схождения лучей $\psi \approx \frac{d}{l}$ (угол, под которым видны источники из центра экрана). Тогда

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\psi}. \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) для расчета ширины интерференционной полосы в случае интерференции сферических волн от двух точечных источников совпадает с выражением (3.4) для расчета ширины интерференционной полосы при интерференции плоских волн. Таким образом, на значительном расстоянии от источников сферические волны на небольших участках приближенно можно считать плоскими, угол между направлениями которых $\psi \ll 1$. На практике это условие выполняется при $d \ll l$ (рис. 3.2). Отметим следующее: для того чтобы интерференционную картину можно было наблюдать визуально без дополнительных оптических устройств, Δx должно быть порядка 1 м и более. Это дает для видимой области спектра $\psi < 5 \cdot 10^{-4}$ рад, т.е. условие $d \ll l$ следует и из условий непосредственного наблюдения интерференционной картины.

Если источники S_1 и S_2 представляют собой параллельные друг другу и экрану узкие щели, то интерференционную картину на экране можно представить как совокупность интерференционных картин от точечных источников. При $x = 0$ будет расположен максимум (светлая прямая), соответствующий нулевой разности хода $\Delta = 0$. Вблизи центра экрана будет наблюдаться чередование светлых и темных полос. Отметим, что число наблюдаемых в конкретной оптической схеме полос ограничено, что будет продемонстрировано при решении соответствующих задач.

Рассмотрим ситуацию, когда источник света S не является строго монохроматическим. В самом простом случае в спектре источника присутствуют две компоненты излучения с частотами ω_1 и ω_2 . Источник S можно заменить двумя пространственно совпадающими источниками, излучающими независимо друг от друга волны с частотами ω_1 и ω_2 . Каждый источник создает на экране интерференционную картину, которые накладываются друг на друга. Если частоты ω_1 и ω_2 не сильно отличаются друг от друга, то ширина полос каждой интерференционной картины примерно одинакова. Следовательно, если светлые полосы интерференционной картины от одного источника совпадают со светлыми полосами картины от другого источника, то результирующая интерференционная картина на экране наблюдается наиболее отчетливо. Если светлые полосы интерференционной картины от одного источника совпадают с темными полосами картины от другого источника, то видимость интерференционной картины на экране ухудшается, а в случае одинаковой интенсивности источников интерференционная картина не наблюдается.

Предположим, что источники имеют одинаковую интенсивность I_0 . Тогда с учетом формулы (3.8) интенсивность в точке экрана, разность хода волн до которой Δ ,

$$I = 2I_0(2 + \cos(k_1\Delta) + \cos(k_2\Delta)).$$

Введем обозначения: $\delta k = k_2 - k_1$, $k_{cp} = (k_1 + k_2)/2$, тогда

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos(k_{cp}\Delta) \cos \frac{\delta k \Delta}{2} \right). \quad (3.11)$$

Зависимость интенсивности от разности хода волн до точки наблюдения представлена на рис. 3.3. Расстояние между соседними интерференционными полосами определяет быстро изменяющаяся величина $\cos(k_{cp}\Delta)$ (см. выражение (3.11)). В областях экрана, где интенсивности максимумов и минимумов, определяемые величиной $\cos \frac{\delta k \Delta}{2}$, различаются в большей степени, интерференционные полосы будут наблюдаться наиболее отчетливо. В областях, где величина $\cos \frac{\delta k \Delta}{2}$ близка к нулю, интерференционные полосы плохо различимы, поскольку их интенсивности отличаются друг от друга незначительно. Интерференционные полосы наиболее отчетливо видны в областях экрана, в которых интенсивность темной полосы $I_{min} = 0$, что соответствует $\Delta = \frac{2\pi l}{\delta k}$, где

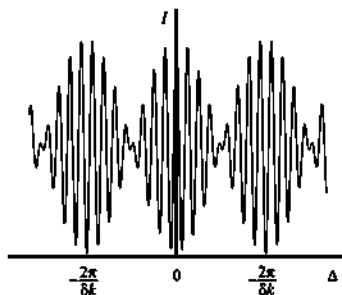


Рис. 3.3

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 3.3). Для этой области функция видности в соответствии с выражением (3.5) $V = 1$.

Если разность хода волн до точки наблюдения равна Δ , то интенсивность ближайшей светлой полосы $I_{\text{с}} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \frac{\delta k \Delta}{2} \right| \right)$, а темной — $I = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \frac{\delta k \Delta}{2} \right| \right)$. Следовательно, $V = \left| \cos \frac{\delta k \Delta}{2} \right|$. Зависимость $V(\Delta)$ представлена на рис. 3.4.

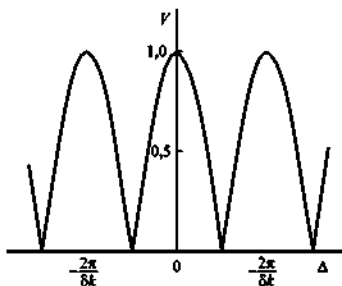


Рис. 3.4

Анализ зависимости $V(\Delta)$ показывает, что в центре экрана видность полос максимальна, по мере удаления от центра экрана она уменьшается, и интерференционные полосы исчезают вблизи $\Delta = \pm \frac{\pi}{\delta k}$. При этом экран оказывается равномерно освещенным. Затем видность возрастает и достигает максимального значения при $\Delta = \pm \frac{2\pi}{\delta k}$. Между точками нулевой видности располагается $N = \frac{x}{\Delta x} = \frac{k}{\delta k}$ полос.

Если интенсивности складываемых волн разные, то функция видности не обращается в нуль, полного исчезновения полос не происходит, но максимальные значения V будут меньше единицы, т.е. видность, вообще говоря, ухудшается (нет областей высокого контраста).

Рассмотрим интерференционную картину, полученную с помощью реального источника света. В схеме опыта Юнга, представленной на рис. 3.5, свет от источника проходит через узкую щель S , а затем через узкие щели S_1 и S_2 , представляющие собой вторичные когерентные источники. Вблизи центра экрана наблюдается чередование светлых и темных полос. При удалении от центра экрана интерференционная картина постепенно размывается. Максимальный порядок m_m интерференции, при котором полосы еще различимы, называется *предельным порядком интерференции*.

Исчезновение интерференционных полос вдали от центра экрана может быть вызвано рядом причин. В рамках первого подхода излучение реального источника S можно представить как набор пучков, каждый из которых представляет собой комбинацию монохроматических компонент излучения, характеризуемую определенной длиной волны и протяженностью. Каждый пучок в месте расположения диафрагмы со щелями S_1 и S_2

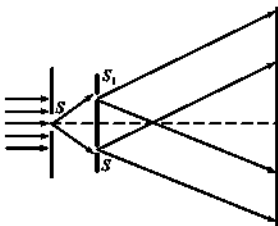


Рис. 3.5

делится на две части. Если разность хода волн от щелей до точки наблюдения превышает длину пучка, то перекрытия частей одного пучка не произойдет, а в точке наблюдения будут накладываться части разных пучков, испущенных источником S . Фазы колебаний в пучках независимы друг от друга, поэтому, как и в случае наложения волн от некогерентных источников, интерференционная картина не наблюдается. Максимальная разность

хода, при которой интерференционная картина еще может наблюдаться, называется *длиной когерентности* излучения и обозначается $l_{\text{ког}}$. Она равна протяженности l среднего волнового пути, которая определяется выражением $\delta k l \approx 2\pi$, где δk — интервал волновых чисел монохроматических компонент излучения, входящих в состав пути: $\delta k = \frac{2\pi\delta\lambda}{\lambda^2}$, λ — длина волны, которая соответствует монохроматической составляющей пути, имеющей наибольшую амплитуду. Следовательно, $l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}$. Среднюю длительность пути называют *временем когерентности* и обозначают $\tau_{\text{ког}}$. Оно связано с длиной когерентности соотношением $\tau_{\text{ког}} = \frac{l_{\text{ког}}}{V}$, где V — скорость световой волны в данной среде.

В рамках второго подхода излучение реального источника в первом приближении можно представить как набор монохроматических компонент в некотором спектральном интервале $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Такой источник рассматривается как совокупность независимо излучающих монохроматических источников, а результирующую интерференционную картину можно представить как результат наложения интерференционных картин, создаваемых отдельными источниками.

Максимумы нулевого порядка для всех длин волн будут совпадать, но с увеличением порядка интерференции положения максимумов будут смещаться относительно друг друга (рис. 3.6), так как ширина интерференционных полос пропорциональна длине волны излучения. На некотором расстоянии от центра интерференционной картины может возникнуть ситуация, когда m -й максимум для излучения с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ совпадет с $(m + 1)$ -м максимумом для излучения с длиной волны λ (рис. 3.6). В данном случае промежуток между этими максимумами заполнен максимумами для всех остальных длин волн (рис. 3.7). Отдельные интерференционные полосы будут неразличимы.

Используемые реальные источники света имеют конечные размеры. Увеличение размеров источника приводит к ухудшению видности интерференционных полос. Для иллюстрации рассмотрим предельный случай. Пусть источник является монохроматическим и представляет собой набор точечных некогерентных источников, крайние из которых S_1 и S_2 расположены на расстоянии D друг от друга, причем величина D и расстояние d между центрами диафрагмы гораздо меньше, чем расстояние a от источника до диафрагмы: $D \ll a$, $d \ll a$ (рис. 3.8). На размеры источника в случае, когда он представляет собой набор когерентных точечных источников, налагаются менее жесткие ограничения. Интенсивности точечных источников будем считать одинаковыми и равными I_0 .

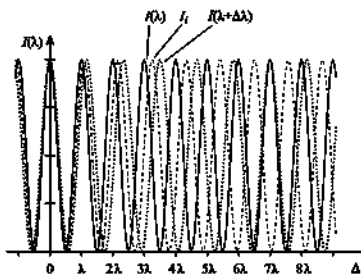


Рис. 3.6

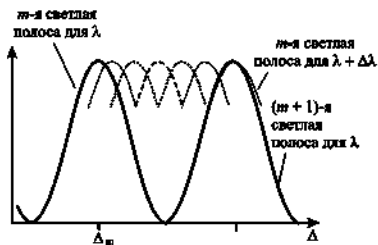


Рис. 3.7

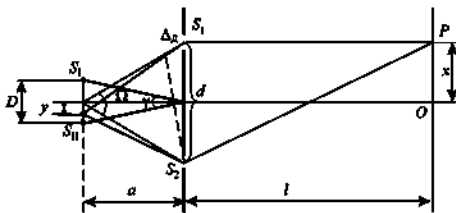


Рис. 3.8

Дополнительная разность хода Δ_1 между волнами, пришедшими в точку P от источника, который находится на расстоянии y от оси,

$\Delta_1 = \frac{yd}{a}$. Тогда в точке P суммарная разность хода между волнами

$$\Delta_0 = \Delta + \Delta_1 = \frac{xd}{l} + \frac{yd}{a}.$$

Зависимость интенсивности интерференционной картины, создаваемой этим источником на экране, от расстояния x между точкой наблюдения и центром экрана определим согласно выражению (3.8):

$$I = 2I_0(1 + \cos(k\Delta_0)) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(kx \frac{d}{l} + ky \frac{d}{a} \right) \right).$$

Для того чтобы найти интенсивность результирующей картины в точке P , создаваемой всеми некогерентными источниками от S_1 до S_n , проинтегрируем полученное выражение по y в пределах от $-D/2$ до $D/2$:

$$I = I_0 \left(1 + \frac{\sin(kDd/2a)}{kDd/2a} \cos \left(k \frac{xd}{l} \right) \right).$$

Видность результирующей картины не зависит от x :

$$V = \frac{\sin(kDd/2a)}{kDd/2a} = \frac{\sin(\pi Dd/\lambda a)}{\pi Dd/\lambda a} = \frac{\sin(\pi D\Omega/\lambda)}{\pi D\Omega/\lambda},$$

где Ω — апертура интерференции (рис. 3.8). С увеличением D , т.е. с увеличением размеров источника, уменьшается видность во всех точках экрана. Она станет равной нулю при условии $Dd/\lambda a = 1$. При этом экран будет освещен равномерно, что позволяет оценить ширину когерентности $h_{\text{кор}}$. Она соответствует расстоянию d между щелями, при котором интерференционная картина пропадает: $h_{\text{кор}} \approx \frac{\lambda a}{D}$. Введя обозначение

$\gamma = \frac{D}{a}$ (угловая ширина источника относительно диафрагмы с двумя щелями), получим: $h_{\text{кор}} \approx \frac{\lambda}{\gamma}$.

Полосы интерференционной картины считаются различимыми, если их видность $V > 2/\pi$. При этом $D\Omega < \lambda/2$.

Рассмотрим второй тип методов получения когерентных волн (методы деления амплитуды). Проиллюстрируем его на примере интерференции света при отражении от тонкой плоскопараллельной стеклянной

пластинки в однородной среде с показателем преломления $n = 1$. Пусть на пластинку падает под углом α плоская волна, отражаясь как от ее верхней поверхности, так и от нижней (рис. 3.9). Направления распространения интерферирующих волн, описываемые лучами 1 и 2 , параллельны, и интерференционная картина будет локализована на бесконечном удалении от пластинки. Для ее наблюдения на пути отраженных волн ставят собирающую линзу, а в ее фокальной плоскости размещают экран.

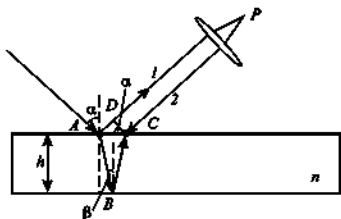


Рис. 3.9

Разность хода Δ интерферирующих волн, которым соответствуют лучи 2 и 1 (рис. 3.9), определяется следующим образом:

$$\Delta = n(AB + BC) - \left(AD + \frac{\lambda}{2} \right),$$

где n — показатель преломления вещества пластинки; дополнительный член $\frac{\lambda}{2}$ появляется вследствие того, что при отражении волны 1 от оптически более плотной среды происходит скачок фазы на π у электрической компоненты, или «потеря» полуволны (подробно этот эффект рассмотрен в гл. 9). В случае отражения от оптически менее плотной среды (отражение луча 2 в точке B) скачка фазы у электрической компоненты не происходит. Если же пластинка находится в однородной среде с большим показателем преломления, то «набег» фазы на $\frac{\lambda}{2}$ будет уже у луча 2 , в то время как луч 1 при отражении от пластинки фазу не меняет.

После преобразований получим: $\Delta = 2h n \cos \beta - \frac{\lambda}{2}$, или $\Delta = 2h \times \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}$. В этом случае условия наблюдения максимума и минимума следующие:

$$\begin{aligned} \max: \Delta &= m\lambda, \quad 2h n \cos\beta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \\ \min: \Delta &= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2h n \cos\beta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = m\lambda, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, при падении плоской волны на пластинку результат интерференции волн, отраженных от верхней и нижней граней пластинки, определяется ее толщиной в области падения волны и углом падения.

Выделяют два предельных случая, когда меняется только один из параметров, а именно:

- 1) на плоскопараллельную пластинку падает набор волн одинаковой частоты, но под разными углами;
- 2) плоская волна падает на пластинку, толщина которой несколько меняется от точки к точке.

В первом случае результат интерференции отраженных волн определяется углом падения волны на верхнюю грань пластинки. Ход лучей, падающих под углом α , представлен на рис. 3.9, а условия максимума и минимума интерференционной картины определяются выражениями (3.12). Светлые и темные полосы, соответствующие m -му порядку, формируются волнами, падающими под определенным углом α , поэтому их называют *полосами равного наклона*.

Во втором случае полосы одного порядка интерференции формируются при падении света на участки пластинки одинаковой толщины и называются *полосами разной толщины*. Если пластинка мало отличается от плоскопараллельной (угол θ составляет несколько угловых минут, рис. 3.10, а), можно считать, что $AB \approx BC$. Разность хода волн $\Delta \approx$

$\approx 2h n \cos\beta - \frac{\lambda}{2}$, и условия наблюдения максимума и минимума определяются согласно формулам (3.12).

Если волна падает на клин с углом при вершине θ , то интерференционные полосы будут локализованы вблизи поверхности (рис. 3.10, а) и параллельны ребру клина (рис. 3.10, б).

Примером полос равной толщины являются кольца Ньютона, которые наблюдаются при интерференции волн, отраженных от верхней и нижней границ воздушной прослойки, образованной между соприкасающимися выпуклой сферической поверхностью линзы и плоской поверхностью стеклянной пластинки. Кольца Ньютона можно наблюдать как в отраженном, так и в проходящем свете. Рассмотрим схему наблю-

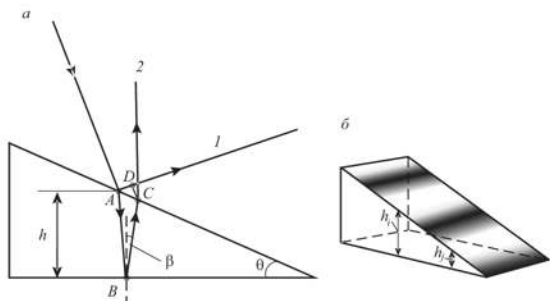


Рис. 3.10

дения колец в отраженном свете в случае, когда свет падает на линзу и наблюдение ведется сверху – со стороны линзы (рис. 3.11, *a*). На рис. 3.11, *a* интерферирующие волны изображены с помощью лучей 1 и 2, ход которых построен в предположении малого воздушного зазора и без учета преломления на границе стекло – воздух.

Интерференционные кольца будут иметь вид концентрических окружностей с центром в месте соприкосновения линзы с пластинкой (рис. 3.11, *б*). В центре интерференционной картины наблюдается тем-

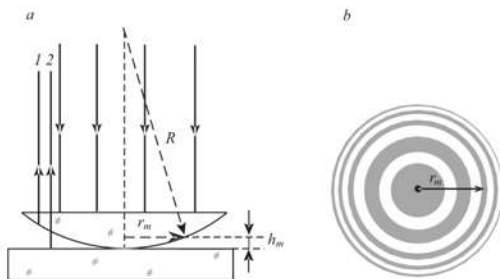


Рис. 3.11

ное пятно, так как при толщине воздушной прослойки, много меньшей длины волны излучения, разность хода интерферирующих волн близка к $\frac{\lambda}{2}$ из-за различия в условиях отражения на двух поверхностях воздушного зазора.

Определим радиус m -го темного кольца. Толщина воздушной прослойки в области, соответствующей образованию m -го минимума, равна h_m . Тогда разность хода интерферирующих волн $\Delta = 2h_m + \frac{\lambda}{2}$. Условие минимума $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ дает $2h_m = m\lambda$. Волны, отраженные от разных поверхностей воздушной прослойки, должны оставаться когерентными, поэтому оптическая разность хода волн должна быть достаточно малой, и возможность наблюдения колец ограничивается условием $h_m \ll R$, где R — радиус кривизны линзы. Тогда $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2 \approx 2Rh_m$ и радиус m -го темного кольца

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}. \quad (3.13)$$

Следует отметить, что полученное выражение справедливо только в случае точечного контакта линзы и пластинки. Центральному темному пятну соответствует порядок интерференции $m=0$. При $m=0$ из формулы (3.13) получим $r_0=0$, что соответствует темной точке в месте соприкосновения линзы и пластинки. Ширина колец $\Delta r = \frac{r_{m+1} - r_m}{2}$ уменьшается с возрастанием m . В общем случае номера наблюдаемых колец не равны порядку интерференции. Если линзу постепенно отодвигать от поверхности пластинки, то интерференционные кольца будут стягиваться к центру (их радиусы уменьшаются), а если прижимать линзу к пластинке, то интерференционные кольца будут разбегаться от центра (их радиусы увеличиваются).

Если наблюдение ведется в проходящем свете, то интерференционная картина будет инвертирована и в ее центре наблюдается светлое пятно. Поскольку радиусы колец зависят от длины волны λ , то при наблюдении в белом свете интерференционная картина будет окрашенной, но при этом наблюдается несколько первых колец с постепенным размыванием окраски.

Положение максимумов и для полос равной толщины, и для полос равного наклона зависят от длины волны λ . Если пластинка освещается монохроматическим светом, то наблюдаемая интерференционная картина представляет собой наложение интерференционных картин для

каждой спектральной компоненты. В белом свете, представляющем собой излучение в спектральном интервале от 400 до 750 нм, наблюдаются цветные полосы.

Примеры решения задач

Задача 3.1. В опыте Ллойда монохроматический источник света S представляет собой узкую щель, параллельную плоскости зеркала. Волна, исходящая непосредственно из источника, интерферирует с волной, отраженной от зеркала (рис. 3.12). В результате на экране Э образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана $l = 100$ см. При некотором расстоянии от щели до плоскости зеркала ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0,25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta d = 0,60$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза. Найти длину волны света.

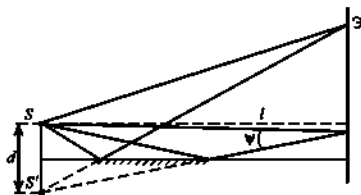


Рис. 3.12

Решение. Пусть источник S находится на расстоянии $d/2$ от плоскости зеркала (рис. 3.12). Изображение S' источника также будет расположено на расстоянии $d/2$ от этой плоскости. В схеме Ллойда расстояние от источника S до плоскости зеркала обычно намного меньше расстояния l от него до экрана ($\frac{d}{2} \ll l$), поэтому разность хода между волной, непосредственно падающей на экран, и волной, падающей на экран после отражения от зеркала, не превысит длины когерентности. Следовательно, источники S и S' можно считать когерентными.

Схема Ллойда несколько отличается от общей интерференционной схемы. В общей интерференционной схеме (см. рис. 3.2) разность фаз волн, приходящих в любую точку экрана, определяется только их оптической разностью хода и в центре интерференционной картины (точка O)

наблюдается максимум освещенности. В схеме Ллойда интерференционная картина на экране смещена вверх и формируется в результате наложения волн с разностью фаз, определяемой не только их разностью хода, но и условиями отражения волны от зеркала. В случае, когда отраженная от зеркала волна изменяет фазу на π , между волнами, сходящимися в любой точке экрана, будет добавочная разность хода $\Delta = \frac{\lambda}{2}$.

Ширина полос, определяемая как расстояние между соседними максимумами (или минимумами) интерференционной картины, будет такая же, как и в случае общей интерференционной схемы, поэтому для решения данной задачи можно использовать формулу (3.10).

Согласно формуле (3.10) ширина интерференционной полосы Δx определяется выражением $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi}$, где λ — длина волны света; ψ — угол схождения лучей. Поскольку $d \ll l$, то, как и для случая общей интерференционной схемы, $\psi \approx \frac{d}{l}$. Следовательно, $\Delta x = \frac{\lambda l}{d}$.

После того как источник отодвинули от плоскости зеркала на Δd , расстояние между S и S' стало равным $d + 2\Delta d$, а ширина полосы $\Delta x' = \frac{\lambda l}{d + 2\Delta d}$. По условию задачи $\eta \Delta x' = \Delta x$.

$$\text{Окончательно получим: } \lambda = \frac{2\Delta d \Delta x}{l(\eta - 1)} = 0,6 \text{ мкм.}$$

Задача 3.2. В схеме с бизеркалами Френеля угол между зеркалами $\alpha = 12^\circ$, расстояния от линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана — соответственно $r = 10,0$ см и $b = 130$ см. Длина волны света $\lambda = 0,55$ мкм. Определить:

а) ширину интерференционной полосы на экране и количество возможных максимумов;

б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на $\delta l = 1,0$ мм по дуге радиусом r с центром в точке O ;

в) максимальную ширину щели D_m , при которой интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо.

Решение. а) При расчете параметров интерференционной картины можно полагать, что когерентные волны исходят вторичными источниками S' и S'' , которые являются мнимыми изображениями щели S в зеркалах. В области перекрытия волн, испущенных этими источниками, может наблюдаться интерференционная картина (рис. 3.13).

Для того чтобы найти область перекрытия волн, достаточно построить ход лучей, отраженных от зеркал вблизи точки их соприкосновения (точка O). Для этого проведем прямые $S'O$ и $S''O$, которые пересекут

Поскольку в центре интерференционной картины находится максимум с $m = 0$, то число возможных максимумов должно быть нечетным. Следовательно, полученное значение нужно округлить до нечетного значения, т.е. число возможных максимумов будет равно 9. Поясним это с помощью рисунка. На рис. 3.14 показана возможная картина распределения интенсивности света на экране. Расстояние x от центра интерференционной картины до точки наблюдения зададим в единицах λ с учетом формулы (3.7) следующим образом: $x = \frac{i\Delta}{\lambda d}$. Целым значениям величины x будут соответствовать максимумы интерференционной картины.

Полученное значение величины $\frac{h}{\Delta x}$ будет равно расстоянию между двумя симметрично расположенными точками интерференционной картины, выраженному в единицах x . В данной задаче $\frac{h}{\Delta x} = 8,23$, максимумы с $|m| = 4$ уже видны, т.е. наблюдаем 9 максимумов (рис. 3.14). Такое округление проводится с учетом реальной картины. Например, при $\frac{h}{\Delta x} = 7,70$ максимумы с $|m| = 4$ еще не просматриваются, поэтому число видимых полос будет равно 7.

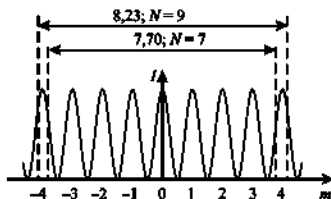


Рис. 3.14

б) При смещении источника S по дуге окружности радиусом r из положения S_1 в положение S_2 его изображения также будут смещаться по той же самой окружности, но в противоположном направлении (рис. 3.15).

Из равенств $\angle S_1'OA = \angle S_1''OA$ и $\angle S_2'OB = \angle S_2''OB$ следует, что $\angle S_1'OS_2' = \angle S_1''OS_2''$. Таким образом, при смещении источника на угол φ по ходу часовой стрелки его изображение сместится на такой же угол против хода часовой стрелки из S_1' в S_2'' . Аналогично можно показать, что изо-

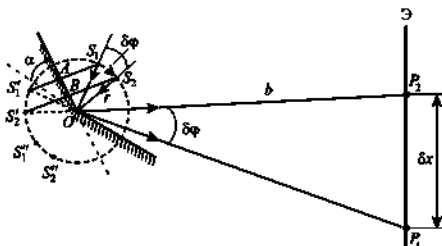


Рис. 3.15

бражение источника во втором зеркале тоже сместится на угол $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки из S_1'' в S_2'' .

Угол, на который сместился источник, $\delta\varphi = \frac{\delta l}{r}$. Проведем лучи $S_1'O$ и $S_2'O$. Они попадут на экран в точках P_1 и P_2 соответственно, причем $\angle P_2OP_1 = \delta\varphi$. Таким образом, при смещении источника по ходу часовой стрелки отраженный от зеркала луч пойдет выше, точка пересечения экрана лучом сместится вверх на расстояние δx . Аналогичным образом при смещении источника изменится ход лучей, отраженных от второго зеркала. Следовательно, вся интерференционная картина сместится на экране на расстояние δx .

Поскольку угол $\delta\varphi$ мал и $OP_1 \approx OP_2 \approx b$, то $\delta x \approx b\delta\varphi = \frac{b\delta l}{r} = 13$ мм.

в) Полосы интерференционной картины считаются различимыми, если их видность $V \geq \frac{2}{\pi}$. При этом $D\Omega < \frac{\lambda}{2}$, где Ω — апертура интерференции (рис. 3.16).

Поскольку $\angle S'O'A = \alpha$ — угол внешний по отношению к треугольнику $S'O'P$, то $\alpha = \frac{\Omega}{2} + \frac{\psi}{2}$, где ψ — угол схождения лучей. Следовательно,

$$\Omega = 2\alpha - \psi,$$

$$\psi \approx \frac{d}{l} = \frac{2r \sin \alpha}{b + r \cos \alpha} \approx \frac{2r\alpha}{b + r},$$

$$D_m = \frac{\lambda}{2\Omega} = \frac{\lambda}{2(2\alpha - 2r\alpha/(b+r))} = \frac{\lambda}{4\alpha \left(1 + \frac{r}{b}\right)}, D_m = 43 \text{ мкм.}$$

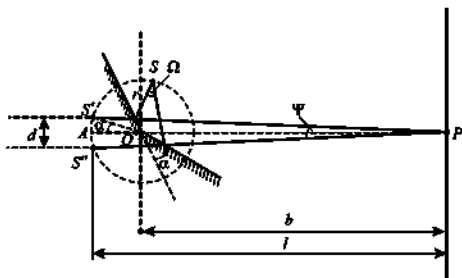


Рис. 3.16

Задача 3.3. Линзу диаметром 4,8 см и с фокусным расстоянием $f = 25,0$ см разрезали по диаметру на две одинаковые половинки так, что удаленным оказался слой толщины $a = 1,00$ мм. После этого обе половинки сдвинули до соприкосновения и в фокальной плоскости полученной таким образом билинзы поместили узкую щель, испускающую монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,60$ мкм. На некотором расстоянии b за билинзой расположили экран. При каком расстоянии от билинзы до экрана на нем будет наблюдаться максимальное число полос? Определить ширину интерференционной полосы на экране и количество наблюдаемых максимумов.

Решение. Удаление тонкого слоя линзы и сдвиг полученных половинок приводит к тому, что оптический центр O_1 верхней половинки билинзы смещается вниз на расстояние $\frac{a}{2}$ от главной оптической оси (рис. 3.17), а оптический центр O_2 ее нижней половинки смещается на такое же расстояние вверх, причем каждая половинка линзы будет действовать как полноправная линза в соответствии с законами геометрической оптики.

Лучи, идущие через оптический центр линзы, не преломляются, поэтому луч SO_1 прошел бы через оптический центр верхней половинки, не преломляясь, а луч SO_2 — через оптический центр нижней половинки, т.е. прямые SO_1 и SO_2 являются побочными оптическими осями. Поскольку щель S находится в фокальной плоскости билинзы, то после преломления в половинках линзы лучи пойдут двумя пучками, один из которых параллелен оптической оси SO_1 , а второй — оси SO_2 (рис. 3.17). Направим лучи из источника на края и центр билинзы. Луч SK_1 , падаю-

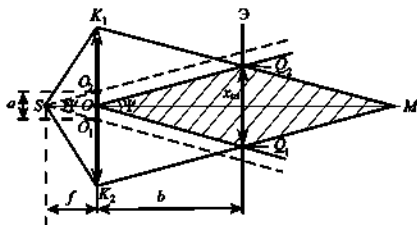


Рис. 3.17

щий на верхний край билинзы, после преломления (луч K_1M) идет параллельно прямой SO_1 , а луч SK_2 , падающий на нижний край билинзы, после преломления (луч K_2M) идет параллельно прямой SO_2 . После преломления из центра билинзы выйдут два луча, один из которых (OQ_1) параллелен прямой SO_1 , а другой (OQ_2) — прямой SO_2 .

Таким образом, после прохождения билинзы световая волна разделится на две части, одна из которых распространяется в области K_1MQ_1O , а другая — в области K_2MQ_2O . Поскольку толщина удаленного слоя намного меньше диаметра линзы, то угол ψ между направлениями распространения двух волн мал ($\psi \approx \frac{a}{f}$, где f — расстояние от источника до билинзы, равное ее фокусному расстоянию). Зона интерференции будет иметь вид вытянутого ромба OQ_2MQ_1 . Максимальная ширина x_m этого ромба равна половине диаметра билинзы:

$$x_m = \frac{D-a}{2} \approx \frac{D}{2},$$

так как $D \gg a$.

Расстояние между линзой и экраном

$$b = \frac{x_m}{2} / \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \approx \frac{Df}{2a} = 6,0 \text{ м.}$$

Ширина интерференционной полосы (см. формулу (3.10)) $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi}$.

Следовательно, $\Delta x = \frac{f\lambda}{a} = 0,15 \text{ мм}$ и не зависит от положения экрана.

Ширина интерференционной картины $x = x_m = \frac{D}{2}$. Для того чтобы найти количество полос на экране, разделим ширину интерференционной картины на ширину полосы:

$$\frac{x}{\Delta x} = \frac{Da}{2f\lambda} = 160.$$

Полученный результат необходимо округлить до нечетного значения (см. решение задачи 3.2), следовательно, количество наблюдаемых максимумов будет равно 159.

Задача 3.4. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана — соответственно $a = 25$ см и $b = 100$ см. Бипризма стеклянная с преломляющим углом $\theta = 20'$. Найти длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0,55$ мм.

Решение. Схема установки приведена на рис. 3.18. Преломляющий угол θ бипризмы мал, лучи падают под малыми углами, следовательно, все лучи отклоняются бипризмой на практически одинаковый угол $\varphi = (n - 1) \cdot \theta$ (см. решение задачи 7.2).

Поскольку углы φ отклонения лучей практически одинаковы, то лучи, прошедшие через верхнюю половину бипризмы, будут отклоняться на угол φ вниз от своего первоначального направления, продолжения лучей пересекутся в точке S' , расположенной выше S и смещенной на угол φ по отношению к оптической оси. Аналогично продолжения лучей, про-

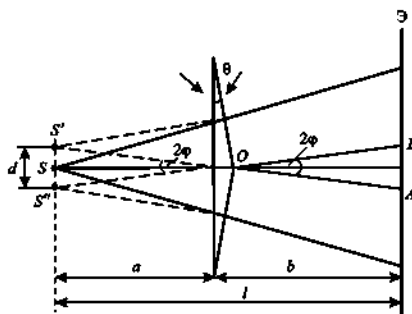


Рис. 3.18

шедших через нижнюю половину призмы, пересекутся в точке S'' , расположенной ниже S . Таким образом, волна, исходящая из щели S , делится на две части. Волна, прошедшая через верхнюю половину бипризмы, отклонится на угол φ к оптической оси и будет распространяться выше прямой OA , а волна, прошедшая через нижнюю половину бипризмы, будет распространяться ниже прямой OB . В области BOA волны перекрываются и может наблюдаться интерференционная картина.

Ширина интерференционной полосы определяется выражением (3.9)

$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda$, где $l = a + b$ – расстояние от щели S до экрана. Поскольку угол отклонения лучей $\varphi \ll 1$, то $d = 2a\varphi$. Следовательно,

$$\Delta x = \frac{a+b}{2a\varphi}\lambda.$$

Окончательно получим:

$$\lambda = \frac{2a(n-1)\theta\Delta x}{a+b}, \quad \lambda = 0,6 \text{ мкм.}$$

Задача 3.5. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстоянии $d = 2,5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии $l = 100$ см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщиной $h = 10$ мкм?

Решение. Щели S' и S'' в установке, схема которой приведена на рис. 3.19, будут являться действительными когерентными источниками света. В области перекрытия световых волн, прошедших через щели, возникнет интерференционная картина.

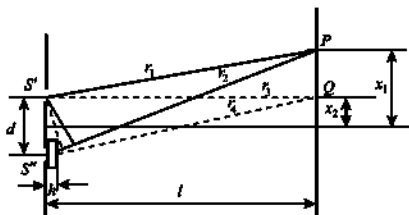


Рис. 3.19

Соответствующая m -му максимуму оптическая разность хода лучей, приходящих в точку P , $\Delta = r_2 - r_1$. В то же время $\Delta = \frac{x_1 d}{l}$, где x_1 – расстояние от центра интерференционной картины до m -го максимума; d – расстояние между щелями; l – расстояние от диафрагмы до экрана (см. формулу (3.7)).

Если одну из щелей (предположим, для определенности S'') перекрывать за щелью стеклянной пластинкой с показателем преломления n , то оптическая длина пути волны возрастет на $(n-1)h$, где h – толщина пластинки (при условии, что пластинка размещена таким образом, что все лучи, проходящие сквозь нее, проходят в ней расстояние h). Разность хода волн, формирующих m -й максимум, должна оставаться неизменной и удовлетворять условию $\Delta = m\lambda$. Значит, положение максимума на экране сместится вниз.

Пусть новому положению m -го максимума на экране соответствует точка Q , а r_3 и r_4 – расстояния от щелей до точки Q . Оптическая длина путей интерферирующих волн будет равна соответственно r_3 и $r_4 + (n-1)h$. Разность хода между волнами $\Delta = r_4 + (n-1)h - r_3$. Вместе с тем $r_4 - r_3 = \frac{x_2 d}{l}$, где x_2 – расстояние от центра интерференционной картины

до точки Q (см. формулу (3.7)). Следовательно, $\Delta = \frac{x_2 d}{l} + (n-1)h$.

Получили $\frac{x_2 d}{l} = \frac{x_1 d}{l} + (n-1)h$. Отсюда смещение m -й полосы на экране

$\Delta x = x_2 - x_1 = -\frac{hl(n-1)}{d} < 0$. Значит, полосы сместятся в сторону перекрытой щели на $2,0$ мм.

Если пластинку поместить перед щелью (рис. 3.20), то начальная фаза волны, проходящей через щель S'' , будет на $\frac{2\pi n(h-1)}{\lambda}$ больше, чем у волны, проходящей через щель S' . Следовательно, полосы также

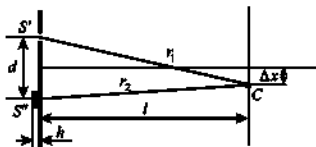


Рис. 3.20

смещаться в сторону перекрытой щели. Смещение центра интерференционной картины Δx найдем из условия равенства фаз волн, приходящих в точку С:

$$\frac{2\pi r_1}{\lambda} = \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \frac{2\pi h(n-1)}{\lambda} \Rightarrow r_1 - r_2 = h(n-1).$$

Согласно рис. 3.20 найдем:

$$r_1^2 = \left(\frac{d}{2} + \Delta x\right)^2 + l^2, \quad r_2^2 = \left(\frac{d}{2} - \Delta x\right)^2 + l^2 \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = 2d\Delta x.$$

Поскольку смещение Δx мало, то $r_1 + r_2 \approx 2l$, $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2) \times (r_1 - r_2) = 2lh(n-1)$, тогда

$$\Delta x = \frac{hl(n-1)}{d}, \quad \Delta x = 2,0 \text{ мм.}$$

Задача 3.6. Рассеянный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ падает на тонкую пленку вещества с показателем преломления $n = 1,5$. Определить толщину пленки, если угловое расстояние $\Delta\alpha$ между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к $\alpha = 45^\circ$, равно $3,0^\circ$.

Решение. Рассеянный монохроматический свет можно представить как совокупность монохроматических волн, падающих под разными углами на поверхность пленки. Толщина пленки постоянна. Ход лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей пленки, представлен на рис. 3.9. Разность хода этих лучей зависит от величины угла падения света. Наблюдаемая интерференционная картина будет представлять собой полосы равного наклона.

При формировании полос равного наклона условия наблюдения m -го и $(m+1)$ -го максимумов следующие (см. формулы (3.12)):

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = 2hn \cos\beta, \quad \left(m + \frac{3}{2}\right)\lambda = 2hn \cos(\beta - \delta\beta),$$

где β , $(\beta - \delta\beta)$ — соответствующие углы преломления лучей.

Следовательно, $\lambda = 2hn(\cos(\beta - \delta\beta) - \cos\beta)$. Разложив $\cos(\beta - \delta\beta)$ в ряд Тейлора при условии $\delta\beta \ll \beta$, получим:

$$\lambda = 2hn(\cos\beta + \sin\beta\delta\beta - \cos\beta), \quad h = \frac{\lambda}{2n\sin\beta\delta\beta}.$$

Для того чтобы найти $\delta\beta$, воспользуемся законом преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$ и возьмем дифференциал от левой и правой частей: $\cos\alpha\delta\alpha = -n\cos\beta\delta\beta$. Отсюда $\delta\beta = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}\delta\alpha$. Тогда

$$h = \frac{\lambda}{2n\sin\beta\delta\beta} = \frac{\lambda n\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\lambda n\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin 2\alpha} = \frac{\lambda\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin 2\alpha},$$

$$h = 15 \text{ мкм.}$$

Задача 3.7. Свет с длиной волны $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$ от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдается система интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина $\Delta x = 0,21 \text{ мм}$. Найти:

а) угол между гранями клина;

б) степень монохроматичности света $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$, если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $l \approx 1,5 \text{ см}$ от вершины клина.

Решение. а) Плоская волна, падающая нормально на поверхность клина, на границе раздела воздух — стекло разделяется на две волны: одна отражается от верхней грани клина, а вторая проходит в клин, отражается от его нижней поверхности и затем преломляется на верхней поверхности клина. В области, где волны перекрываются, может наблюдаться интерференционная картина. Для формирования устойчивой интерференционной картины необходимо, чтобы перекрывались части одного пути исходной волны. Разность хода между волнами, отраженными от разных участков клина, зависит от толщины клина, поэтому в области локализации интерференционной картины возникают чередующиеся светлые и темные полосы, параллельные ребру клина. Наблюдаемые полосы являются полосами равной толщины. При увеличении толщины клина разность хода волн, отраженных от его верхней и нижней поверхностей, возрастает, и при некоторой толщине клина разность хода станет больше длины когерентности и интерференционная картина наблюдаться не будет.

Условия наблюдения двух соседних максимумов, согласно формулам (3.12), запишем в следующем виде:

$$2h_m n = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2h_{m+1} n = \left(m + \frac{3}{2}\right)\lambda,$$

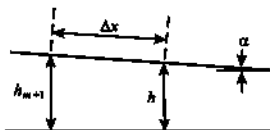


Рис. 3.21

где h_m, h_{m+1} — толщины клина в области образования двух соседних максимумов (рис. 3.21); n — показатель преломления стекла.

Из геометрических соображений (рис. 3.21) и учитывая, что угол α при вершине клина мал, запишем:

$$\alpha \approx \frac{\Delta h}{\Delta x}, \text{ где } \Delta h = h_{m+1} - h_m = \frac{\lambda}{2n}; \Delta x -$$

расстояние между соседними максимумами на поверхности клина.

$$\text{Окончательно получим: } \alpha \approx \frac{\lambda}{2n\Delta x}, \alpha = 3'.$$

б) Источник не является строго монохроматическим, и падающую волну можно представить как совокупность монохроматических волн в диапазоне $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Наблюдаемая интерференционная картина является результатом суперпозиции интерференционных картин, создаваемых монохроматическими компонентами падающего света. Интерференционные полосы в суммарной картине будут неразличимы, если k -й максимум для $\lambda + \Delta\lambda$ совпадет с $(k + 1)$ -м максимумом для λ . Условия соответствующих максимумов:

$$2hn = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2hn = \left(k + \frac{1}{2}\right)(\lambda + \Delta\lambda).$$

Выразив из первого уравнения $k = \frac{2hn}{\lambda} - \frac{3}{2}$ и подставив во второе уравнение, получим: $\lambda + \Delta\lambda = 2hn \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Степень монохроматичности све-

$$\text{та } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2hn - \lambda}.$$

Исчезновение интерференционных полос происходит при $h = d' = \frac{\lambda}{2n\Delta\lambda}$. Следовательно, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x}{l - \Delta x}$. Поскольку $\Delta x \ll l$, то $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta x}{l} = 1,4 \cdot 10^{-2}$.

Задача 3.8. Две плоско-выпуклые тонкие стеклянные линзы соприкасаются своими сферическими поверхностями. Найти оптическую силу такой системы, если в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 0,60$ мкм диаметр 5-го светлого кольца $d = 1,50$ мм.

Решение. Разность хода волн будет определяться воздушными промежутками для двух линз: $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (рис. 3.22), причем $\delta_1 = \frac{r^2}{2R_1}$ и $\delta_2 = \frac{r^2}{2R_2}$ (см. формулу (3.13)). Следовательно,

$$\delta = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1, R_2 — радиусы сферических поверхностей линз.

Разность хода волн, отраженных от воздушной прослойки между линзами, $\Delta = 2(\delta_1 + \delta_2) + \frac{\lambda}{2}$. Интерференционная картина будет представлять собой центральное темное пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами (см. рис. 3.11, б).

Для 5-го светлого кольца $\Delta = m\lambda$, $m = 5$. Получим:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(m\lambda - \frac{\lambda}{2} \right) / r^2 = 4 \left(m\lambda - \frac{\lambda}{2} \right) / d^2.$$

Оптическая сила линз (см. гл. 8)

$$\Phi_1 = (n_c - 1) \frac{1}{R_1}, \quad \Phi_2 = (n_0 - 1) \frac{1}{R_2},$$

где $n_c = 1,5$ — показатель преломления стекла,

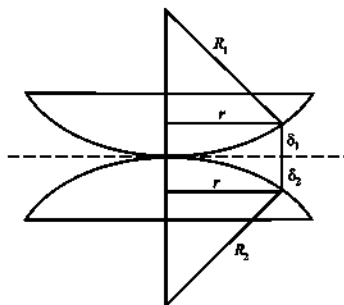


Рис. 3.22

оптическая сила системы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (n_c - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2(n_c - 1) \frac{2m - 1}{d^2} \lambda, \quad \Phi = 2,4 \text{ дптр.}$$

Если линзы находятся в веществе, показатель преломления которого n_m больше показателя преломления стекла n_c (например, в масле, причем масло заполняет и промежуток между линзами), то вид интерференционной картины изменится. Отражение от границы линза – масло будет происходить с потерей полуволны, и разность хода интерферирующих волн $\Delta = 2(\delta_1 + \delta_2)n_m - \frac{\lambda}{2}$. С учетом условий максимума и минимума интерференции волн (формулы (3.6)) для толщины зазора между линзами в области формирования светлых полос получим:

$$\delta_1 + \delta_2 = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2n_m}, \text{ в области формирования темных полос получим:}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = (m + 1) \frac{\lambda}{2n_m}. \text{ Таким образом, в центре интерференционной кар-}$$

тины будет наблюдаться светлое пятно, которому соответствует порядок интерференции $m = 0$. Для 5-го светлого кольца с $m = 5$ получим:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{11\lambda}{4n_m} \text{ и } \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{22\lambda}{d^2 n_m}.$$

Оптическая сила такой системы

$$\Phi = (n_c - n_m) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{n_c}{n_m} - 1 \right) \frac{22}{d^2} \lambda.$$

Задача 3.9. В интерферометре Майкельсона исследовалась желтая линия натрия, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. При поступательном перемещении одного из зеркал интерференционная картина периодически исчезала. Найти расстояние между двумя положениями зеркал, соответствующими двум последовательным появлениям наиболее четкой картины.

Решение. Рассмотрим ход лучей в интерферометре Майкельсона, схема которого приведена на рис. 3.23. Свет от источника S падает на плоскопараллельную пластинку P , одна сторона которой покрыта слоем серебра так, что пластинка отражает половину падающего на нее излучения, а половину пропускает. После разделения волны 1 и 2 распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях. Волна 1 после отражения от посеребренной стороны пластины снова проходит через

пластину, отражается от зеркала $З_1$, опять проходит через пластину P и разделяется на две части; прошедшая половина излучения попадает в зрительную трубу T . Волна 2 отражается от зеркала $З_2$, падает на пластину P и разделяется на две части, отраженная половина попадает в зрительную трубу T .

Волна 1 проходит пластину P 3 раза, а волна 2 — только 1 раз. Для компенсации возникающей вследствие этого разности хода в плечо интерферометра вводят пластину K , аналогичную пластине P , но не покрытую слоем серебра. В результате наложения волн в фокальной плоскости объектива наблюдается интерференционная картина. Вид интерференционной картины зависит от юстировки зеркал и расходимости падающего на пластину P пучка света.

Когда зеркала $З_1$ и $З_2$ расположены строго перпендикулярно друг к другу и пучок света, падающий на пластину P , представляет собой слабо расходящийся поток, то при одинаковых расстояниях от зеркал до пластины P поле зрения освещено равномерно. Если эти расстояния различны, то наблюдаются полосы равного наклона (концентрические кольца).

В рассматриваемом случае излучение состоит из двух монохроматических компонент и наблюдаемая интерференционная картина представляет собой наложение двух интерференционных картин, созданных компонентами излучения. Интерференционная картина оказывается наиболее четкой при совпадении светлых колец. Поскольку интерферометр Майкельсона дает большие разности хода волн, то это условие имеет вид $m\lambda_2 = (m+k)\lambda_1$, а следующее — $m'\lambda_2 = (m'+k'+1)\lambda_1$ и т.д., где m, k, m', k' — целые числа. Поскольку используется желтая линия натрия, состоящая из компонент с длиной волны $\lambda_2 > \lambda_1$, то для разности хода волн при последовательных наблюдениях наиболее четкой картины можно записать: $\Delta_1 = (m+1)\lambda_1 = m\lambda_2$, $\Delta_2 = (m'+2)\lambda_1 = m'\lambda_2$ и т.д. Разность хода лучей Δ в интерферометре Майкельсона равна удвоенной разности длин плеч интерферометра: $\Delta = 2h$ (рис. 3.23), поэтому последовательным появлениям четкой картины соответствуют положения зеркала $h_1 = \Delta_1/2$, $h_2 = \Delta_2/2$, ..., а смещение зеркала между этими положениями $\Delta h = h_2 -$

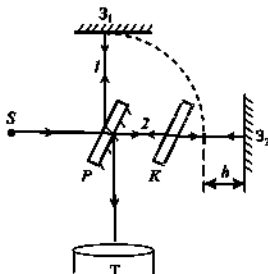


Рис. 3.23

$-h_1 = (m - m' + 1)\lambda_1/2 = (m - m')\lambda_2/2$. Положим $j = m - m'$ и запишем условие перехода между двумя последовательными появлениями четкой картины в виде $(j + 1)\lambda_1 = j\lambda_2$, где j — целое число.

Введем обозначение $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, тогда $j = \lambda_1/\Delta\lambda$. Соответствующее перемещение зеркала Δh можно определить из условия максимума

$$2\Delta h = j\lambda_2. \text{ Окончательно получим: } \Delta h = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda}, \Delta h = 0,3 \text{ мм.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Оптическая разность хода двух интерферирующих монохроматических волн одинаковой интенсивности $\Delta = \frac{1}{3}\lambda$. Определить разность фаз между этими волнами. Какова интенсивность в точке наблюдения?

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$; $I = I_0$, где I_0 — интенсивность каждой из интерферирующих волн.

2. В опыте Юнга одну из щелей перекрывают тонкой стеклянной пластинкой, толщину которой подбирают таким образом, чтобы в центре интерференционной картины вместо светлой полосы наблюдалась темная. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена пластинка, $n = 1,5$. Длина волны света $\lambda = 600$ нм. Какова минимальная толщина h пластинки?

$$\text{Ответ: } h = \frac{\lambda}{2(n-1)}, h = 0,6 \text{ мкм.}$$

3. Тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезали на две одинаковые половины и раздвинули их на $2h = 2,0$ мм. Область между половинами линзы закрыли непрозрачным экраном. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 600$ нм поместили на оси симметрии системы на расстоянии $a = 20$ см слева от линзы, а экран — на расстоянии $b = 380$ см справа от линзы. Найти количество интерференционных полос на экране. Сколько будет полос, если источник поместить на расстоянии $a' = 8,0$ см слева от линзы?

Ответ: 75; 0.

4. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана — соответственно $a = 20$ см и $b = 140$ см. Бипризма изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$, ее преломляющий угол $\theta = 10^\circ$. Длина волны излучения $\lambda = 600$ нм. Найти количество полос интерференции на экране.

Ответ: 247.

5. Между точечным источником света с длиной волны $\lambda = 589$ нм и бипризмой с преломляющим углом $\theta = 10'$ поместили собирающую линзу. В результате ширина интерференционных полос перестала зависеть от расстояния между экраном и бипризмой и составила $\Delta x = 0,202$ мм. Определить показатель преломления n бипризмы. Какое максимальное количество полос N_m можно наблюдать с помощью данной установки, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы $d = 3,7$ см?

Ответ: $n = \frac{\lambda}{2\alpha\Delta x} + 1$, $n = 1,51$; $N_m = \frac{d}{2\Delta x}$, $N_m = 91$.

6. На бисеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 15'$, падает плоская волна с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Найти ширину интерференционной полосы на экране.

Ответ: $7 \cdot 10^{-5}$ м.

7. Свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм падает на стеклянный клин ($n = 1,5$) под углом $\varphi = 30'$. В отраженном свете на клине наблюдаются интерференционные полосы. Найти расстояние между соседними полосами. Угол между поверхностями клина $\alpha = 12''$.

Ответ: $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}}$, $\Delta x \approx 0,0033$ м.

8. Белый свет падает под углом $\alpha = 45^\circ$ на стеклянную ($n = 1,5$) пластинку толщиной $h = 0,4$ мкм. Для каких длин волн, лежащих в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), выполняется условие максимума при наблюдении в отраженном свете?

Ответ: 415, 432, 450, 471, 492, 516, 543, 572, 605, 641, 683 нм.

9. Кольца Ньютона наблюдают с помощью плоскопараллельной стеклянной пластинки и тонкой двояковыпуклой линзы с оптической силой $D = 5$ дптр, изготовленных из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Свет с длиной волны $\lambda = 630$ нм падает со стороны пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Если пластинка лежит на одной из поверхностей линзы, то радиус r_1 светлого кольца порядка $m = 12$ (центральному светлому пятну соответствует $m = 0$) равен 2,0 мм. Каков будет радиус r_2 светлого кольца того же порядка, если пластинку положить на другую поверхность линзы?

Ответ: $r_2 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{r_1^2} + \frac{D}{(n-1)m\lambda}}}$, $r_2 = 0,8$ мм.

10. Кольца Ньютона наблюдают в монохроматическом свете ($\lambda = 589$ нм) с помощью плоско-выпуклой линзы, лежащей на плоскопараллельной стеклянной пластинке. Наблюдение ведется в отраженном

свете, свет падает на пластинку нормально. Радиусы двух соседних темных колец – соответственно $r_k = 4,0$ мм и $r_{k+1} = 4,45$ мм. Найти радиус R кривизны линзы и порядковые номера k колец.

$$\text{Ответ: } R = \frac{r_{k+1}^2 - r_k^2}{\lambda}, R = 6,5 \text{ м}; k = \frac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} = 4; k+1 = 5.$$

11. Кольца Ньютона получают с помощью плоско-выпуклой линзы радиусом кривизны R_1 , лежащей на двояковогнутой симметричной сферической линзе с радиусом кривизны $R_2 > R_1$. В отраженном свете радиус m -го темного кольца r . Определить длину λ световой волны. Как изменится радиус этого кольца, если пространство между линзами заполнить водой?

Ответ: $\lambda = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{r^2}{m}$; уменьшится в \sqrt{n} раз (n – показатель преломления воды).

12. Для измерения показателя преломления газов в одно из плеч интерферометра Майкельсона помещают откачанную трубку, концы которой закрыты плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки газом происходит смещение интерференционных полос. Для азота это смещение составило $k_1 = 204$ полосы, а для гелия – $k_2 = 24$. Определить показатели преломления n газов, если длина трубки $l = 20,2$ см, а длина волны излучения $\lambda = 589,3$ нм.

$$\text{Ответ: } n = \frac{k\lambda}{2l} + 1,0; n = 1,000298; n = 1,000035.$$

4

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА КРУГЛОМ ПРЕПЯТСТВИИ

Под *дифракцией света* понимают любое отклонение света от прямолинейного распространения, если оно не может быть истолковано как результат отражения, преломления или искривления световых волн в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления. Явление дифракции имеет волновую природу и строго может быть описано на основе решения уравнений Максвелла с учетом соответствующих граничных условий.

Менее строго, но достаточно корректные подходы к описанию дифракции базируются на использовании принципа Гюйгенса – Френеля, который утверждает, что каждая точка среды, до которой дошло оптическое возбуждение, становится источником вторичных волн и результирующую амплитуду волны в любой точке можно найти как результат интерференции вторичных волн.

Наиболее существенным (для теории дифракции) следствием принципа Гюйгенса – Френеля является то, что в качестве системы вторичных источников можно выбрать удобную их совокупность с заданным распределением начальных амплитуд и фаз. Именно на использовании принципа Гюйгенса – Френеля строится дифракционная теория Кирхгофа, которая излагается в учебных пособиях [2, 12].

Одним из существенных ограничений теории Кирхгофа является сферичность вторичных волн, что делает возможным описание оптических полей на расстояниях от области дифракции, значительно больших длины волны. В этом случае выделяют два типа дифракции:

- 1) дифракция Френеля, которая наблюдается на расстояниях, существенно больших характерных размеров системы вторичных источников, причем раз-

ность хода от разных областей системы вторичных источников до точки наблюдения может составлять порядка десятков значений длины волны;

2) дифракция Фраунгофера, которая наблюдается на значительно больших расстояниях, так что разность хода от разных областей системы вторичных источников до точки прямого наблюдения значительно меньше λ .

Для дифракции Френеля распределение интенсивности света за препятствием может быть рассчитано на основании теории Кирхгофа. При этом даже для препятствий простой формы данный расчет можно сделать только численно (пример такого расчета приводится в гл. 5). Однако существует большое количество схем дифракции, для которых на основании теории Кирхгофа можно сформулировать символические методы, позволяющие получать качественный и даже количественный результат.

Рассмотрим аксиально симметричную схему, включающую точечный изотропный источник S монохроматического света с длиной волны λ и непрозрачный плоский экран с небольшим отверстием радиусом r , через которое свет попадает в точку наблюдения P (рис. 4.1). Аксиальная симметрия подразумевает, что источник света S , центр отверстия и точка наблюдения P лежат на одной прямой. Система находится в воздухе, для которого показатель преломления $n = 1$.

Поскольку источник S точечный и изотропный, то от него будет распространяться сферическая волна. Принцип Гюйгенса – Френеля позволяет в качестве системы вторичных источников выбрать такой набор [2], что ненулевой вклад будут давать только источники, возбуждаемые участком ограниченной круглым отверстием в экране волновой сферической поверхности радиусом a с центром в точке S . Следовательно, амплитуда и фаза всех этих источников, которые лежат на сферической поверхности, являются одинаковыми.

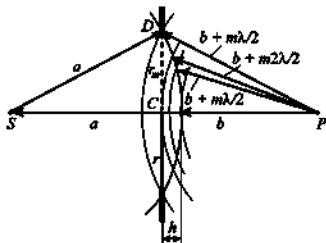


Рис. 4.1

О.Ж. Френель предложил разбить эту поверхность на кольцевые зоны, расстояния от внутреннего и внешнего краев которых до точки P отличаются на $\lambda/2$. Найдем радиус m -й зоны Френеля, считая, что отверстие как раз открывает m таких зон. Будем считать, что $a, b \gg \lambda$ и открыто малое число зон Френеля ($a, b \gg r$), а это значит, что величина h (высота шарового сегмента) мала и расстояния от источника до диафрагмы и от диафрагмы до точки наблюдения можно принять равными a и b соответственно.

Из прямоугольных ΔSCD и ΔCDP можно записать:

$$r_m^2 = a^2 - (a-h)^2 = (b+m\lambda/2)^2 - (b+h)^2, \quad (4.1)$$

$$r_m^2 = a^2 - a^2 + 2ah - h^2 = b^2 + 2bm\lambda/2 + (m\lambda/2)^2 - b^2 - 2bh - h^2,$$

или

$$2ah = 2bm\lambda/2 + (m\lambda/2)^2 - 2bh, \quad (4.2)$$

откуда, пренебрегая членом $(m\lambda/2)^2$, находим:

$$h = \frac{bm\lambda/2}{a+b}. \quad (4.3)$$

Поставляя h в левую часть равенства (4.1) и пренебрегая малой величиной h^2 , для радиуса внешней границы m -й зоны Френеля получаем:

$$r_m = \sqrt{\frac{2ba}{b+a} m\lambda/2}. \quad (4.4)$$

Найдем площадь зоны Френеля. Площадь шарового сегмента $\sigma = 2\pi ah$. Подставив h из формулы (4.3) в формулу (4.4), получим:

$$\sigma_m = \frac{2\pi ab}{a+b} m\lambda/2. \quad (4.5)$$

Площадь шарового сегмента радиусом r_{m-1}

$$\sigma_{m-1} = \frac{2\pi ab}{a+b} (m-1)\lambda/2.$$

В результате площадь одной зоны Френеля

$$\sigma = \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{2\pi ab}{a+b} \lambda/2. \quad (4.6)$$

Таким образом, площади всех зон Френеля одинаковы (в приближении малости члена $(m\lambda/2)^2$). Иными словами, чем лучше выполняется неравенство $r \ll a, b$, тем с большей точностью площади всех зон Френеля можно считать одинаковыми.

Равенство площадей зон Френеля означает, что число источников вторичных волн в каждой из зон также одинаково (для однородной изотропной среды плотность источников вторичных волн будет постоянной на поверхности сферы с центром, в котором находится точечный источник, и зависит от интенсивности источника и радиуса сферической поверхности), причем амплитуды волн, испускаемые ими, также будут одинаковыми. Иными словами, амплитуда волны от системы вторичных источников пропорциональна площади, которую они занимают. А это, в свою очередь, означает, что амплитуды волн от каждой из зон Френеля, приходящих в точку P , должны быть одинаковыми. При этом волна от каждой последующей зоны Френеля имеет дополнительную разность хода $\lambda/2$ по отношению к волне от предыдущей зоны Френеля. Но такая разность хода означает, что волны от соседних зон приходят в противофазе и должны гасить друг друга. Иными словами, если открыто нечетное число зон Френеля, то в точке P будет наблюдаться локальный максимум, а если четное, то интенсивность в точке P близка к нулю.

Полученные выводы могут быть легко перенесены со сферической волны на плоскую. Для этого достаточно использовать формальный предельный переход $a \rightarrow \infty$, т.е. представить плоскую волну как сферическую волну с бесконечным радиусом волнового фронта. Тогда

$$r_m = \sqrt{b m \lambda}; \quad (4.7)$$

$$\sigma = \pi b \lambda, \quad (4.8)$$

а все полученные выше выводы остаются в силе и для случая плоской волны.

Метод зон Френеля не ограничивается получением таких общих выводов, а допускает построение символического метода определения интенсивности волны в точке P и для случая, когда число открытых зон Френеля не является целым.

Выделим первую зону Френеля и разобьем ее на N подзон по такому же принципу, как строились зоны Френеля, т.е. разность расстояний от внешнего и внутреннего краев подзоны до точки P равна $\lambda/(2N)$. При таком разбиении площади всех подзон будут одинаковы и в N раз меньше площади всей первой зоны. В этом случае вместо одной волны от всей первой зоны мы имеем N когерентных волн со сдвигом фаз между соседними волнами π/N .

Результат интерференции этих волн можно найти графически в так называемом *фазовом пространстве*, где амплитуда волны представляет-

ся вектором, а фазовый сдвиг определяется поворотом одного вектора относительно другого на величину фазового сдвига. Следовательно, нужно сложить N одинаковых по величине векторов с поворотом каждого последующего вектора относительно предыдущего на угол π/N . Поскольку фазовый сдвиг связан с запаздыванием волны, примем, что в этом случае вектор будем поворачивать против хода часовой стрелки. При большом значении N вектор амплитуды последней волны будет повернут практически на угол π по отношению к вектору первой волны. В результате мы получим цепочку векторов (рис. 4.2, а), которые образуют ломаную линию, вписанную в полуокружность. И чем больше значение N , тем ближе эта ломаная к полуокружности, поэтому в пределе $N \rightarrow \infty$ мы переходим к плавной кривой — полуокружности.

Теперь в соответствии с правилами векторного сложения нужно соединить начало первого вектора с концом последнего, и получим вектор \vec{A}_1 , соответствующий амплитуде волны от первой зоны Френеля в точке P (рис. 4.2, а).

Проведем точно такую же процедуру со второй зоной Френеля, т.е. разобьем и ее на N подзон, и будем суммировать амплитуды этих волн с учетом фазовых сдвигов, причем начало первого вектора для второй зоны Френеля совпадает с концом последнего вектора для первой зоны Френеля. На первый взгляд, мы должны были бы получить вторую часть окружности и кривая должна была бы замкнуться в начальной точке. Однако следует подчеркнуть, что амплитуда волны, приходящей в точку наблюдения P , определяется не ее реальной площадью dS , а видимой площадью $dS' = dS \cos \theta$, где θ — угол между направлением нормали к dS и направлением к точке наблюдения P . По мере увеличения радиуса подзон угол θ увеличивается, хотя и очень медленно. Вследствие этого будет очень медленно уменьшаться и длина векторов с ростом номера n . В результате кривая, соответствующая одной зоне Френеля,

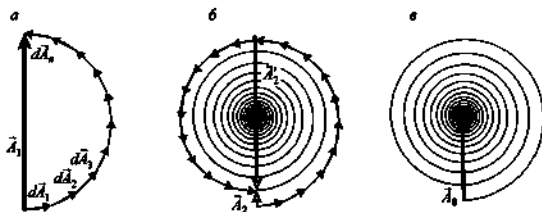


Рис. 4.2

будет, хотя и незначительно, отличаться от половинки окружности. Поэтому при построении кривой для второй зоны Френеля ее конец не замкнется на исходную точку, а образуется некоторый сдвиг (рис. 4.2, б), который определит, хотя и очень малую, ненулевую амплитуду \bar{A}_2 для двух открытых зон. Следует иметь в виду, что амплитуда волны от самой второй зоны Френеля \bar{A}'_2 (рис. 4.2, б) близка к \bar{A}_1 , но сдвиг фаз между волнами соседних зон равен π (векторы \bar{A}_1 и \bar{A}'_2 антипараллельны).

Таким образом, кривая, соответствующая волнам от двух открытых зон Френеля, будет представлять собой виток спирали. Если провести описанную процедуру для третьей и четвертой зон Френеля, то получим следующий виток спирали.

Если теперь убрать диафрагму, то разбиение на зоны Френеля можно провести для всего фронта сферической волны, видимого из точки P . При этом число зон неограниченно возрастает и видимая площадь зон с большим n становится очень маленькой, в пределе стремящейся к нулю. В результате для всего открытого волнового фронта наша кривая приобретает вид спирали, сходящейся к центру (ее часто называют *спиралью Френеля*). Тогда очевидно, что вектор \bar{A}_0 , соединяющий начало и конец этой кривой (рис. 4.2, в), представляет собой амплитуду исходной волны, падающей на экран с отверстием (см. рис. 4.1). Сопоставление картин, представленных на рис. 4.2, а и 4.2, в, дает $\bar{A}_0 = \bar{A}/2$. Итак, если у нас открыто четное число зон Френеля, то в точке P наблюдается *минимум* интенсивности, а если нечетное — то *максимум*.

Рассмотрим ситуацию, когда препятствие представляет собой непрозрачный диск, а не отверстие в непрозрачной плоскости. Тогда можно воспользоваться принципом суперпозиции и рассматривать схему как дополнительную к представленной на рис. 4.1. Теперь волна, идущая от точечного источника S , частично перекрывается круглым диском радиусом r , через центр которого проходит прямая, соединяющая источник S с точкой наблюдения P (рис. 4.3).

Отталкиваясь от принципа суперпозиции, первоначально допустим, что экран отсутствует. Тогда, разбивая волновой фронт на зоны Френеля, можно построить спираль Френеля. Возвращая экран на место, можно считать, что он перекрывает часть волнового фронта, соответствующую, например, N зонам. Это означает, что на спирали Френеля мы должны убрать (стереть!) N первых полувитков и для получения ампли-

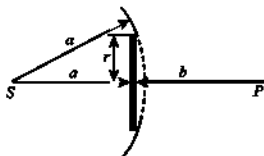


Рис. 4.3

туды волны, приходящей в точку P , соединить начало оставшейся части спирали с ее концом (рис. 4.4). При этом величина амплитуды волны в точке P близка к A_0 . Отсюда следует интересный вывод: какую бы часть волнового фронта ни перекрывал круглый экран, в центре дифракционной картины наблюдается максимум освещенности (его называют *пятном Пуассона*).

Таким образом, рассмотренный символический метод позволяет достаточно просто и наглядно решать задачи на дифракцию на круглых препятствиях, что и демонстрируется далее при анализе решения задач.

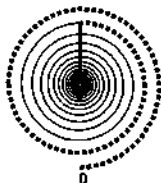


Рис. 4.4

Примеры решения задач

Задача 4.1. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно изменять. Расстояния от диафрагмы до источника и от диафрагмы до экрана — соответственно $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1,00$ мм, а следующий максимум — при $r_2 = 1,29$ мм.

Решение. По условию задачи радиусу r_1 диафрагмы соответствует максимум интенсивности в центре дифракционной картины. Следовательно, для точки наблюдения открыто нечетное число зон Френеля. Тогда на основании формулы (4.4) можно записать:

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}(2m+1)\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При увеличении радиуса диафрагмы следующий максимум получается, когда открыто следующее нечетное число зон Френеля. Тогда

$$r_2 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}(2(m+1)+1)\lambda}.$$

Возводя в квадрат оба равенства и вычитая из второго первое, получаем: $r_2^2 - r_1^2 = \frac{ab}{a+b} 2\lambda$, откуда

$$\lambda = \frac{(r_2^2 - r_1^2)(a+b)}{2ab}, \quad \lambda = 0,60 \text{ мкм.}$$

Задача 4.2. На пути плоской световой волны с длиной волны $\lambda = 0,54$ мкм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней — диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы — экран. При каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

Решение. Если плоская волна падает на собирающую линзу, то после линзы она должна сходиться в точке фокуса линзы, т.е. собирающая линза преобразует плоскую волну в сходящуюся сферическую, центр кривизны фронта которой находится в точке фокуса линзы (точка F на рис. 4.5). В результате на диафрагму будет падать сходящаяся волна, как бы исходящая из мнимого источника, который находится справа от диафрагмы. Этот волновой фронт тоже можно разбить на зоны Френеля, но при этом следует принять во внимание следующее. Если мнимый источник S' находится за точкой P ($f > b$), то расстояние от края области волнового фронта до точки P будет больше b , т.е. расстояние до края m -й зоны будет равно $b + m\lambda/2$. Если же $f < b$ (что имеет место в нашем случае), то с ростом номера зоны m расстояние до точки P уменьшается, т.е. расстояние до края m -й зоны будет равно $b - m\lambda/2$.

Дальнейший расчет можно выполнять по аналогии с тем, как было получено выражение (4.4). Однако можно напрямую воспользоваться

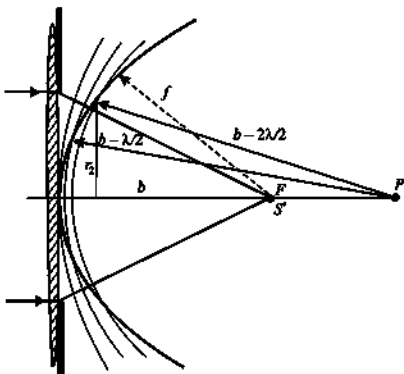


Рис. 4.5

выражением (4.4) для случая $f < b$, если произвести формальную замену $a \rightarrow -a$ (мнимый источник, расположенный справа от диафрагмы и находящийся между диафрагмой и точкой наблюдения) и $m \rightarrow -m$ (поскольку с ростом m расстояние до точки P будет уменьшаться).

Освещенность будет максимальной при условии, что диафрагма открывает нечетное число зон Френеля. Тогда радиус диафрагмы

$$r = \sqrt{\frac{fb}{b-f}}(2m+1)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание. В случае $f > b$ выражение для радиуса зоны Френеля станет:

$$r = \sqrt{\frac{fb}{f-b}}m\lambda.$$

(Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулу для радиуса зоны Френеля для данного случая.)

Следует обратить внимание на тот факт, что, если $f < b$, то радиус кривизны сходящейся волны меньше, чем расстояние от точки наблюдения до границы любой зоны Френеля, а в случае $f > b$ радиус кривизны сходящейся волны больше, чем расстояние от точки наблюдения до границы любой зоны Френеля, как было при выводе выражения (4.4).

Отдельного рассмотрения требует случай, когда точка P находится в точке фокуса линзы. Тогда все волны от всех вторичных источников, расположенных на сходящейся волне, будут приходить в точку P в фазе. Следовательно, в данной точке будет наблюдаться максимальная интенсивность. Более подробно этот случай будет рассмотрен при решении задач в гл. 6.

Задача 4.3. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачную плоскость с круглым отверстием. Определить интенсивность света I за экраном в точке, для которой:

а) отверстие сделали равным первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;

б) отверстие сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину по диаметру.

Решение. а) Пусть отверстие открывает первую зону Френеля волнового фронта падающей волны (рис. 4.6, а). На спирали Френеля (рис. 4.6, б) область, соответствующая этой зоне, представляет собой половину окружности (выделена жирным). Соединяем начало и конец витка и получаем вектор амплитуды волны для первой зоны Френеля \vec{A}_1 , длина которого в 2 раза больше длины вектора \vec{A}_0 , соответствующего амплитуде падающей волны, т.е. $A_1 = 2A_0$.

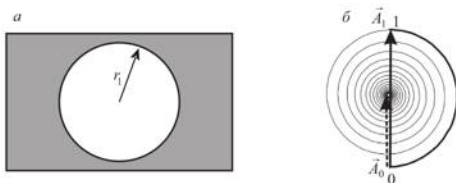


Рис. 4.6

Следовательно, интенсивность света в центре дифракционной картины в 4 раза выше, чем интенсивность падающей волны, т.е. $I = 4I_0$ (поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды).

Уменьшим теперь радиус отверстия до значения r_2 так, чтобы оно открывало внутреннюю половину первой зоны Френеля (рис. 4.7, а). На спирали Френеля этой области волнового фронта будет соответствовать четверть первого витка (рис. 4.7, б), а соответствующая амплитуда волны — $\vec{A}_{0,5}$. Считая, что часть витка спирали Френеля близка к дуге окружности, получаем $A_{0,5} = \sqrt{2}A_0$. Следовательно, в точке наблюдения интенсивность $I = 2I_0$.



Рис. 4.7

б) Пусть отверстие сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину по диаметру (рис. 4.8, а). В данном случае волновой фронт, проходящий через отверстие, тоже можно разбить на зоны Френеля, которые будут представлять собой полукольца, а не кольца, как в случае круглого отверстия, но их последовательность будет такой же. Таким образом, эффект сложения амплитуд от зон Френеля будет точно таким же, как и в случае полностью открытого отверстия, однако площадь зоны Френеля уменьшается в 2 раза. Это значит, что количество

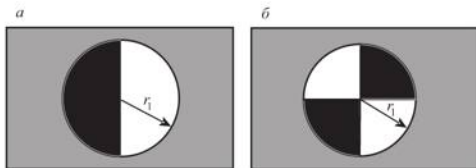


Рис. 4.8

элементарных излучателей уменьшилось в 2 раза, но все фазовые соотношения остались такими же, как и для полностью открытого отверстия. Следовательно, амплитуда волны, приходящей в точку наблюдения, будет в 2 раза меньше по сравнению со случаем, когда волна проходит через круглое отверстие. Таким образом, в точке наблюдения результирующая амплитуда волны $A = A_1/2 = 2A_0/2 = A_0$. Интенсивность $I = I_0$.

З а м е ч а н и е. Если при разбиении волнового фронта на тонкие кольца отношение полной длины кольца соответствующей зоны Френеля к открытой его части для всех колец одинаково и равно k , то количество элементарных излучателей уменьшается в k раз и амплитуда волны, проходящей через такое отверстие, уменьшается в k раз, что соответствует уменьшению длины соответствующего вектора на спирали Френеля в k раз. (Амплитуды волны в точке наблюдения для препятствий, показанных на рис. 4.8, *a*, *б*, будут одинаковыми.)

Задача 4.4. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 нормально падает на непрозрачный диск. Какова интенсивность света I за диском в точке, для которой диск перекрывает 1,5 зоны Френеля? Какой станет интенсивность, если диск разрезать по диаметру и половину удалить?

Р е ш е н и е. Диск перекрывает 1,5 зоны Френеля. Это значит, что открыты зоны Френеля начиная с 1,5 и заканчивая бесконечностью. На спирали Френеля (рис. 4.9) этому случаю будет соответствовать вектор $\vec{A}_{1,5}$ (пунктиром обозначена часть спирали, соответствующая части волнового фронта, не участвующей в формировании результирующей амплитуды колебаний). Длина вектора $A_{1,5} \equiv A_0$. Таким образом, в точке *P* интенсивность $I = I_0$.

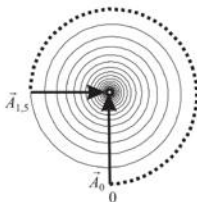


Рис. 4.9

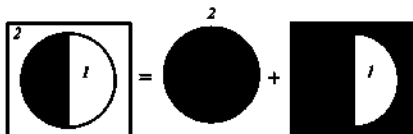


Рис. 4.10

В том случае, когда от этого диска отрезают половину по диаметру, необходимо учесть волны, приходящие от областей 1 и 2 (рис. 4.10). Наиболее наглядно это можно сделать, если воспользоваться принципом суперпозиции и представить половину диска как сумму простых фигур, для которых нахождение амплитуды волны является простой задачей: области 2 соответствует диск, который закрывает 1,5 зоны Френеля, а области 1 — диафрагма, радиус которой равен радиусу 1,5 зоны Френеля, закрытой наполовину по диаметру. Для нахождения результирующей амплитуды колебаний необходимо просуммировать амплитуды волны от каждой области с учетом их фаз.

Амплитуда волны от области 1 была найдена в п. б) задачи 4.3: $A_1 = \sqrt{2}A_0/2$. Для области 2 амплитуда волны была найдена в п. а) задачи 4.3: $A_2 = A_0$. Изобразим векторы, соответствующие этим областям, на одной спирали Френеля: для области 1 — это вектор \vec{A}_1 , для области 2 — вектор \vec{A}_2 (рис. 4.11). Поскольку векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 не параллельны, то результирующая амплитуда будет определяться результатом векторного сложения этих векторов. Перенесем конец вектора \vec{A}_1 к началу вектора \vec{A}_2 . Тогда их сумма даст результирующий вектор $\vec{A}_{\text{рез}}$ (рис. 4.11). Угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 равен 45° , причем векторы \vec{A}_1 , \vec{A}_2 и $\vec{A}_{\text{рез}}$ образуют прямоугольный треугольник. Тогда $A_{\text{рез}} = \sqrt{2}/2 A_0$ и $I = I_0/2$.

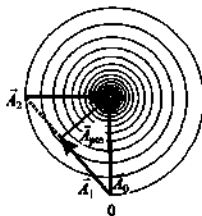


Рис. 4.11

Задача 4.5. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,60$ мкм и интенсивностью I_0 падает нормально на стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана круглая выемка (рис. 4.12). Для точки наблюдения P край выемки совпадает с радиусом внутренней половины первой зоны Френеля. Найти глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет минимальной; максимальной; равной интенсивности падающей волны.

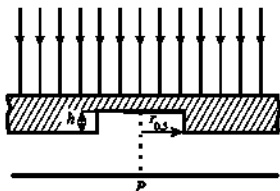


Рис. 4.12

Решение. Поскольку пластинка стеклянная, то световая волна проходит как через выемку, так и вне ее, т.е. исходная падающая волна разбивается на две. Найдем их амплитуды. На спирали Френеля (рис. 4.13, а) этим волнам будут соответствовать векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 .

Амплитуда волны в точке наблюдения P будет представлять собой суперпозицию волн, прошедших через выемку и вне ее с учетом разности фаз между ними. Волна, проходящая вне выемки, проходит больший путь в оптически более плотной среде n , следовательно, отстает по фазе на величину $\Delta\varphi = k\Delta$, где k — волновое число; $\Delta = (n-1)h$ — оптическая разность хода между волнами. А это значит, что вектор для волны, которая отстает по фазе (в данном случае это \vec{A}_2), будет поворачиваться на угол $\Delta\varphi$ против хода часовой стрелки (при построении спирали Френеля было принято, что при запаздывании волны соответствующий ей вектор на спирали Френеля поворачивается против хода часовой стрелки).

Таким образом, для достижения минимума интенсивности в точке наблюдения P необходимо повернуть вектор \vec{A}_2 так, чтобы он стал антипараллелен вектору \vec{A}_1 (рис. 4.13, а), т.е. его надо повернуть на угол

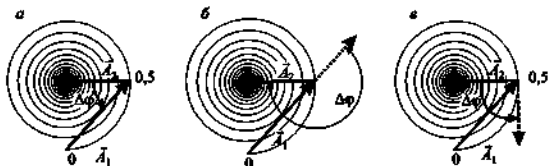


Рис. 4.13

$\Delta\varphi = \pi/4 + 2\pi m$, где m — любое целое число. Используя связь между разностью хода и сдвигом фаз, получаем: $h = (\lambda/8 + \lambda m)/(n - 1)$.

Результирующая амплитуда $A_{\text{рез}} = A_1 - A_2 = (\sqrt{2} - 1)A_0$. Интенсивность $I = (\sqrt{2} - 1)^2 I_0 = (3 - 2\sqrt{2}) I_0$.

Для достижения максимума интенсивности в точке наблюдения необходимо повернуть вектор \vec{A}_2 так, чтобы он стал параллелен вектору \vec{A}_1 (рис. 4.13, б), т.е. $\Delta\varphi = 5\pi/4 + 2\pi m$, где m — любое целое число. Используя связь между разностью хода и сдвигом фаз, получаем: $h = (5\lambda/8 + \lambda m)/(n - 1)$. Результирующая амплитуда $A_{\text{рез}} = \sqrt{2}A_0 + A_0$. Интенсивность $I = (\sqrt{2} + 1)^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2}) I_0$.

Для того чтобы интенсивность волны в точке P равнялась интенсивности падающей волны, достаточно, чтобы вектор \vec{A}_2 при повороте сохранял свою ориентацию, т.е. $\Delta\varphi = 2\pi m$. Тогда толщина пластинки $h = \lambda m/(n - 1)$. Кроме того, есть еще вариант, при котором результирующая интенсивность будет равна I_0 (рис. 4.13, в). В этом случае необходимо повернуть вектор \vec{A}_2 на угол $\Delta\varphi = \pi/2 + 2\pi m$, где m — любое целое число, против хода часовой стрелки. Тогда сумма векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 даст вектор, модуль которого равен A_0 , и толщина пластинки будет равна $h = (\lambda/4 + \lambda m)/(n - 1)$.

Задача 4.6. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 4$ мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ($\lambda = 0,5$ мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстие? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдений поместить экран? Каким станет пятно в центре дифракционной картины, если отодвинуть экран на расстояние $\Delta b = 1$ м от диафрагмы?

Решение. По условию задачи на диафрагму падает параллельный пучок света. Его можно представить исходящим из точечного источника, который находится на бесконечности. Таким образом, в формуле (4.4) можно положить $a = \infty$, и тогда формула преобразуется к виду

$$r = \sqrt{b m \lambda},$$

откуда найдем число зон, укладывающихся в диафрагме: $m = r^2/(b\lambda) = d^2/(4b\lambda)$. Подставим численные значения и получим $m = 8$, т.е. открыто четное число зон Френеля, а это значит, что если в данную точку поместить экран, то в центре дифракционной картины будет наблюдаться

минимум освещенности. Если же экран отодвинуть еще на расстояние $\Delta b = 1$ м от диафрагмы, то число зон Френеля, которое будет укладываться в отверстие, $m = d^2/4(b + \Delta b)\lambda$. Подставляя численные значения, получаем $m = 4$, т.е. опять открыто четное число зон Френеля, и в центре дифракционной картины будет наблюдаться минимум освещенности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плоская волна интенсивностью I_0 падает на зеркальный диск (рис. 4.14). Чему будет равна интенсивность I отраженного света в точке S , если для нее диск составляет 1,5 зоны Френеля?

Ответ: $I = 2I_0$.

2. Плоская волна интенсивностью I_0 падает на бесконечный зеркальный экран (рис. 4.15). Чему будет равна интенсивность отраженного света в точке S , если из экрана вырезать диск и сместить его в сторону точки S на расстояние $\lambda/4$? Диск для точки наблюдения составляет первую зону Френеля. Как изменится интенсивность I отраженной волны в точке S , если сместить диск в противоположную сторону? Расстояние от экрана до точки S считать намного большим длины волны света.

Ответ: $I = 9I_0$; не изменится.

3. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный диск. Интенсивность света за диском в точке, для которой диск перекрывает внутреннюю половину первой зоны Френеля, равна I_0 . Какой станет интенсивность, если от диска отрезать половину по диаметру; убрать диск?

Ответ: $I = I_0/2$; $I = I_0$.

4. Расстояние от точечного монохроматического источника ($\lambda = 0,50$ мкм) до экрана $l = 3,0$ м. Между ними установлена круглая диаф-

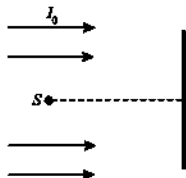


Рис. 4.14

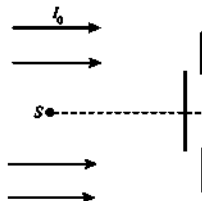


Рис. 4.15

рагма с отверстием диаметром $d = 0,50$ мм. Найти максимальное расстояние от экрана до диафрагмы, при котором в центре экрана наблюдается максимально темное пятно.

$$\text{Ответ: } b = \frac{r\lambda + \sqrt{r^2\lambda^2 - d^2r\lambda/2}}{2\lambda}, b = 2,9 \text{ м.}$$

5. Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм и интенсивностью I_0 нормально падает на стеклянный диск. При какой толщине h диска интенсивность света за диском в точке, для которой диск перекрывает внутреннюю половину первой зоны Френеля, будет максимальной? Какой будет интенсивность I , если от диска отрезать половину по диаметру?

$$\text{Ответ: } h = (3\lambda/8 + \lambda m)/(n-1), \text{ где } m - \text{целое число; } I = (1 + 1/\sqrt{2}) I_0.$$

6. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм и интенсивностью I_0 нормально падает на плоское стеклянное кольцо, которое перекрывает внешнюю половину первой зоны Френеля. Найти толщину h кольца и интенсивность I света в середине дифракционной картины, если толщина стеклянного кольца подобрана так, что в центре дифракционной картины интенсивность минимальна.

$$\text{Ответ: } h = (\lambda/8 + \lambda m)/(n-1), \text{ где } m - \text{целое число; } I = (\sqrt{2} - 1)^2 I_0.$$

5

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ
НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим случай нормального падения плоской световой волны на непрозрачную полуплоскость. Пусть система координат xOz задана так, как показано на рис. 5.1.

Ось z проходит через точку наблюдения P , которая находится на расстоянии L от плоскости xOy , а прямолинейный край полуплоскости лежит в плоскости xOy параллельно оси y на расстоянии d от нее. Поскольку на полуплоскость падает плоская волна, то в качестве совокупности вторичных источников S выберем часть плоскости xOy , которая не закрыта полуплоскостью. Фаза падающей волны во всех точках плоскости xOy будет одинакова, так как совпадает с волновым фронтом падающей волны. В данном случае основной вклад в результирующую амплитуду волны в точке P вносят участки плоскости, близкие к началу координат (это связано с тем, что вторичные волны являются сферическими и их амплитуда $\sim 1/r$, т.е. рассматривается случай, когда расстояние от источника до полуплоскости и от полуплоскости до точки наблю-

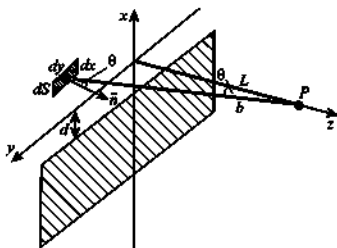


Рис. 5.1

дения много больше, чем характерные размеры рассматриваемой области). В таком приближении расстояние b от элемента плоскости $dS = dx dy$ до точки P можно записать в виде

$$b = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} \approx L + \frac{x^2 + y^2}{2L}. \quad (5.1)$$

Теперь воспользуемся дифракционной теорией Кирхгофа [12]. (Дальнейшее изложение описывает методику получения выражения (5.4), и если кому-то эта часть покажется сложной и непонятной, то можно перейти непосредственно к использованию соотношения (5.4), считая его просто заданным априори.)

Дифракционный интеграл Кирхгофа для плоской волны имеет следующий вид:

$$A = -\frac{iA_0}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ikb}}{b} \cos \theta dS, \quad (5.2)$$

где A_0 — амплитуда падающей волны; θ — угол между нормалью к площадке dS и направлением в точку наблюдения P .

При записи выражения (5.2) сделаны следующие допущения: амплитуды вторичных волн совпадают с амплитудой падающей волны во всех точках, которые не перекрыты препятствием.

В дифракционный интеграл Кирхгофа (5.2) величина b входит дважды: в знаменатель подынтегрального выражения (отражает затухание амплитуды сферической волны), где ее можно считать примерно равной L , и в показатель экспоненты (определяет набег фазы), где разложение (5.9) определяет достаточно быстрые осцилляции. Тогда дифракционный интеграл Кирхгофа для узкой полосы, параллельной оси y и простирающейся по оси x от 0 до x_1 , запишется в следующем виде [11]:

$$A = -\frac{iA_0}{\lambda L} \iint_S e^{ik(L + (x^2 + y^2)/(2L))} dx dy = -\frac{iA_0}{\lambda L} e^{ikL} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky^2/(2L)} dy \int_0^{x_1} e^{ikx^2/(2L)} dx. \quad (5.2a)$$

Интегрирование по y в формуле (5.2a) даст множитель $\sqrt{L\lambda}(1+i)/2$. После замены переменной

$$\eta = x \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} \quad (5.3)$$

получим:

$$A = \frac{(1-i)A_0}{2\sqrt{L\lambda}} e^{ikL} \int_0^{\eta_1} e^{i\pi\eta^2/2} d\eta. \quad (5.4)$$

Множитель, стоящий слева от интеграла в формуле (5.4), не зависит от ширины полосы x , поэтому при анализе зависимости амплитуды A от ширины полосы он может быть опущен. Вычисление A по формуле (5.4) можно наглядно представить так же, как было сделано для спирали Френеля. Для этого поверхность волны разобьем на зоны в виде тонких полос шириной dx , параллельных оси y . Для полосы $x = 0$ колебание в точке P изобразим вектором $d\vec{A}_1$ и расположим этот вектор горизонтально, а колебание от следующей полосы будет представлено таким же по модулю вектором $d\vec{A}_2$, повернутым относительно $d\vec{A}_1$ на небольшой угол против хода часовой стрелки, так как эта вторичная волна проходит большее расстояние и, значит, отстает по фазе. В дальнейшем угол между соседними элементарными векторами $d\vec{A}_i$ и $d\vec{A}_{i+1}$ будет увеличиваться, поскольку запаздывание по фазе вторичной волны от элементарной полосы пропорционально η^2 (выражение под интегралом в формуле (5.4)). Значит, разность фаз между соседними элементарными векторами будет пропорциональна $(\eta^2)' = 2\eta$ (линейно возрастает с ростом координаты). В этом заключается отличие от спирали Френеля, для которой разность фаз между соседними векторами была постоянной.

На основании формулы (5.4) амплитуду колебаний волны в точке P можно представить суммой векторов $d\vec{A}_i$, которые представляют собой амплитуду волны от узких полос шириной dx . На рис. 5.2, а показан результат сложения векторов $d\vec{A}_i$ для некоторого числа полос, имеющих положительную координату x . Для полос, имеющих отрицательную координату x , картина будет аналогичной (рис. 5.2, б). В этом случае

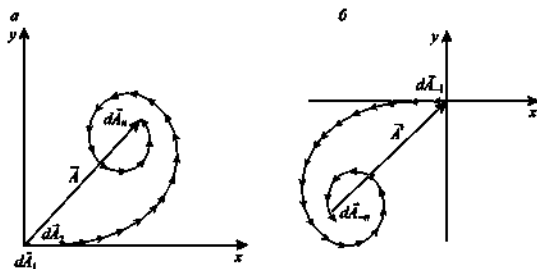


Рис. 5.2

фиксируем фазу вектора для полосы, имеющей координату $x = 0$, и этот вектор также будет горизонтальным. Колебание от следующей полосы будет представлено вектором \vec{dA}_{-1} , который повернут на малый угол против хода часовой стрелки относительно предыдущего вектора, так как эта вторичная волна проходит большее расстояние и, значит, отстает по фазе. Продолжая построение для остальных полос, получаем фигуру, показанную на рис. 5.2, б.

Если рассмотреть предел, когда $\Delta x \rightarrow 0$, то данная цепочка векторов превращается в плавную кривую, называемую *спиралью Корню* (рис. 5.3). Левая ее часть соответствует точкам, лежащим ниже оси y (т.е. $-\infty < x < 0$), а правая часть — точкам, лежащим выше оси y (т.е. $0 < x < \infty$). В том случае, когда для точки P открыто все пространство ($-\infty < x < \infty$), результирующее колебание представляется вектором, который начинается в фокусе F' и заканчивается в фокусе F спирали Корню (это и будет амплитуда падающей волны). Числами на спирали отмечены значения параметра η . Для точек фокусов F' и F параметр η равен $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Аналитическое выражение для спира-

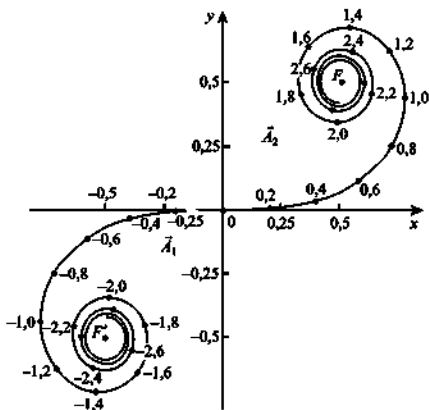


Рис. 5.3

ли Корню может быть получено на основании формулы (5.4) с помощью интегралов Френеля:

$$\left. \begin{aligned} x(\eta) &= \operatorname{Re} \int_0^{\eta} e^{i\pi\eta^2/2} d\eta = \int_0^{\eta} \cos(\pi\eta^2/2) d\eta, \\ y(\eta) &= \operatorname{Im} \int_0^{\eta} e^{i\pi\eta^2/2} d\eta = \int_0^{\eta} \sin(\pi\eta^2/2) d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Интегралы Френеля не могут быть вычислены аналитически, и для них существуют специальные таблицы. Значения функций в предельных точках $x(\infty) = -x(-\infty) = y(\infty) = -y(-\infty) = 1/2$.

Выясним смысл параметра η . Из формул (5.5) найдем дифференциал длины дуги спирали:

$$dl = \sqrt{dx(\eta)^2 + dy(\eta)^2} = d\eta.$$

А это значит, что $d\eta$ есть не что иное, как дифференциал длины дуги спирали Корню. Следовательно, параметр η равен длине участка спирали, отсчитываемой от начала координат.

Для нахождения амплитуды колебания в точке P от какой-либо полосы волновой поверхности, лежащей между $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), нужно найти по формуле (5.3) параметры η_1 и η_2 для x_1 и x_2 соответственно, а затем отметить на спирали Корню точки η_1 и η_2 . Поскольку по условию задачи свет проходит только через полосу, ограниченную координатами x_1 и x_2 , то результирующее колебание будет представляться вектором, берущим начало в точке η_1 и заканчивающимся в точке η_2 .

З а м е ч а н и е. Для определения амплитуды колебаний с помощью спирали Корню непосредственно измеряем линейкой длину вектора между интересующими нас точками, затем измеряем длину вектора между фокусами спирали (амплитуда падающей волны). Отношение длин этих векторов и даст отношение искомой амплитуды к амплитуде падающей волны.

Расчет по формуле (5.4) или (5.5) может быть осуществлен только численными методами, поэтому мы остановимся на символическом методе, основанном на использовании непосредственно спирали Корню.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм падает нормально на непрозрачную плоскость, в которой имеется узкая длинная щель шириной $d = 0,66$ мм. За этой плоскостью на расстоя-

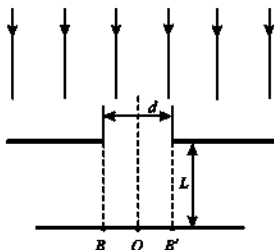


Рис. 5.4

нии $L = 100$ см находится экран (рис. 5.4). Найти отношение интенсивностей света в середине дифракционной картины (точка O) и на краях геометрической тени (точки B и B').

Решение. Центр дифракционной картины отмечен на рис. 5.4 точкой O , а края геометрической тени — точками B и B' . Поскольку имеется длинная узкая щель, то для нахождения амплитуды волны в точке O можно воспользоваться спиралью Корню. Для этого необходимо найти параметр η для краев щели для точки O . Подставляя в формулу (5.3) значение для левого края щели ($x_1 = -d/2$), получаем: $\eta_1 = -d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx -0,64$, а для правого края щели значение ($x_2 = +d/2$), получаем: $\eta_2 = d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx 0,64$. Параметрам η_1 и η_2 будет соответствовать вектор \vec{A} (рис. 5.5). Начало этого

вектора для точки O . Подставляя в формулу (5.3) значение для левого края щели ($x_1 = -d/2$), получаем: $\eta_1 = -d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx -0,64$, а для правого края щели значение ($x_2 = +d/2$), получаем: $\eta_2 = d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx 0,64$. Параметрам η_1 и η_2 будет соответствовать вектор \vec{A} (рис. 5.5). Начало этого

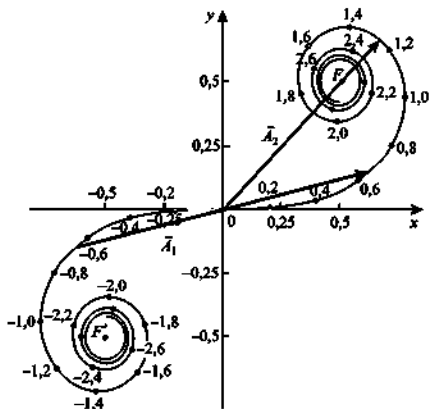


Рис. 5.5

вектора находится на спирали Корню в точке с координатой η_1 , а конец — на спирали Корню в точке с координатой η_2 . Длина данного вектора $|\vec{A}_1| = 0,89A_0$ (здесь и далее мы будем измерять величины всех векторов в долях A_0). Для точки B геометрической тени для левого края щели ($x_1 = 0$) получаем $\eta_1' = 0$, для правого края щели ($x_2 = d$) получаем: $\eta_2' = d\sqrt{2/(L\lambda)} \approx 1,28$. Этому случаю соответствует вектор \vec{A}_2 на спирали Корню, $|\vec{A}_2| = 0,66A_0$. Тогда соотношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени $I_0/I_B = |\vec{A}_1|^2/|\vec{A}_2|^2$, $I_0/I_B \approx 1,8$.

Замечание. В точке B' интенсивность света будет такой же, как и в точке B , однако на спирали Корню этому случаю соответствует другой вектор \vec{A}_2 . Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть данный случай.

Задача 5.2. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм нормально падает на непрозрачную длинную полосу шириной $d = 0,66$ мм. За ней на расстоянии $L = 100$ см находится экран (рис. 5.6). Найти соотношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени.

Решение. Как и в предыдущей задаче, центр дифракционной картины отмечен на рисунке точкой O , а края геометрической тени — точками B и B' . В любой точке экрана амплитуда будет представлять собой суперпозицию волн, прошедших слева и справа от полосы. Найдем амплитуду волны в точке O . Для этого рассчитаем параметр η полосы. Для левого края ($x_1 = -d/2$) получаем: $\eta_1 = -d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx -0,64$, для правого края ($x_2 = d/2$) получаем: $\eta_2 = d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx 0,64$. Отличие от предыдущей задачи состоит в том, что здесь на спирали Корню открыты два участка: $[-\infty, \eta_1]$ и $[\eta_2, \infty]$ и им соответствуют волны, прошедшие слева и справа от полосы. На спирали Корню этим участкам соответствуют векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 (рис. 5.7). Амплитуда волны в точке O будет определяться суммой волн, прошедших слева и справа от полосы, т.е. суммой векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 , а поскольку эти векторы параллельны, то просто алгебраической суммой $|\vec{A}_1 + \vec{A}_2| \approx 0,54A_0$.

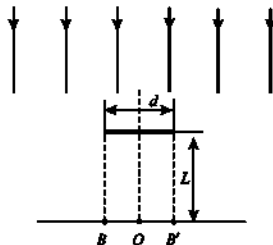


Рис. 5.6

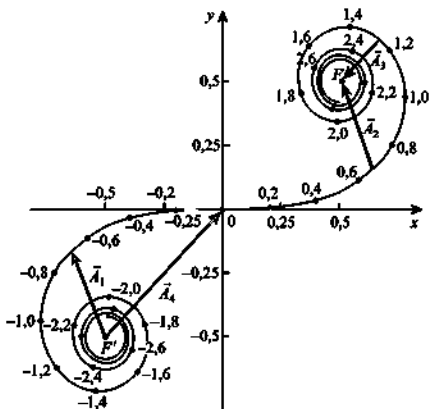


Рис. 5.7

З а м е ч а н и е. Если угол между векторами будет отличен от 0° , 90° , то результирующий вектор придется искать с использованием теоремы косинусов либо графически.

Для точки B геометрической тени для левого края щели ($x_1 = 0$) получим $\eta_1' = 0$, для правого края щели ($x_2 = d$) получим: $\eta_2' = d\sqrt{2}/(L\lambda) \approx 1,28$. На спирали Корню этим участкам соответствуют векторы \vec{A}_3 и \vec{A}_4 , а поскольку они противоположно направлены, то результирующая амплитуда будет равна разности их модулей: $|\vec{A}_3 - \vec{A}_4| \approx 0,38A_0$. Тогда соотношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени $I_0/I_B = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2|^2 / |\vec{A}_3 + \vec{A}_4|^2$, $I_0/I_B \approx 2$.

Задача 5.3. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,65$ мкм нормально падает на большую плоскопараллельную стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана длинная прямоугольная выемка шириной $d = 0,60$ мм (рис. 5.8). Найти глубину h выемки, при которой в середине дифракционной картины на экране, отстоящем на $L = 77$ см от пластинки, будет максимум освещенности. Чему равна h , если интенсивность падающей волны I_0 ?

Решение. Поскольку пластинка стеклянная, то свет проходит как через выемку, так и вне ее. Амплитуда волны в точке наблюдения O будет представлять собой суперпозицию трех волн, прошедших слева от выемки, через выемку и справа от нее, с учетом разности фаз между ними. Рассчитаем параметр η краев выемки. Для левого края ($x_1 = -d/2$) получим: $\eta_1 = -d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx -0,6$, для правого края ($x_2 = d/2$) получим: $\eta_2 = d/2\sqrt{2/(L\lambda)} \approx 0,6$. Построим на спирали Корню соответствующие волнам, прошедшим через выемку, $-\vec{A}_2$ (параметры $[\eta_1, \eta_2]$), и волнам, прошедшим вне выемки, $-\vec{A}_1$ и \vec{A}_3 (параметры $[-\infty, \eta_1]$ и $[\eta_2, +\infty]$) (рис. 5.9).

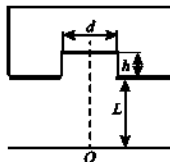


Рис. 5.8

Волны, проходящие вне выемки, будут отставать по фазе на $\Delta\varphi = k\Delta$, где $\Delta = (n-1)h$ — оптическая разность хода между волнами. А это значит, что для волн, которые отстают по фазе, векторы (в данном случае это \vec{A}_1 и \vec{A}_3) будут поворачиваться на угол $\Delta\varphi$ против хода часовой стрелки (при построении спирали элементарный вектор поворачивался против хода часовой стрелки при увеличении разности хода).

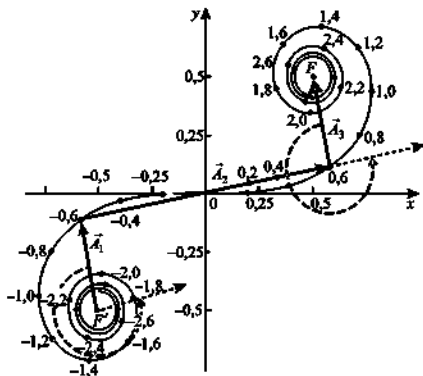


Рис. 5.9

Максимальная амплитуда, а значит, и максимальная интенсивность будут максимальными в том случае, когда все три вектора параллельны. Угол $\Delta\varphi$, на который надо повернуть векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 , чтобы они стали параллельны вектору \vec{A}_3 , $\Delta\varphi = 3\pi/2 + 2\pi m$, где m – любое целое число (рис. 5.9). Отсюда $h = (3/4 + m)\lambda/(n-1)$. Поскольку после поворота все векторы стали параллельными, то результирующая амплитуда колебаний $A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3| = 1,61A_0$ и интенсивность волны $I = 2,6I_0$.

Задача 5.4. Плоская монохроматическая световая волна интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана длинная щель с полукруглым вырезом на одной из сторон (рис. 5.10, а). Край выреза совпадает с границей первой зоны Френеля для точки наблюдения P , которая расположена на перпендикуляре к экрану. Ширина щели составляет $v = 0,90$ радиуса выреза. Найти интенсивность света в точке P .

Решение. Интенсивность света в точке P можно представить как результат интерференции двух волн: первая – проходящая через полукруглый вырез, а вторая – проходящая через узкую щель.

Найдем амплитуду первой волны. На спирали Френеля амплитуда падающей волны отмечена вектором \vec{A}_2 , а амплитуда волны, пришедшей от полностью открытой первой зоны Френеля, – вектором \vec{A}_1 (рис. 5.11). Однако по условию задачи открыта только половина по диаметру, поэтому амплитуда волны будет составлять $1/2 A_1 = A_0$, причем этот вектор параллелен вектору \vec{A}_0 .

Для нахождения амплитуды второй волны определим ширину щели. Для этого выразим радиус первой зоны Френеля для плоской волны из формулы (4.4): $r_1 = \sqrt{b\lambda}$. По условию задачи ширина щели $v = 0,90$ ради-

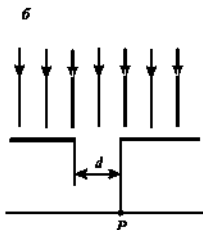


Рис. 5.10

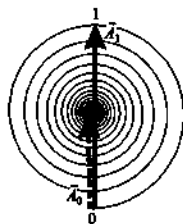


Рис. 5.11

уса выреза (напомним, что радиус выреза равен радиусу первой зоны Френеля). Тогда ширина щели $d = \nu\eta$. Рассчитаем параметр η относительно точки P для краев щели (см. рис. 5.10, б). Для левого края ($x_1 = 0$) получим $\eta_1 = 0$, для правого края ($x_2 = d$) получим: $\eta_2 = \nu\eta\sqrt{2/(b\lambda)} = \nu\sqrt{2} \approx 1,27$.

На спирали Корню амплитуде волны, прошедшей через щель, будет соответствовать вектор \vec{A}_2 (измеряя длину вектора \vec{A}_2 на спирали Корню, находим, что $A_2 = 0,67A_0$). Теперь возникает вопрос о том, как совместить результаты, полученные с помощью спиралей Френеля и Корню. Для этого надо рассмотреть ситуацию, когда экран совсем убирается. Тогда с одной стороны его можно считать отверстием бесконечно большого радиуса или щелью бесконечной ширины. Ясно одно: амплитуда волны не зависит от способа разбиения волнового фронта на вспомогательные поверхности. В таком случае векторы, которые получаются с помощью спиралей Корню и Френеля, для недифрагированной волны должны совпадать. Таким образом, вектор \vec{A}_0 , полученный с помощью спирали Френеля, должен совпадать с вектором, соединяющим точки FF' в спирали Корню (рис. 5.12). Иными словами, надо повернуть векторы, изображенные на спирали Френеля, на 45° по ходу часовой стрелки и рас-

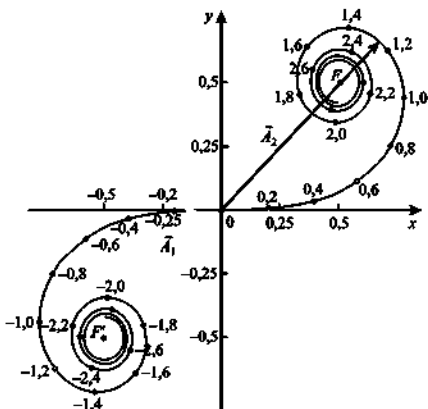


Рис. 5.12

тянуть их так, чтобы начало и конец вектора \vec{A}_0 совпали с точками F' и F соответственно. Теперь векторы, отложенные на спиральных Френеля и Корню, имеют одинаковый масштаб. После применения указанной процедуры к векторам, рассматриваемым в этой задаче, векторы \vec{A}_2 и \vec{A}_0 оказываются параллельными. В результате в точке наблюдения P амплитуда волны $A_{\text{рез}} = A_0 + 0,67A_0 = 1,67A_0$. Интенсивность $I = 2,79I_0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм и интенсивностью I_0 нормально падает на стеклянную длинную полосу шириной $d = 0,66$ мм. За ней на расстоянии $L = 100$ см находится экран. Найти толщину h пластинки и интенсивность I света в середине дифракционной картины, если толщина стеклянной пластинки подобрана так, что в центре дифракционной картины интенсивность максимальна.

Ответ: $h = (\lambda/4 + \lambda m)/(n-1)$, где m — целое число; $I \approx 2,0I_0$.

2. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм и интенсивностью I_0 нормально падает на тонкую непрозрачную полосу шириной $d = 2,34$ мм, в центре которой имеется круглое отверстие радиусом $r = 0,73$ мм. За плоскостью на расстоянии $L = 2,0$ м находится экран. Найти интенсивность I света в центре дифракционной картины.

Ответ: $I = 2,6I_0$.

3. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 500$ нм нормально падает на большую стеклянную пластинку, в которой сделана узкая длинная прорезь шириной $d = 2,34$ мм. При какой толщине h стеклянной пластинки интенсивность I света на экране, находящемся на расстоянии $2,0$ м от нее, будет максимальной и чему она будет равна, если точка наблюдения находится в центре дифракционной картины?

Ответ: $h = (\lambda/4 + \lambda m)/(n-1)$, где m — целое число; $I = 1,5I_0$.



Рис. 5.13

4. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 500$ нм нормально падает на узкую непрозрачную полосу шириной $d = 2,35$ мм. На краю полосы сделан вырез радиусом $r_1 = 1,0$ мм (рис. 5.13). Найти интенсивность I света на экране, находящемся на расстоянии $4,0$ м от полоски, если точка наблюдения P находится под центром вырезанного отверстия (рис. 5.13).

Ответ: $I = 0,16I_0$.

6

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Дифракция Френеля переходит в *дифракцию Фраунгофера* при значительном увеличении расстояния до точки наблюдения. В этом случае можно считать, что открытая область вторичных источников значительно меньше первой зоны Френеля, следовательно, разность хода между волнами, идущими от разных точек вторичных источников, будет значительно меньше длины волны. При этом волны, приходящие в точку наблюдения, можно считать плоскими. Это условие идеально выполняется, если расстояние до точки наблюдения стремится к бесконечности, поэтому дифракцию Фраунгофера часто называют *дифракцией в параллельных лучах*. Однако на практике, как правило, для наблюдения дифракции Фраунгофера не отодвигают экран на бесконечно большое расстояние, а ставят линзу и уже в ее фокальной плоскости наблюдают дифракционную картину.

Рассмотрим один из самых простых (но чрезвычайно важных с практической точки зрения) случаев, когда плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ падает нормально на экран, в котором вырезана узкая длинная щель шириной b с прямыми параллельными границами. В качестве набора вторичных источников будем использовать источники, лежащие на части волнового фронта, открываемого щелью, поскольку только эти источники будут вносить вклад в формирование дифрагированной волны.

Разобьем волновой фронт, попадающий через щель, на N элементарных длинных полосок одинаковой ширины, тогда ширина каждой полоски $\Delta x = b/N$ (рис. 6.1). При достаточно большом N можно положить, что $\Delta x \approx \Delta x$. Каждую из таких полосок будем рассматривать как источник вторичных волн. Амплитуды этих волн, приходящих в точку P от раз-

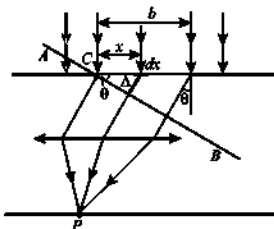


Рис. 6.1

ных полосок, одинаковы, поскольку все элементы имеют одинаковую площадь. Соотношение фаз вторичных волн в точке P будет таким же, как и в любой плоскости, перпендикулярной к их направлению до линзы, например в плоскости AB . Будем рассматривать распределение фазы вторичных волн в этой плоскости. При нормальном падении света на щель фазы волн от вторичных источников в плоскости щели одинаковы, поэтому идущая под углом θ волна от элемента dx с координатой x , когда она дойдет до плоскости AB , пройдет дополнительную длину пути относительно точки C , равную $\Delta = x \sin \theta$.

Поскольку при сложении колебаний необходимо учитывать их фазы, то можно ввести комплексную амплитуду, которая содержит еще и фазу колебания. Таким образом, комплексная амплитуда колебания от элемента dx в точке наблюдения P будет определяться выражением

$$dA_P = \frac{A_0}{b} e^{-ikx \sin \theta} dx. \quad (6.1)$$

Для нахождения амплитуды результирующего колебания в точке P необходимо просуммировать вклад всех элементарных полосок, т.е. проинтегрировать выражение (6.1) в пределах от 0 до b :

$$A_P = \frac{A_0}{b} \int_0^b e^{-ikx \sin \theta} dx = A_0 \frac{\sin u}{u} (-e^{-u}), \quad (6.2)$$

где $u = \frac{pb \sin \theta}{\lambda}$; $-e^{-u}$ — фазовый множитель, который связан с выбором начала отсчета координаты x .

Поскольку $I \sim |A_P|^2$, то

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}. \quad (6.3)$$

График зависимости $I(\sin \theta)$ показан на рис. 6.2. В центре дифракционной картины интенсивность $I(0)$ максимальна и равна интенсивности падающей волны I_0 . Функция $I(\sin \theta)$ обращается в нуль при условии

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (6.4)$$

т.е. между волнами, идущими от крайних точек щели, разность фаз $\varphi_m = 2\pi m$.

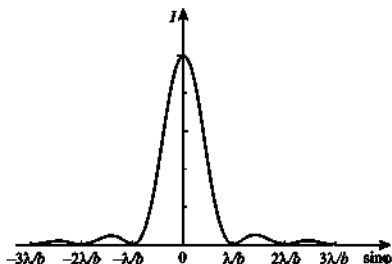


Рис. 6.2

Полученные результаты можно использовать для оценки дифракционной расходимости пучков света, ширина которых ограничена, например в результате прохождения через диафрагму. Основная часть ($\approx 82\%$) светового потока приходится на центральный дифракционный максимум (см. рис. 6.2), поэтому его ширину можно принять в качестве оценки угловой расходимости $\delta\theta$ пучка с поперечным сечением b :

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{b}. \quad (6.5)$$

Это угловое уширение пучка обусловлено волновой природой света, и его в принципе нельзя устранить при заданной ширине сечения пучка. При этом в зависимости от формы отверстия в выражении (6.5) будет изменяться числовой коэффициент, а структура выражения будет оставаться прежней. Так, для круглого отверстия угловое уширение определяется следующим образом:

$$\delta\theta = 1,22\lambda/d, \quad (6.6)$$

где d — диаметр отверстия.

Совокупность одинаковых параллельных узких щелей шириной b , расположенных на одинаковом расстоянии a друг от друга, образует дифракционную решетку (так называемую *амплитудную решетку*) (рис. 6.3). Величина $d = a + b$ называется *периодом решетки*.

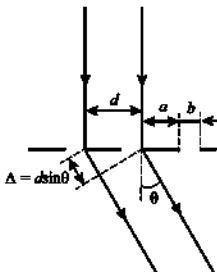


Рис. 6.3

Пусть на дифракционную решетку, состоящую из N щелей, падает плоская волна. Очевидно, что характер углового распределения интенсивности от каждой щели будет одинаков. Волны, приходящие от N щелей, интерферируют между собой. В результате в дифракционной картине возникают дополнительные минимумы и максимумы. Амплитуда волны $A_1(\theta)$, дифрагировавшей на первой щели, определяется формулой (6.2), для соседней щели амплитуда $A_2(\theta)$ будет отличаться от $A_1(\theta)$ только множителем $e^{ik\Delta}$, который учитывает запаздывание этой волны по фазе, т.е. $A_2(\theta) = A_1(\theta)e^{ik\Delta}$, где k — волновое число, $\Delta = d \sin \theta$ — оптическая разность хода между соседними щелями (рис. 6.3). Для третьего элемента $A_3(\theta) = A_1(\theta)e^{i2k\Delta}$. Тогда комплексная амплитуда волны в точке P будет представлять собой суперпозицию амплитуд волн от каждой щели с учетом запаздывания по фазе:

$$A_p = A_1(\theta)(1 + e^{ik\Delta} + e^{i2k\Delta} + e^{i3k\Delta} + \dots + e^{i(N-1)k\Delta}) = A_1(\theta) \frac{1 - e^{iNk\Delta}}{1 - e^{ik\Delta}}. \quad (6.7)$$

Для интенсивности получим:

$$I(\theta) = I_1(\theta) \frac{\sin^2 Nk\Delta}{\sin^2 k\Delta}, \quad (6.8)$$

где $I_1(\theta)$ — угловое распределение интенсивности волны, дифрагирующей на одной щели, которое определяется выражением (6.3).

В результате интерференции света от N щелей происходит перераспределение интенсивности света с образованием минимумов и максимумов. Максимум выражения (6.8) будет тогда, когда знаменатель обращается в нуль, но при этом числитель также обращается в нуль. Раскрывая эту неопределенность, получаем, что $I(\theta) = I_1(\theta)N^2$ при условии $\sin^2 k\Delta = 0$, т.е. $k\Delta = \pm m\pi$, или

$$d \sin \theta = \pm m\lambda, \quad (6.9)$$

где m — целое число, значение которого определяет порядок дифракционного максимума, а интенсивность света в этом случае будет выше

в N^2 раз по сравнению с интенсивностью света при дифракции на одной щели. Выражение (6.9) описывает угловое положение дифракционных максимумов для дифракционной решетки.

Если же $\sin^2 Nk\Delta = 0$, а $\sin^2 k\Delta \neq 0$, то интенсивность света обращается в нуль. Отсюда получаем условие дополнительных минимумов:

$$d \sin \theta = \pm \frac{m\lambda}{N}, m \neq 0, N, 2N, \dots, \quad (6.10)$$

т.е. между двумя главными максимумами расположен $N-1$ дополнительный минимум.

Кроме того, при выполнении условия (6.4) множитель $I_1(\theta)$ в формуле (6.8) обращается в нуль, следовательно, $I(\theta)$ также обращается в нуль. Угловое положение минимумов функции $I(\theta)$ не зависит ни от периода решетки d , ни от числа штрихов в ней N , поэтому эти условия называются условиями главных минимумов для дифракционной решетки. Таким образом, для дифракционной решетки имеем следующие условия:

- условие главных минимумов:

$$b \sin \varphi = \pm m_1 \lambda; \quad (6.11)$$

- условие главных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m_2 \lambda; \quad (6.11a)$$

- условие добавочных минимумов:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{m_3 \lambda}{N}, m_3 \neq 0, N, 2N, \dots \quad (6.11b)$$

З а м е ч а н и е. Если для какого-либо направления дифракции одновременно выполняются условия (6.11) и (6.11a), то для этого направления будет наблюдаться минимум, поскольку интенсивность волн, идущих от щелей в данном направлении, равна нулю.

На рис. 6.4 представлено распределение интенсивности излучения в случае дифракции на $N=5$ щелях при $d/b=2$. Из анализа полученной зависимости видно, что между главными максимумами (2) располагается $N-1$ добавочный минимум (1), а огибающая (3) описывает распределение интенсивности при дифракции на одной щели и определяет распределение интенсивности между главными максимумами.

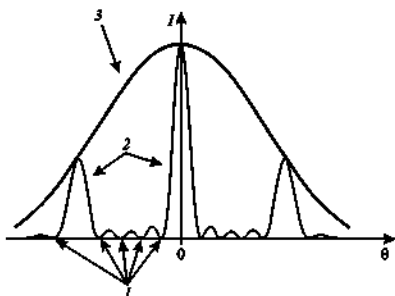


Рис. 6.4

В случае наклонного падения плоской волны на дифракционную решетку под углом θ' (рис. 6.5) для соседних пучков будет появляться дополнительная разность хода $\Delta_1 = d \sin \theta'$, тогда разность хода между ними на выходе из дифракционной решетки $\Delta = d(\sin \theta - \sin \theta')$ и условие максимума (6.116) примет следующий вид:

$$d(\sin \theta - \sin \theta') = \pm m\lambda. \quad (6.12)$$

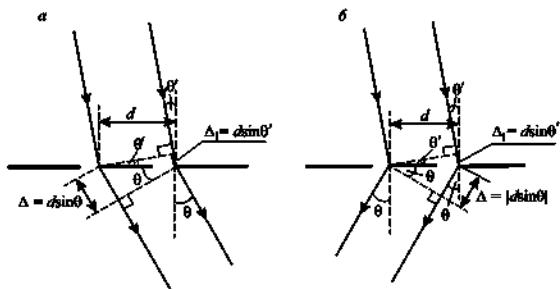


Рис. 6.5

Отрицательный угол дифракции θ означает, что он отсчитывается от перпендикуляра в противоположном направлении по сравнению с углом θ' (например, угол θ' отсчитывается против хода часовой стрелки, а угол θ — по ходу часовой стрелки. На рис. 6.5, *a* угол θ положительный, а на рис. 6.5, *b* — отрицательный). В этом случае разности хода Δ_1 и Δ_2 будут складываться, что соответствует формальной замене $\theta \rightarrow -\theta$ в формуле (6.12), и тогда порядок дифракции считается отрицательным.

Максимальный порядок спектра ограничивается условием $|\sin \theta| < 1$, т.е. в случае нормального падения света на дифракционную решетку $m_m < d/\lambda$.

Для обычной дифракционной решетки порядка 80% интенсивности падающей волны идет в нулевой максимум, а это значит, что при использовании ее в качестве спектрального прибора большая часть интенсивности падающей волны не используется. Увеличить интенсивность в ненулевых максимумах можно, применяя фазовые решетки (в частности, если в обычной (амплитудной) дифракционной решетке непрозрачные штрихи заменить прозрачными с иным показателем преломления или в стеклянной пластинке вместо непрозрачных штрихов вырезать небольшие углубления). В таких решетках реализуется дополнительная разность хода в пределах каждого штриха, и при определенной разности хода между штрихами можно добиться того, чтобы энергия дифрагированной волны приходилась преимущественно на максимум какого-либо порядка.

Примеры решения задач

Задача 6.1. Плоская монохроматическая волна падает нормально на щель шириной $b = 11$ мкм. За щелью находится тонкая линза с фокусным расстоянием $f = 150$ мм, в фокальной плоскости которой расположен экран (рис. 6.6). Найти длину волны света, если расстояние между симметрично расположенными минимумами третьего порядка (на экране) $\Delta x = 50$ мм.

Решение. При дифракции плоской волны на щели условие минимума третьего порядка определяется формулой (6.4): $b \sin \theta_{\pm 3} = \pm 3\lambda$. Дифрагированные волны, идущие после щели под углами $\theta_{\pm 3}$, будут собираться линзой в точках *A* и *B* в фокальной плоскости. Поскольку лучи, идущие через оптический центр линзы, не преломляются, то положение этих точек относительно оптического центра линзы будет определяться соотношением $x_{\pm 3} = f \operatorname{tg} \theta_{\pm 3}$.

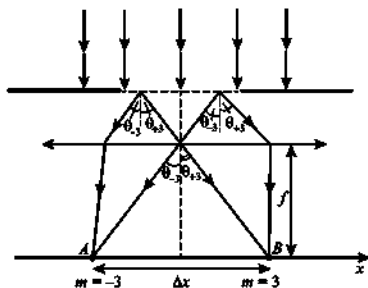


Рис. 6.6

По условию $\Delta x = x_{+3} + |x_{-3}| = 2f \operatorname{tg} \theta_{+3}$; $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$. Подставив значение $\sin \theta_{+3} = 3\lambda/b$, получим:

$$\Delta x = 2f \frac{3\lambda}{\sqrt{b^2 - 9\lambda^2}}; \quad \lambda = \frac{b\Delta x}{3\sqrt{4f^2 + \Delta x^2}}, \quad \lambda = 0,6 \text{ мкм.}$$

Задача 6.2. Свет с длиной волны $\lambda = 530$ нм падает на дифракционную решетку, период которой $d = 1,50$ мкм (рис. 6.7). Найти угол с нормалью к решетке, под которым образуется максимум наибольшего порядка, если свет падает на решетку:

- нормально;
- под углом 60° к нормали.

Решение. а) Максимальный порядок дифракции находится из условия $m_m = [d/\lambda]$ (здесь квадратными скобками отмечена операция взятия целой части от числа), откуда $m_m = [1500/530] = [2,83] = 2$. Подставив численные значения в формулу (6.116), получим: $\sin \theta_m = \frac{m_m \lambda}{d} = 0,71$, $\theta_m = 45^\circ$.

б) В случае наклонного падения света на дифракционную решетку угловое распределение будет определяться выражением (6.12), в котором $\theta' = 60^\circ$, а пределы изменения угла дифракции описываются неравенством $-1 \leq \sin \theta \leq 1$. Подставив максимальное возможное значение $\sin \theta = \pm 1$ в формулу (6.12), получим:

$$[d(-1 - \sin\theta')/\lambda] = m_{m-};$$

$$[d(+1 - \sin\theta')/\lambda] = m_{m+}.$$

Отсюда видно, что $|m_{m-}| > m_{m+}$, тогда

$$m_{m-} = \left[-\frac{d(1 + \sin\theta')}{\lambda} \right] = [-5,28] \text{ и } m_{m-} = -5. \text{ Соответствующий угол дифракции}$$

$$\sin\theta_{m-} = \frac{m_{m-}\lambda}{d} = \sin\theta', \quad \theta_{m-} \approx -64^\circ.$$

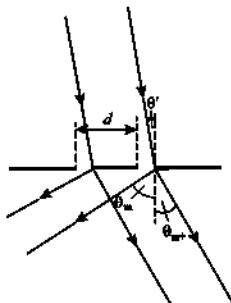


Рис. 6.7

Задача 6.3. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0,50$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина ($n = 1,50$) с преломляющим углом $\alpha = 30^\circ$. На противоположную грань клина нанесена прозрачная дифракционная решетка с периодом $d = 2,00$ мкм, штрихи которой параллельны ребру клина. Найти угол между направлением падающего света и направлением на максимум нулевого порядка. Каков максимальный порядок спектра?

Решение. При нормальном падении световой волны на грань клина волна, не преломляясь, проходит дальше и падает под углом α на дифракционную решетку, нанесенную на грань стеклянного клина (рис. 6.8).

Как и в предыдущей задаче, будем считать положительными углы, которые отсчитываются по ходу часовой стрелки от перпендикуляра, и в таком случае угол α будет положительным. Оптическая разность хода

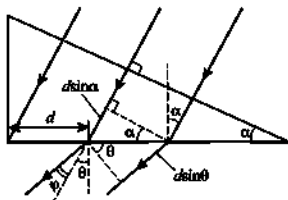


Рис. 6.8

между лучами, идущими от соседних щелей, будет определяться так же, как в случае наклонного падения на дифракционную решетку с учетом показателя преломления материала клина $\Delta = d \sin \theta - nd \sin \alpha$. Условие максимума интерференции в данном случае запишется в виде $\Delta = m\lambda$ или $\Delta = d \sin \theta - nd \sin \alpha = m\lambda$. Максимуму нулевого порядка будет соответствовать $m = 0$. Отсюда имеем условие для углового положения нулевого максимума: $\sin \theta = n \sin \alpha$. Фактически мы получили закон преломления, что соответствует случаю отсутствия дифракции. Такой результат является вполне ожидаемым, поскольку для максимума нулевого порядка его положение определяется законами геометрической оптики. Угол между направлением падающего света и направлением на максимум нулевого порядка $\varphi = \theta - \alpha = \arcsin(n \sin \alpha) - \alpha$, $\varphi = 13^\circ$. Максимальный порядок дифракции находится из условия $\sin \theta = \pm 1$. Подставив эти значения синуса в условие $d \sin \theta - nd \sin \alpha = m\lambda$, получим $d(\pm 1 - n \sin \alpha)/\lambda = m_{m\pm}$. Расчет дает $m_{m-} = -6$ и $m_m = 2$. Очевидно, что максимальный порядок дифракции $m_{m-} = -6$. Знак \leftrightarrow означает, что данный максимум наблюдается под углом, который будет откладываться против хода часовой стрелки от перпендикуляра, т.е. луч пойдет правее перпендикуляра.

Задача 6.4. Плоская световая волна с длиной волны λ падает нормально на фазовую дифракционную решетку, профиль которой показан на рис. 6.9. Решетка изготовлена из стеклянной пластинки с показателем преломления n . Найти глубину h вырезов, при которой интенсивность центрального максимума равна нулю. Каков при этом угол дифракции, соответствующий первому максимуму?



Рис. 6.9

Решение. Данную фазовую дифракционную решетку можно представить как суперпозицию двух одинаковых дифракционных решеток (I и II), которые сдвинуты на полпериода друг относительно друга по горизонтали и на величину h по вертикали (рис. 6.10). Следует подчеркнуть, что при нормальном падении исходной волны на дифракционную решетку сдвиг этой решетки в направлении, перпендикулярном к направлению падающей волны, не приводит к изменению углового распределения интенсивности дифракции, т.е. угловое распределение интенсивности для обеих решеток будет одинаковым. Однако вследствие

смещения решеток на величину h по вертикали волны, дифрагировавшие на разных решетках, будут иметь дополнительную разность хода.

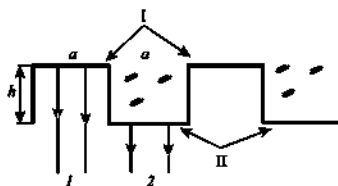


Рис. 6.10

Интенсивность волны, прошедшей без отклонения (угол дифракции равен нулю), будет равна нулю, если волны (1 и 2), идущие от двух дифракционных решеток в этом направлении, будут в противофазе, т.е. разность хода между ними $\Delta = (m + 1/2)\lambda$. В то же время между лучами 1 и 2 оптическая разность хода $\Delta = h(n - 1)$. Следовательно, глубина выреза

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{1}{2} \right),$$

и центральный максимум (максимум нулевого порядка) отсутствует.

Для того чтобы найти положение первого максимума, разобьем волновой фронт в плоскости AB на узкие полоски (рис. 6.11). В отличие от случая дифракции на щели, рассмотренного ранее, фазы вторичных источников в данной плоскости не будут одинаковыми для областей I

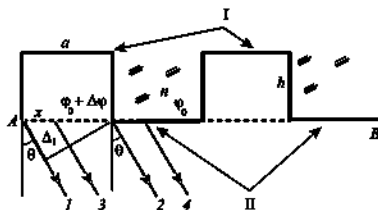


Рис. 6.11

и II, однако в пределах области их можно считать постоянными (здесь сделано предположение, что глубина уступа мала и волновой фронт в плоскости AB можно считать плоским).

Разность хода Δ между волнами, прошедшими через области I и II, была найдена ранее и равна $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, причем волна, прошедшая через область II, запаздывает по фазе.

Таким образом, есть две одинаковые дифракционные решетки, однако между волнами, которые вышли из этих решеток, существует дополнительная разность хода $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, причем период каждой из решеток $d = 2a$. Угловое положение дифракционных максимумов для обеих решеток будет одинаковым, однако за счет интерференции некоторые максимумы могут исчезать (как, например, нулевой для данной системы), а некоторые, наоборот, усиливаться. Угловое положение дифракционного максимума для обеих решеток определяется соотношением $d \sin \theta = 2a \sin \theta = m_2 \lambda$, или $a \sin \theta = m_2 \lambda / 2$, а для первого максимума — соотношением $a \sin \theta = \lambda / 2$.

Найдем условие, при котором волны, идущие в направлении первого максимума, будут усиливать друг друга. Для этого выделим лучи 3 и 4, которые идут от штрихов соседних решеток под углом θ относительно нормали и сдвинуты на расстояние x от начала соответствующего штриха. Разность хода между ними будет такой же, как и между крайними лучами 1 и 2, и равна $\Delta_1 = a \sin \theta$ (см. рис. 6.11). А поскольку x выбиралось произвольно, то такая разность хода будет и для волн, идущих от штрихов соседних областей, причем волна, идущая от области I, будет запаздывать по фазе относительно волны, идущей от области II.

Таким образом, разность хода между волнами, идущими от областей I и II, равна $\Delta_2 = a \sin \theta - (m + 1/2)\lambda$. Подставив значение $a \sin \theta = \lambda / 2$ для первого максимума, получим $\Delta_2 = \lambda / 2 - (m + 1/2)\lambda = -m\lambda$, т.е. разность хода равна целому числу длин волн, а это значит, что в направлении первого максимума волны, идущие от двух решеток, будут усиливать

друг друга и $\theta = \arcsin \frac{\lambda}{2a}$. Следует отметить, что для данной дифракционной решетки второй максимум будет отсутствовать, поскольку выполняется условие $b = d/2$, поэтому практически вся энергия будет приходиться на этот максимум.

Задача 6.5. Свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти период решетки, если одному из френгоферовых максимумов соответствует угол дифракции 45° и наибольший порядок дифракции равен пяти.

Решение. По условию для одного из максимумов угол дифракции $\theta = 45^\circ$, т.е. $d \sin \theta = m\lambda$, причем m неизвестно. В то же время максимальный порядок дифракции определяется из условия $m_n = [d/\lambda]^*$. Это условие можно записать через неравенство: $m_n < d/\lambda < m_n + 1$. Подставим в это неравенство $d/\lambda = m/\sin \theta$. Тогда $m_n < m/\sin \theta < m_n + 1$. Подставим известные численные значения: $5 < m \cdot 1,41 < 6$. Решая это неравенство, находим: $m = 4$. Теперь, зная порядок дифракции, можно найти период решетки: $d = m\lambda/\sin \theta$, $d = 2,88$ мкм.

Задача 6.6. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которые может дать эта решетка, и определить угол φ дифракции, соответствующий максимуму наибольшего порядка.

Решение. Для того чтобы найти общее число дифракционных максимумов, необходимо найти максимальный порядок дифракции, который определяется из условия $m_n = [d/\lambda]^*$, а d — период решетки. Общее число дифракционных максимумов $N = 2m_n + 1$, так как при нормальном падении света на дифракционную решетку относительно центрального максимума, который соответствует недифрагированному пучку, $d = 1 \text{ мм}/n = 2,5$ мкм. Тогда $m_n = 4$ и общее число дифракционных максимумов $N = 9$. Для нахождения угла, соответствующего максимуму наибольшего порядка, воспользуемся формулой (6.9), подставив в нее m_n :

$$\varphi = \arcsin \frac{m_n \lambda}{d} = 74^\circ.$$

Задача 6.7 На узкую щель падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. При какой ширине щели ее изображение на экране, который отстоит на $b = 1$ м, будет шире ее на $\varepsilon = 5\%$?

Решение. Если не учитывать эффекты дифракции, то размер изображения щели на экране от бесконечно удаленного источника (плоская волна, падающая на щель) будет равен размеру самой щели (расстояние AA' на рис. 6.12). Однако за счет эффектов дифракции изображение на экране будет становиться больше.

Видимый размер щели определяется положением минимумов при дифракции на щели (точки B и B' на рис. 6.12). Поскольку по условию ширина изображения щели на 5% больше, чем размер самой щели, то

* Здесь квадратными скобками отмечены операции взятия целой части.

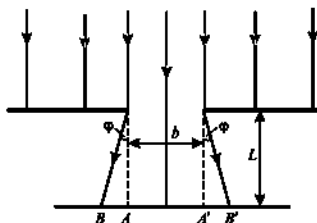


Рис. 6.12

углы дифракции можно считать малыми. Тогда условие минимума при дифракции на щели можно записать в виде $b\varphi = \lambda$. В то же время $\varphi = BA/L$ и $BB'/AA' = \varepsilon + 1$, откуда $2BA/AA' = \varepsilon$, $BA = \varepsilon b/2$. Следовательно, $\varphi = \varepsilon b/2L$, $\varepsilon b^2/2L = \lambda$. Ширина щели $b = \sqrt{2L\lambda/\varepsilon}$. Подставив численные значения, получим $b = 4,5$ мм.

Задачи для самостоятельного решения

1. На дифракционную решетку нормально падает свет от ртутной лампы. Сразу за дифракционной решеткой стоит линза с фокусным расстоянием $F = 1,0$ м, в фокусе которой находится экран. На каком расстоянии l друг от друга будут находиться на экране две спектральные линии ($\lambda_1 = 577,0$ нм и $\lambda_2 = 579,1$ нм) в спектре первого порядка? Период решетки $d = 1,0$ мкм.

Ответ: $l = F[\text{tg}(\arcsin(\lambda_2/d)) - \text{tg}(\arcsin(\lambda_1/d))]$, $l \approx Fd^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(d^2 - \lambda_1^2)^{3/2}}$.

$l = 3,9$ мм.

2. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda_1 = 500$ нм падает на линзу с фокусным расстоянием $f = 5,0$ см и диаметром $D = 10$ мм. Экран находится на фокусном расстоянии от линзы. Найти радиус r светлого пятна в фокусе линзы.

Ответ: $r = 1,22f\lambda/D$, $r = 3,1 \cdot 10^{-5}$ м.

3. Белый свет падает нормально на узкую длинную щель шириной $b = 0,20$ мм. За щелью находится линза с фокусным расстоянием $f = 1,0$ м, в фокальной плоскости которой расположен экран. Оценить ширину

Δx цветного ореола возле центральной белой дифракционной полосы. Считать диапазон видимого света равным от 400 нм до 700 нм.

Ответ: $\Delta x = f[\text{tg}(\lambda_{\text{к}}/b) - \text{tg}(\lambda_{\text{с}}/b)]$, $\Delta x = 1,5$ мм.

4. Плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 0,60$ мкм падает на непрозрачную диафрагму, в которой сделано круглое отверстие диаметром d . На расстоянии $L = 1,0$ м от диафрагмы находится экран. При каком диаметре d отверстия в диафрагме размеры ее изображения на экране будут минимальны?

Ответ: $d = \sqrt{2,44\lambda L}$, $d = 1,2$ мм.

5. Плоская монохроматическая волна падает на тонкую линзу. За линзой на фокусном расстоянии находится экран. Как изменится средняя освещенность изображения на экране, если диаметр линзы уменьшить в 2 раза, а фокусное расстояние оставить прежним?

Ответ: уменьшится в 16 раз.

6. На дифракционную решетку под углом $\theta = 45^\circ$ падает плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Сразу за дифракционной решеткой стоит линза с фокусным расстоянием $F = 1,0$ м, в фокусе которой находится экран. Найти расстояние между первыми дифракционными максимумами на экране. Период решетки $d = 3,0$ мкм.

Ответ: $\Delta x = F(\text{tg}\varphi_1 - \text{tg}\varphi_{-1})$, где $\varphi_{\pm 1} = \arcsin\left[\frac{\pm\lambda + \sin\theta d}{d}\right]$, $\Delta x = 1,6$ м.

7. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 500$ нм нормально падает на стеклянный клин с малым углом у основания $\gamma = 0,10$. Противоположная грань клина зачернена, и в ней сделана узкая щель шириной $b = 2,00$ мкм, параллельная ребру клина. Найти угловое положение первых дифракционных минимумов.

Ответ: $\varphi = \arcsin\left(\frac{\pm\lambda + b n \sin\gamma}{b}\right)$, $\varphi_- = -5,8^\circ$, $\varphi_+ = 24^\circ$; знак \leftarrow означает, что данный минимум наблюдается под углом, который будет откладываться против хода часовой стрелки от перпендикуляра к нижней грани клина, т.е. луч пойдет правее перпендикуляра.

8. Гелий-неоновый лазер мощностью $P = 1,0$ мВт испускает свет с длиной волны $\lambda = 632$ нм. На выходе из лазера формируется пучок диаметром $d = 1,0$ мм. С какого расстояние человек сможет увидеть лазерное излучение? Пороговую чувствительность P_d глаза принять равной $6,0 \cdot 10^{-16}$ Вт, а диаметр d_0 зрачка глаза – равным 4,0 мм.

Ответ: $L = \frac{d_0 d}{2,44\lambda} \sqrt{\frac{P}{P_d}}$, $L = 8,4 \cdot 10^6$ м.

9. Найти условие равенства нулю интенсивности m -го максимума для дифракционной решетки с периодом d и шириной щели b .

Ответ: $b/d = p/m$, где p – целое число.

10. Монохроматическая плоская волна с длиной волны $\lambda = 656$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 4,0$ мкм и шириной $L = 3,0$ см. Найти угловую ширину дифракционного максимума первого порядка.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{2\lambda d}{L\sqrt{d^2 - \lambda^2}}$, $\Delta\varphi = 4,4 \cdot 10^{-5}$ рад.



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Геометрическая оптика изначально оперировала понятием луча как объекта, который можно получить за счет использования, например, диафрагмы с круглым отверстием очень малого сечения, причем сечение полученного пучка с расстоянием не изменится ни по форме, ни по размерам. Однако волновая теория показала, что любое ограничение сечения светового пучка приводит к его угловому уширению вследствие явления дифракции. Количественно это явление определяется соотношением

$$\delta\varphi \approx \frac{\lambda}{D},$$

где $\delta\varphi$ — угловое уширение пучка; λ — длина волны; D — диаметр отверстия диафрагмы.

Формально угловая расходимость пучка исчезает при условии $\lambda \rightarrow 0$, которое можно рассматривать как условие геометрического приближения в оптике. Реально это означает, что дифракционными эффектами можно пренебречь, если пространственные изменения оптических характеристик среды происходят в масштабах, существенно больших λ . В этом случае возможно геометрическое обобщение понятий фазы волны и «волнового» определения луча как линии, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором лучевой нормали, т.е. траекторией, вдоль которой происходит перенос энергии электромагнитной волны. Найти такую траекторию можно на основании *принципа Ферма*: истинной траекторией луча между точками A и B среды будет являться та, на прохождении которой свету потребуются минимальное время. Эта формулировка определяет единственную траекторию луча между точками A и B и часто называется жесткой.

Однако в оптике имеют место ситуации (в частности, при наличии отражающих поверхностей), когда между точками *A* и *B* может быть несколько реальных траекторий. Их существование находит свое отражение в так называемой мягкой формулировке принципа Ферма: истинной траекторией луча является та, оптическая длина которой не изменяется в первом приближении при малой вариации самой траектории.

Основная задача геометрической оптики — нахождение реальных траекторий оптических лучей при заданном распределении показателя преломления среды, в которой распространяется луч. В большинстве случаев в качестве такой среды рассматривается оптическая система, представляющая собой последовательный набор элементов из однородных сред, ограниченных строго определенными по форме поверхностями (в подавляющем большинстве случаев используются сферические или плоские поверхности).

В однородной среде световой луч распространяется вдоль прямой, а его поведение на границе раздела двух сред определяется законами отражения и преломления.

Закон отражения: луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, проведенный к точке падения на границе раздела, лежат в одной плоскости, а угол падения равен углу отражения.

Закон преломления: луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к точке падения на границе раздела, лежат в одной плоскости, а угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны соотношением

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1, n_2 — абсолютные показатели преломления соответствующих сред.

В геометрической оптике среда с большим показателем преломления считается оптически более плотной, поэтому при падении луча из оптически более плотной среды в менее плотную угол преломления θ_2 должен быть больше угла падения θ_1 и при некотором предельном значении $\theta_{1\text{пр}}$ ($\sin \theta_{1\text{пр}} = n_2/n_1$) $\theta_2 = \pi/2$, т.е. преломленный луч скользит вдоль границы раздела сред. При условии $\theta_1 > \theta_{1\text{пр}}$ наступает явление *полного внутреннего отражения*.

В приближении геометрической оптики ($\lambda \rightarrow 0$) любой источник света может быть представлен как суперпозиция точечных источников. Понятие точечного источника является важным объектом в геометрической оптике. Одна из главных задач геометрической оптики — определить, при каких условиях данная оптическая система позволяет получить точечное изображение точечного источника.

Изображение называется *стигматическим*, если все лучи от точечного источника после прохождения оптической системы сходятся в одной точке (действительное изображение) или в одной точке сходятся их продолжения (мнимое изображение). Условие стигматичности устанавливает взаимно однозначное соответствие источника и его изображения, а также (в сочетании с принципом Ферма) обратимость оптической системы. Последнее означает, что если полученное изображение сделать источником, то лучи пройдут через оптическую систему по тем же траекториям, но в обратном направлении, давая в качестве изображения исходный источник.

Пучок лучей, исходящих из одной точки или сходящихся в ней, называется *гомоцентрическим*. Поэтому под стигматичностью подразумевается, что преобразование оптической системой гомоцентрического пучка не изменяет его гомоцентричности. Для подавляющего большинства оптических систем условие стигматичности является очень жестким и выполняется лишь при определенных приближениях. Наиболее существенным является так называемое *параксиальное приближение*, связанное с использованием слабо расходящихся и слабо сходящихся гомоцентрических пучков. Подробнее о параксиальном приближении будет сказано при рассмотрении конкретных типов оптических систем.

Основными используемыми элементами классических оптических систем являются плоскопараллельные пластинки и прямые призмы с треугольным сечением, плоские и сферические зеркала, сферические линзы.

Плоскопараллельные пластинки в однородной среде приводят лишь к сдвигу проходящего луча вследствие закона преломления без изменения его направления, а в оптических системах они используются, как правило, для разделения световых потоков (светоделительные пластинки) за счет частичного отражения света от верхней и нижней поверхностей пластинки.

Прозрачные прямые призмы используются для отклонения луча, причем вследствие явления дисперсии угол полного отклонения зависит от длины волны излучения, что позволяет использовать такие призмы в качестве диспергирующего элемента в спектральных приборах. Для ряда задач, связанных с существенным изменением направления луча, применяются поворотные призмы, использующие явление полного внутреннего отражения света.

Сферические зеркала представляют собой часть тонкого шарового слоя радиусом кривизны R , одна из поверхностей которого покрыта светоотражающим составом. В зависимости от того, какая сторона слоя (наружная или внутренняя) является отражающей, зеркала разделяются

на вогнутые и выпуклые. Частным случаем сферического зеркала является плоское зеркало (при условии $R \rightarrow \infty$).

Сферические линзы представляют собой объект из однородного прозрачного материала, ограниченного двумя сферическими или сферической и плоской поверхностями. Обычно различают тонкие (толщина линзы гораздо меньше радиусов кривизны преломляющих поверхностей) и толстые линзы. В большей степени количество типов линз связано с принятым соотношением знаков радиусов кривизны их поверхностей (двояковыпуклые, двояковогнутые, выпукло-вогнутые, вогнуто-выпуклые и т.д.).

Одним из основных вопросов для всех указанных элементов является выполнение условий стигматичности. Исключением в этом плане является плоское зеркало, для которого теоретически (с точки зрения геометрического приближения) нет ограничений ни на расположение точечного источника, ни на угловые размеры гомоцентрического пучка от такого источника (рис. 7.1). Поскольку любой реальный источник в рамках геометрической оптики всегда можно представить как суперпозицию точечных источников, то его изображение получается прямым, мнимым, с единичным поперечным увеличением, причем изображение можно строить из условий симметрии расположения точечного источника и его изображения относительно плоскости расположения зеркала.

В плоскопараллельных пластинках и призмах может быть получено только мнимое изображение точечного источника, а условие стигматичности хорошо выполняется

лишь для гомоцентрических пучков с очень малой угловой расходимостью.

Для сферических зеркал введение условия стигматичности требует некоторых дополнительных пояснений. Любой луч, проходящий через центр кривизны зеркала, падает на его поверхность перпендикулярно и, следовательно, будет отражаться строго в обратном направлении (рис. 7.2). Если направление луча не изменяется или изменяется на обратное при прохождении оптического элемента, то направление этого луча называется *оптической осью*. Для сферическо-

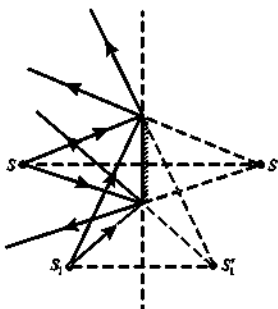


Рис. 7.1

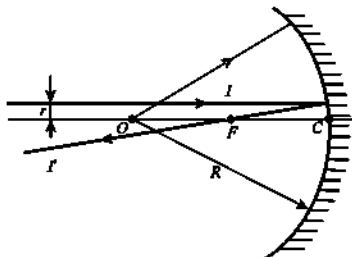


Рис. 7.2

го зеркала таких осей может быть бесконечное множество и все они равноправны. Однако если вследствие каких-либо условий (может быть даже личное предпочтение) одна из таких осей выделяется, то она называется *главной оптической осью*. Для сферических зеркал главную оптическую ось часто выбирают вдоль оси симметрии.

Для сферических зеркал условие стигматичности хорошо выполняется только в парапаксиальном приближении, когда используются гомоцентрические пучки с малой угловой расходимостью, в которых все лучи распространяются на малых (по сравнению с радиусом кривизны зеркала ($r \ll R$ на рис. 7.2)) расстояниях от главной оптической оси. (Это, кстати, можно рассматривать как один из критериев ее выбора.) Вследствие этого парапаксиальное приближение становится менее жестким для зеркал с большим радиусом кривизны. В то же время использование парапаксиального приближения существенно сужает рамки при выборе положения главной оптической оси.

В парапаксиальном приближении можно четко сформулировать понятие *фокуса* как точки, в которой сходятся лучи, параллельные главной оптической оси, после отражения от зеркала. В этом же приближении фокусное расстояние f (расстояние от точки фокуса F до полюса зеркала C — точки пересечения главной оптической оси с поверхностью зеркала, рис. 7.2.) равно половине радиуса кривизны, т.е. $f = R/2$.

Выполнение условия стигматичности означает, что для построения изображения точечного источника достаточно нахождения траектории всего двух лучей, исходящих из источника. Один из таких лучей легко выделить — это луч I (рис. 7.3), совпадающий с одной из оптических осей, называемой обычно *побочной осью*.

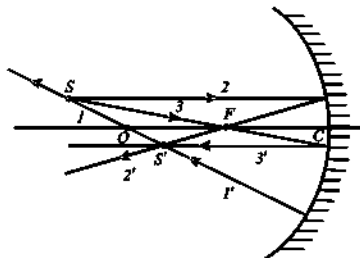


Рис. 7.3

Далее воспользуемся определением точки фокуса F , в которой должны пересекаться после отражения в зеркале все лучи, параллельные главной оптической оси. Тогда, проводя луч 2 параллельно главной оптической оси и учитывая, что после отражения от поверхности зеркала он пройдет через точку F , получаем изображение источника S' на пересечении отраженных лучей $1'$ и $2'$. Двух лучей уже достаточно, но мы определим еще один характерный луч, который в некоторых случаях оказывается весьма полезным. Воспользуемся обратимостью лучей в оптической системе. Это, в частности, означает, что луч, проходящий через точку фокуса F , после отражения от зеркала пойдет параллельно главной оптической оси. В нашем случае это лучи 3 и 3'.

Однако если источник S находится на главной оптической оси, то все три характеристических луча «схлопываются» в один луч 1 (рис. 7.4), направленный вдоль главной оптической оси, отражение которого тоже дает луч $1'$ вдоль главной оптической оси, но противоположного направления. Ход второго луча 2, направленного под некоторым углом к главной оптической оси, можно найти *методом побочной оптической оси*.

Метод основан на том, что пучок параллельных лучей, составляющих некоторый малый угол с главной оптической осью (паракснальное приближение), после отражения соберется в одной точке фокальной плоскости (плоскости, проходящей через точку F перпендикулярно к главной оптической оси). Тогда берем луч 3, параллельный лучу 2, но проходящий через центр кривизны O (это и есть *побочная оптическая ось*). После отражения этот луч пройдет через точку B фокальной плоскости. Однако через эту же точку должен пройти после отражения и луч 2, пересечение которого с главной оптической осью (вдоль нее распространяется луч 1) и дает изображение источника S' .

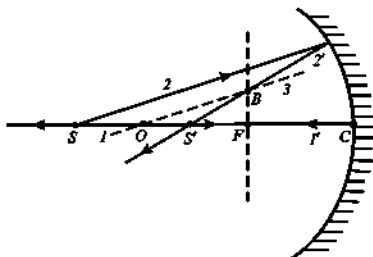


Рис. 7.4

Построить ход подобных характеристических лучей несложно для выпуклого зеркала. Схема построения приведена на рис. 7.5. Разобраться в ней читатель может самостоятельно, если повторит все процедуры, описанные в случае вогнутого зеркала.

Для аналитических расчетов используется формула зеркала

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} = \Phi_s, \quad (7.1)$$

где a_1 – расстояние от зеркала до источника; a_2 – расстояние от зеркала до изображения (рис. 7.6); Φ_s – *оптическая сила* зеркала. Величина Φ_s

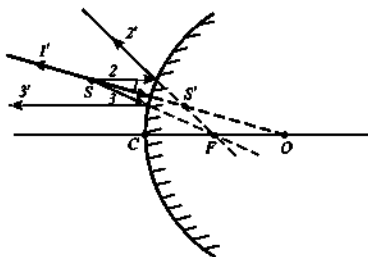


Рис. 7.5

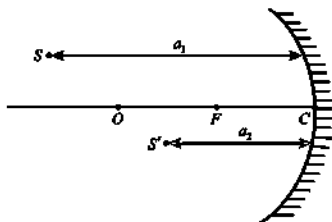


Рис. 7.6

может быть как положительной (вогнутое зеркало), так и отрицательной (выпуклое зеркало).

Действительным источнику и изображению соответствует положительный знак a_1 и a_2 , а мнимым — отрицательный (мнимому точечному источнику соответствует ситуация, когда лучи, идущие от некоторого реального источника, собираются в точке, расположенной за отражающей поверхностью зеркала). Следует особо подчеркнуть, что все изложенное выше справедливо, если зеркала находятся в однородной преломленной среде.

Для тонких сферических линз можно повторить многое из того, что использовалось для сферических зеркал. Например, условие стигматичности выполняется только в параксиальном приближении. И методы построения изображения точечного источника, если линза находится в однородной среде, тоже совпадают. В частности, на рис. 7.7 представлены характеристические лучи для собирающей (рис. 7.7, а) и рассеивающей (рис. 7.7, б) линз.

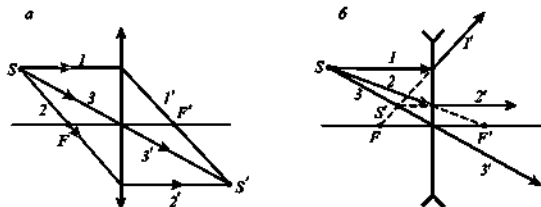


Рис. 7.7

Естественно, в данном случае необходимо учитывать, что линза является прозрачным объектом и луч, проходящий через точку пересечения плоскости линзы с оптической осью (оптический центр линзы O), не претерпевает изменений (вследствие малой толщины линзы). Кроме того, следует иметь в виду, что для рассеивающей линзы передний и задний фокусы меняются местами по отношению к их положению у собирающей линзы. Демонстрацией этого правила является тот факт, что для собирающей линзы параллельный оптической оси пучок собирается в точку после линзы (действительный фокус), в то время как для рассеивающей линзы такой пучок расходится после линзы так, что продолжения лучей собираются в одной точке перед линзой (мнимый фокус).

Для тонкой линзы выполняется формула, аналогичная формуле (7.1) для зеркала, а именно:

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \Phi_L, \quad (7.2)$$

где учтено, что по разные стороны от линзы могут быть среды с разными показателями преломления (n_1 и n_2); a_1, a_2 – расстояния соответственно от источника до линзы и от линзы до изображения (рис. 7.8); Φ_L – оптическая сила линзы, которая для собирающей линзы является положительной (действительные фокусы), а для рассеивающей – отрицательной (мнимые фокусы).

Удобство использования такого параметра, как оптическая сила, заключается в том, что для плотно сложенных N элементов (линз, фильтров и др.) оптической системы ее оптическая сила равна алгебраической сумме оптических сил ее элементов, т.е.

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \Phi_k.$$

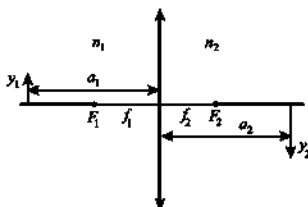


Рис. 7.8

У линзы две сферические поверхности с разными (в общем случае) радиусами кривизны. Кроме того, линза может лежать на границе раздела двух протяженных сред с разными показателями преломления (рис. 7.9). В результате оптическая сила тонкой линзы как сумма оптических сил сферических преломляющих поверхностей определяется следующим соотношением:

$$\Phi_l = \Phi_{R_1} + \Phi_{R_2} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{R_2},$$

где соответствующие параметры указаны на рис. 7.9, а оптическая сила преломляющей сферической поверхности определяется как разность показателей преломления второй среды по отношению к первой, деленная на радиус кривизны поверхности.

Однако для получения корректного результата, особенно в отношении знака оптической силы каждого элемента, необходимо строго следовать ряду правил, принятых в геометрической оптике.

1. Положительным всегда принято считать направление слева направо в плоскости чертежа или рисунка. Именно в этом направлении обычно рассматривается распространение луча в оптической системе. Однако можно рассматривать и обратный ход луча (см. решение задачи 7.10).

2. В соответствии с п. 1 расстояния, отсчитываемые вправо от выделенной точки оптической системы, считаются положительными,

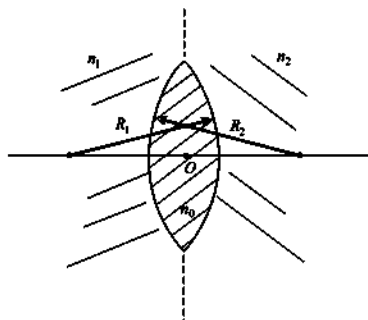


Рис. 7.9

влево — отрицательными. Это же условие справедливо и для значений радиусов кривизны по положению центров кривизны относительно сферических поверхностей.

3. При определении оптической силы сферической поверхности берется разность показателя преломления среды, в которую попадает положительно направленный луч после прохождения границы раздела сред, и показателя преломления той среды, откуда луч попадает на границу.

С учетом приведенных правил оптическая сила двояковыпуклой линзы, показанной на рис. 7.9,

$$\Phi_n = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{-R_2},$$

и если среда, в которой находится линза, является однородной ($n_1 = n_2$), то

$$\Phi_n = (n_0 - n) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Следует отметить, что в случае уединенной тонкой линзы естественной точкой отсчета является ее оптический центр, а для зеркала — его полюс. В этом случае соотношение (7.2) должно принять вид

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \Phi_x. \quad (7.3)$$

Отсюда вытекают естественные следствия:

$$f_1 = -\frac{n_1}{\Phi_n}, \quad f_2 = \frac{n_2}{\Phi_n}, \quad -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}.$$

Для соотношения поперечных размеров источника и изображения (размеров в направлении, перпендикулярном к главной оптической оси, см. рис. 7.8) вводится понятие поперечного увеличения

$$Y = \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2 n_1}{a_1 n_2}.$$

Следует иметь в виду, что параметр y_1 обычно вводится как параметр, перпендикулярный к оптической оси, поэтому для перевернутого изображения (как на рис. 7.8) параметр y_2 будет отрицательным.

Мы наблюдаем определенные противоречия со знаками в соотношениях (7.2) и (7.3). На самом деле никакого противоречия нет — все дело

в выборе точек отсчета. Для соотношения (7.2) исходный отсчет идет от положения источника, поэтому параметр a_1 отсчитывается вправо и имеет знак «+». А вот параметр a_2 отсчитывается уже от положения линзы (сохраняется последовательность действий источник — линза — изображение), и тоже берется знак «+» (рис. 7.8). Если расположение объектов меняется, то меняется и знак.

В соотношении (7.3) точкой отсчета является положение линзы для определения всех параметров. Поэтому для обычной схемы (рис. 7.8) параметр a_1 отсчитывается влево, т.е. имеет знак «-», а параметр a_2 отсчитывается уже вправо и имеет знак «+». При изменении положения предмета и изображения относительно линзы знаки параметров a_1 и a_2 определяются аналогичным образом.

Привязку знаков параметров к выбору точки отсчета проиллюстрируем и для сферических зеркал.

Обратимся к формуле (7.1) в связи со сформулированными выше правилами. В случае вогнутого зеркала при отсчете от полюса зеркала радиус кривизны следует взять отрицательным. При действительных источнике и изображении расстояния a_1 , a_2 также отрицательны. Для мнимых источника и (или) изображения a_1 и (или) a_2 получаются положительными, поэтому формула (7.2) будет выполняться, но с инверсной знаку. Все вышесказанное абсолютно аналогично для выпуклого зеркала с учетом положительности радиуса кривизны.

Для сложных оптических систем, состоящих из большого количества элементов, можно последовательно рассматривать преобразования оптических лучей каждым из элементов, что приводит к весьма трудоемкой процедуре даже для относительно простых систем. При анализе решения задач такой подход будет продемонстрирован (см., например, задачу 7.12). Однако разработан подход (*метод лучевых матриц*), позволяющий существенно упростить процедуру расчета путем замены реальной оптической системы некоторой формальной, обладающей свойствами тонкой линзы (одной!). Метод лучевых матриц в настоящее время широко используется в разнообразных системах автоматического расчета и проектирования оптических систем и трактов передачи оптической информации. Остановимся на применении этого метода для достаточно простого случая аксиально-симметричной центрированной оптической системы, содержащей только сферические линзы. Более подробно с методом лучевых матриц можно ознакомиться в учебном пособии [12], а детальное его описание дано в книгах [5, 17].

Центрированной оптической системой называется система, центры кривизны элементов которой расположены на одной прямой, которая является осью симметрии и называется *главной оптической осью*. Акси-

альная симметрия такой системы означает, что можно рассматривать только лучи, находящиеся в плоскости, проходящей через главную оптическую ось. Более того, будем считать, что выполняется параксиальное приближение для реализации условия стигматичности.

Пусть OO' — главная оптическая ось некоторой центрированной оптической системы (рис. 7.10), а луч распространяется в однородной среде с показателем преломления n .

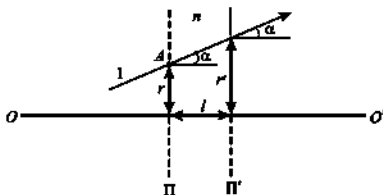


Рис. 7.10

Если провести опорную плоскость Π ортогонально главной оптической оси, то луч l в точке пересечения этой плоскости (A) можно характеризовать двумя параметрами: расстоянием r от главной оптической оси и углом α с направлением главной оптической оси. Тогда для описания поведения луча можно сформировать двумерный вектор E_L (в отличие от обычных полярных векторов) соответствующими компонентами:

$$E_L = \begin{pmatrix} r \\ V = \alpha n \end{pmatrix}.$$

Для другой опорной плоскости Π' положение луча будет определяться двумерным вектором луча E'_L с другими значениями компонент:

$$E'_L = \begin{pmatrix} r' \\ V' \end{pmatrix}.$$

Закон преобразования векторов можно записать в операторной форме:

$$E'_L = \hat{M} E_L,$$

где оператор \hat{M} можно представить в виде матрицы общего вида:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Тогда, следуя правилам линейной алгебры, закон преобразования компонент векторов будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} r' &= Ar + BV, \\ V' &= Cr + DV, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где параметры A , B , C и D определяются конкретным составом оптической системы, находящейся между опорными плоскостями Π и Π' .

В геометрической оптике потерями энергии при прохождении отдельных элементов пренебрегают, что определяет условие $\det M = 1$ (или $AD - BC = 1$). Отсюда следует, что только три из параметров матрицы M могут быть независимыми.

Для последовательного преобразования луча N последовательными элементами оптической системы закон композиции имеет вид

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1.$$

При упрощенном рассмотрении матрицы M_k могут быть двух видов в зависимости от характера преобразования луча элементом оптической системы. Рассмотрим распространение луча через плоскопараллельный слой толщиной l в однородной среде (рис. 7.10). Соотношения (7.4) в случае параксиальности луча (т.е. $\alpha \ll 1$) имеют очень простой вид:

$$r' = r + l\alpha = r + \frac{l}{n}V, \quad V' = V.$$

Это означает, что матрица M_L в данном случае имеет вид

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого типа будем называть *матрицами распространения*. При этом входная или выходная плоскость может просто совпадать с границами среды. Более того, если луч проходит через систему из N параллельных слоев однородных сред с разными показателями преломления, то результирующая матрица имеет вид

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & \sum \frac{l_k}{n_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

причем легко убедиться, что вследствие закона преломления (в параксиальном приближении) параметр V при переходе от одного слоя к другому не изменяется. Именно в этом и заключается удобство его использования.

Матрица преломления на сферической поверхности имеет вид

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. параметр Φ имеет смысл оптической силы, взятой с обратным знаком. Такие матрицы будем называть *матрицами преломления*.

Полная матрица оптической системы определяется как последовательное перемножение матриц этих двух типов для отдельных элементов, которые представляют сферические преломляющие поверхности и промежутки между ними и построены в обратном порядке, причем порядок перемножения должен строго выполняться.

Рассмотрим общую задачу. Пусть имеется некая оптическая система, которая задана входной (I) и выходной (II) преломляющими сферическими поверхностями (не исключается и случай плоской поверхности как предельный случай при $R \rightarrow \infty$). Будем считать, что система описывается матрицей общего вида, заданной между опорными плоскостями Π_0 и Π'_0 , проходящими через точки пересечения поверхностей главной оптической осью (рис. 7.11). При этом слева и справа от системы находятся однородные среды с показателями преломления n_1 и n_2 . Определим общую систему, расположив входную плоскость Π на расстоянии l_1 слева от поверхности I и выходную плоскость Π' на расстоянии l_2 справа от поверхности II. Примем входную плоскость Π за начало отсчета.

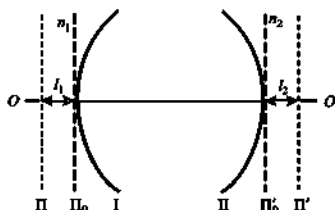


Рис. 7.11

Найдем лучевую матрицу общей системы между плоскостями Π и Π' , которая получается как последовательное произведение двух матриц распространения для промежутков l_1 и l_2 , и матрицу общего вида, которая описывает исходную оптическую систему, причем l_1 и l_2 в данном случае будут положительными:

$$\begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C \frac{l_2}{n_2} & A \frac{l_1}{n_1} + B + D \frac{l_2}{n_2} + C \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2} \\ C & D + C \frac{l_1}{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

Полученное выражение станет основным для всего последующего анализа, причем еще раз подчеркнем, что положения плоскостей Π и Π' исходно ничем не ограничивались.

Введем понятие *главных плоскостей* *оптической системы*, которые являются чрезвычайно важным элементом в дальнейшем рассмотрении. Для этого потребуем, чтобы положение плоскостей Π и Π' было таким, чтобы оно обеспечивало поперечное увеличение $+1$, т.е. луч, попадающий на входную плоскость Π на расстоянии r от главной оптической оси (рис. 7.12, точка A) после прохождения всей системы попадал бы на выходную плоскость Π' на таком же расстоянии $r' = r$ (точка A'). Вот такая пара взаимно сопряженных плоскостей с поперечным увеличением $+1$ и называется главными плоскостями оптической системы и обозначается символами H и H' .

Из равенства $r' = r$ с учетом соотношений (7.4) следует, что должны выполняться условия $A' = 1$ и $B' = 0$, а также $D' = 1$ (вследствие того, что $\det M = 1$).

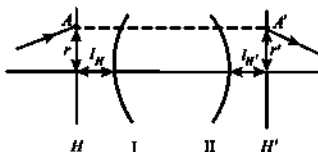


Рис. 7.12

Следовательно, на основании выражения (7.5) получаем:

$$l = A + C \frac{l_{H'}}{n_2}, \quad l = D + C \frac{l_H}{n_1},$$

откуда положение этих новых главных плоскостей относительно исходной оптической системы определяется как

$$l_H = \frac{l - D}{C} n_1, \quad l_{H'} = \frac{l - A}{C} n_2, \quad (7.6)$$

где D, C, A — элементы матрицы, которая описывает исходную систему.

Теперь наша формальная система между плоскостями H и H' описывается лучевой матрицей вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

т.е. мы получаем матрицу, которая полностью совпадает с матрицей преломления тонкой линзы (или сферической поверхности). Иными словами, задание главных плоскостей позволяет формально заменить оптическую систему неким аналогом обычной тонкой линзы (одной!) с оптической силой, равной оптической силе системы, но с разнесенными главными плоскостями (у тонкой линзы они совпадают).

Следует помнить порядок введения параметров l_1 и l_2 (см. рис. 7.11). Поэтому, например, если знак у параметра l_H положительный ($l_H > 0$), то входная главная плоскость H будет располагаться слева от входной преломляющей поверхности системы I , т.е. будет находиться в не расположенных элементов оптической системы. В этом нет ничего необычного, поскольку главные плоскости являются формальными элементами, определяющими некую эквивалентную оптическую систему.

Полное определение формального аналога нашей оптической системы требует задания положения фокальных плоскостей. Для определения положения передней фокальной плоскости просто потребуем, чтобы в соответствии со свойством фокальной плоскости лучи, выходящие из одной точки входной плоскости Π , образовывали лучок параллельных лучей после прохождения оптической системы (рис. 7.13, а). В этом случае плоскость Π и будет являться входной фокальной плоскостью F . Но тогда при преобразовании вектора луча (соотношение (7.4)) следует потребовать, чтобы при фиксированном значении r и любом значении V значение параметра V' оставалось постоянным (условие параллельности выходящих лучей). Это возможно только при $D' = 0$.

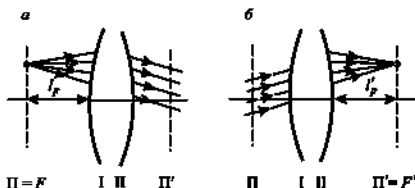


Рис. 7.13

Для определения положения задней фокальной плоскости потребуем, чтобы пучок параллельных лучей после прохождения системы собирался в одной точке задней плоскости Π' (рис. 7.13, б), которая в этом случае и будет задней фокальной плоскостью F' . При этом должно выполняться условие $A' = 0$, поскольку значение параметра r' не должно зависеть от значения r . Из полученных условий следуют соотношения для положения фокальных плоскостей:

$$l_F = -\frac{D}{C}n_1, \quad l_{F'} = -\frac{A}{C}n_2, \quad (7.8)$$

причем эти плоскости отстоят от соответствующих главных плоскостей на расстояния, соответствующие фокусным, т.е. $f_1 = -\frac{n_1}{C}$ и $f_2 = -\frac{n_2}{C}$.

Таким образом, мы получили способ нахождения положения четырех основных кардинальных элементов центрированной оптической системы — главных и фокальных плоскостей и соответствующих главных и фокальных точек, которые определяются как точки пересечения соответствующих плоскостей с главной оптической осью*.

Вернемся к анализу соотношений (7.5). Будем считать, что оптическая система задана не преломляющими поверхностями, а своими

* Вообще говоря, для такой системы существует шесть кардинальных элементов, и к главным и фокальным плоскостям необходимо добавить узловые плоскости (и соответствующие точки), которые определяются как взаимно сопряженные плоскости с единичным угловым увеличением (их введение можно провести по аналогии с процедурой введения главных плоскостей). Но поскольку мы рассматриваем сильно упрощенный вариант метода лучевых матриц, эти элементы в данном варианте не рассматриваются. Далее будет показано, что уже введенных четырех кардинальных элементов вполне хватает для исследования широкого круга оптических систем.

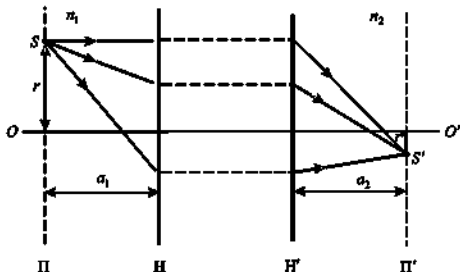


Рис. 7.14

главными плоскостями. Тогда она описывается матрицей вида (7.7), у которой параметр $B = 0$. Допустим, что с помощью этой оптической системы получено изображение S' точечного источника S . Это означает, что если точечный источник S совместить с входной плоскостью Π , то его изображение S' должно получаться в выходной плоскости Π' (рис. 7.14).

Из преобразования (7.4) следует, что изображение точечного источника будет точечным, если параметр r' не зависит от параметра V (все лучи сходятся в одной точке), что выполняется при условии $B' = 0$ в выражении (7.5). Отсюда непосредственно следует, что если положения источника и его изображения определены относительно главных плоскостей оптической системы величинами a_1 и a_2 соответственно (рис. 7.14), то эти величины связаны точно таким же соотношением, какое вводится для тонкой линзы, т.е.

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = -C = \Phi_1, \quad (7.9)$$

причем знаки величин a_1 и a_2 определяются в соответствии со сформулированными выше правилами.

Соотношение (7.9) еще раз подчеркивает, что вводимая через кардинальные элементы формальная система аналогична тонкой линзе с оптической силой исходной системы, но с разнесенными главными плоскостями. С примерами нахождения кардинальных элементов и их использования мы ознакомимся при решении задач.

Примеры решения задач

При решении задач априори предполагается, что оптические элементы находятся в воздухе (если по условиям задачи не рассматриваются иные среды), показатель преломления которого принимается равным 1,0.

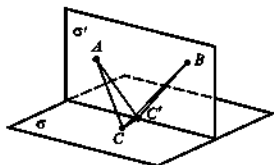


Рис. 7.15

Задача 7.1. На основе принципа Ферма сформулировать закон отражения.

Решение. Пусть в однородной среде, ограниченной отражающей плоскостью σ , имеются две точки A и B . Необходимо определить траекторию луча из точки A в точку B .

Сначала покажем, что эта траектория должна лежать в плоскости σ' , которая содержит точки A и B и ортогональна отражающей плоскости σ (рис. 7.15).

Допустим, что траектория луча состоит из двух отрезков — AC и CB (лучи в однородной среде распространяются по прямой). Спроецируем эту траекторию на плоскость σ' и получим отрезки AC' и $C'B'$. Поскольку отрезок CC' перпендикулярен к плоскости σ' , то выполняются соотношения $AC > AC'$ и $CB > C'B'$ как гипотенузы соответствующих прямоугольных треугольников. Таким образом, траектория $AC'B'$ короче траектории ACB , и в соответствии с принципом Ферма траектория ACB не может быть истинной траекторией луча. Это условие выполняется при любом положении точки C вне плоскости σ' и, следовательно, означает, что истинная траектория луча между точками A и B должна лежать в плоскости σ' .

Теперь рассмотрим траекторию в плоскости σ' . Проведем перпендикуляр в точку C' и обозначим угол падения θ_1 и угол отражения θ_2 (рис. 7.16). Для выяснения «истинной» траектории луча между точками A и B воспользуемся «мягкой» формулировкой принципа Ферма, которая утверждает, что при малой вариации истинной траектории ее оптическая длина в первом приближении не изменяется. Спроецируем точки A и B на плоскость σ (точки A' и B') и запишем из геометрических соображений оптическую длину пути луча $AC'B$ (рис. 7.16) в виде

$$L = n \left(\frac{A'C'}{\sin \theta_1} + \frac{C'B'}{\sin \theta_2} \right),$$

где n — показатель преломления среды.

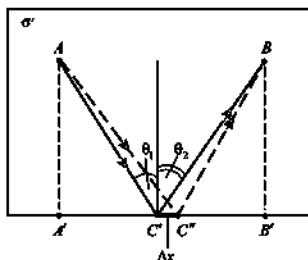


Рис. 7.16

Теперь проведем малую вариацию траектории луча, сместив точку отражения C' на малое расстояние Δx в точку C'' . Тогда, пренебрегая изменением углов θ_1 и θ_2 , выражение для оптической длины траектории $AC''B$ можно записать так:

$$L' = n \left(\frac{A'C''}{\sin \theta_1} + \frac{C''B'}{\sin \theta_2} \right) = n \left(\frac{A'C'}{\sin \theta_1} + \frac{C'B'}{\sin \theta_2} \right) + \Delta x \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right).$$

Отсюда следует, что $L = L'$ только при $\theta_1 = \theta_2$. Таким образом, мы получаем формулировку закона *отражения*: угол падения равен углу отражения, а луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к точке падения лежат в одной плоскости.

Задача 7.2. Найти угол отклонения луча призмой с показателем преломления n и малым преломляющим углом α , если призма находится в воздухе, а угол падения луча на призму является малым.

Решение. Пусть луч падает на грань призмы в точке A под углом θ_1 и преломляется под углом θ_2 . Затем он падает на вторую грань призмы в точку B под углом θ_3 и преломляется под углом θ_4 (рис. 7.17).

Угол полного отклонения луча φ является внешним для треугольника ABC , поэтому

$$\varphi = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_4 - \theta_3).$$

Из закона преломления $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n$ и $\frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_4} = \frac{1}{n}$ в приближении малых углов получаем: $\theta_1 = n\theta_2$, $\theta_4 = n\theta_3$. Отсюда следует, что $\varphi = (\theta_2 + \theta_3)(n - 1)$.

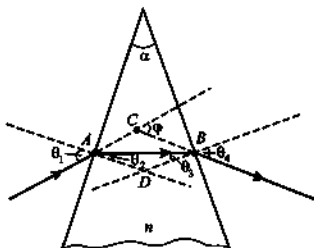


Рис. 7.17

Для четырехугольника $ADBE$ $\angle ADB = \pi - \alpha$, поскольку два угла являются прямыми, а из треугольника ADB имеем $\theta_2 + \theta_3 + \pi - \alpha = \pi$, т.е. $\theta_2 + \theta_3 = \alpha$. Окончательно получаем: $\varphi = \alpha(n - 1)$.

Следует отметить, что с учетом принятых приближений (при малом угле падения) угол полного отклонения не зависит от угла падения луча на призму.

Задача 7.3. На дне бассейна, заполненного водой на глубину H , находится точечный источник S . Найти положение его изображения в зависимости от величины угла θ между перпендикуляром к поверхности воды и направлением наблюдения.

Решение. Для получения изображения возьмем два близко расположенных луча, выходящих из точечного источника под углами θ_1 и $\theta_1 + \delta\theta_1$ к перпендикуляру (рис. 7.18). После преломления на границе водной поверхности эти лучи пойдут под углами θ и $\theta + \delta\theta$ к нормали и будут являться расходящимися, поэтому продолжения лучей после преломления дадут мнимое изображение источника S' .

Для определения положения мнимого изображения введем систему координат, начало которой находится в месте расположения источника, ось Oy направлена вертикально вверх, а ось Ox — по дну бассейна так, чтобы выходящие из источника S лучи лежали в плоскости xOy (в этом случае достаточно двумерной системы координат вследствие аксиальной симметрии задачи).

Запишем уравнения прямых y_1 и y_1' , описывающих исходящие из источника S лучи: $y_1 = x \operatorname{ctg} \theta_1$, $y_1' = x \operatorname{ctg}(\theta_1 + \delta\theta_1)$. Эти прямые пересекут поверхность воды в точках с координатами по оси Ox :

$$x_1 = \frac{H}{\operatorname{ctg} \theta_1}, \quad x_1' = \frac{H}{\operatorname{ctg}(\theta_1 + \delta\theta_1)}.$$

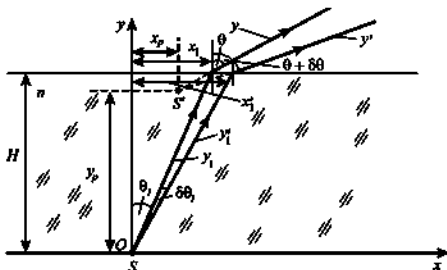


Рис. 7.18

Уравнения для преломленных лучей y и y' определим в общем виде:

$$y = x \operatorname{ctg} \theta + b, \quad y' = x \operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta) + b'.$$

Параметры b и b' определяются из условий, что эти прямые должны пройти через точки с координатами (x_1, H) и (x'_1, H) соответственно. Тогда

$$b = H \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \right), \quad b' = H \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta)}{\operatorname{ctg}(\theta_1 + \delta\theta_1)} \right).$$

Условие того, что эти прямые пересекутся в точке $S'(x_p, y_p)$, означает, что при подстановке значений x_p в уравнения мы должны получить значения y_p в обоих уравнениях. Поэтому приравняем правые части уравнений и получаем:

$$x_p (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta)) = H \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} - \frac{\operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta)}{\operatorname{ctg}(\theta_1 + \delta\theta_1)} \right].$$

Вспользуемся тем, что $\delta\theta$ и $\delta\theta_1$ являются малыми величинами, и применим разложение Тейлора, ограничиваясь только линейными членами. Тогда

$$\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta) = \frac{\delta\theta}{\sin^2 \theta} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{ctg}(\theta + \delta\theta)}{\operatorname{ctg}(\theta_1 + \delta\theta_1)} = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left(1 - \frac{\delta\theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) \approx \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left(1 - \frac{\delta\theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \right)$$

$$\approx \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left(1 - \frac{\delta \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) \left(1 + \frac{\delta \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \right) \approx \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left(1 - \frac{\delta \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\delta \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \right).$$

Теперь

$$x_p \frac{\delta \theta}{\sin^2 \theta} = H \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left(1 - \frac{\delta \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\delta \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \right)$$

или

$$x_p = \frac{H}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left[1 - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \frac{\delta \theta_1}{\delta \theta} \right].$$

Воспользуемся законом преломления $\sin \theta = n \sin \theta_1$, возьмем дифференциал от обеих частей $\cos \theta \cdot \delta \theta = n \cos \theta_1 \cdot \delta \theta_1$ и выразим $\frac{\delta \theta_1}{\delta \theta} = \frac{\cos \theta}{n \cos \theta_1}$.

Тогда

$$x_p = \frac{H}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left[1 - \frac{1}{n} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \theta_1 \cos^2 \theta_1} \right] = \frac{H}{\operatorname{ctg} \theta_1} \left[1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_1} \right].$$

Преобразуем $\operatorname{ctg} \theta_1$, используя закон преломления:

$$\operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}}{\sin \theta_1} = n \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta}}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}.$$

Тогда

$$x_p = \frac{H \sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \left[1 - \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta} \right] = H(n^2 - 1) \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^3.$$

Теперь найдем координату y_p :

$$y_p = H(n^2 - 1) \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^3 \operatorname{ctg} \theta + H \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_1} \right).$$

После преобразований, аналогичных использованным выше, имеем:

$$y_p = H \left(1 - n^2 \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^3 \right).$$

Рассматривая совокупность значений $y_p(\theta)$ и $x_p(\theta)$, получаем кривую, называемую *каретником* (рис. 7.19).

Характерно, что в случае $\theta \rightarrow 0$ мы имеем выражение

$$y_p = H \left(1 - \frac{1}{n} \right) = H \frac{n-1}{n} = y_{\min},$$

которое обычно получают при нормальном наблюдении мнимого изображения. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$y_p \left(\frac{\pi}{2} \right) = H, \quad x_p \left(\frac{\pi}{2} \right) = x_m = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Это означает, что даже глубоководный источник при наблюдении под углами, близкими к скользящим, будет казаться расположенным на поверхности воды, причем точка его расположения остается фиксированной при смещении наблюдателя.

Следует подчеркнуть, что решение данной задачи совершенно простое с точки зрения физического подхода, однако весьма громоздкое с точки зрения его математической реализации. Однако оно иллюстрирует характерные математические приемы при решении подобных задач.

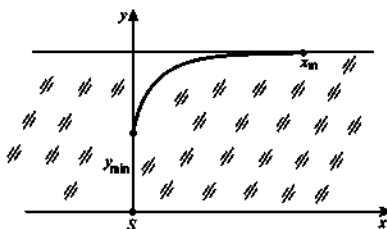


Рис. 7.19

Задача 7.4. Два плоских зеркала составляют угол α , а точечный источник лежит на биссектрисе этого угла. Определить, сколько получится изображений источника, если:

- а) $\alpha = 90^\circ$;
 б) $\alpha = 270^\circ$.

Решение. а) Задачу просто решить прямым построением, если учесть свойства плоского зеркала: изображение можно строить относительно плоскости зеркала. Тогда получаем изображение S_1 в зеркале I и изображение S_2 в зеркале II (рис. 7.20, а).

Далее мы формально можем рассматривать изображение мнимого источника S_1 в зеркале II, получая изображение S_3 . Точно то же изображение S_3 можно получить от мнимого источника S_2 в зеркале I. Это связано с тем, что если изображения S_1 и S_2 получаются в результате однократных отражений от зеркал, то S_3 — в результате двукратных. Поэтому, например, отраженный луч I' можно формально считать исходящим от источника S_1 (рис. 7.20, б).

В качестве самостоятельного упражнения можно доказать следующее:

- луч I' после двукратного отражения (рис. 7.20, а) выйдет параллельно лучу I , но в противоположном направлении;
- если положение источника S сместить с биссектрисы в произвольном направлении, то результат построения принципиально не изменится — получится три изображения исходного источника.

б) Принципиально схема построения изображений не изменяется: изображение S_1 — в зеркале I и изображение S_2 — в зеркале II. Однако теперь изображения S_1 и S_2 уже нельзя рассматривать в качестве формальных источников, поскольку, например, ни один из лучей от источ-

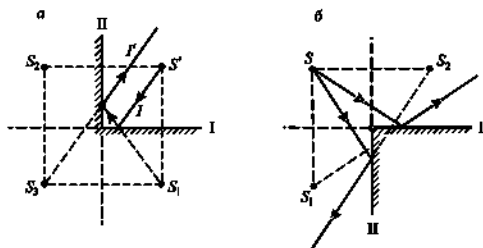


Рис. 7.20

ника S_1 (после первого отражения) не может попасть на зеркало II. Таким образом, в данном случае мы имеем только два изображения. Ситуация принципиально не изменится при смещении положения источника S , если только он будет оставаться в пределах угла, образованного продолжениями плоскостей зеркал. Если это условие будет нарушено, то останется только одно изображение.

Задача 7.5. Точечный источник находится на расстоянии $a_1 = 20,0$ см от вогнутого зеркала. При смещении источника на $\Delta = 5,0$ см вдоль оптической оси его изображение смещается на такое же по величине расстояние. Найти радиус кривизны зеркала.

Решение. Предположим, что наблюдается действительное изображение этого источника. В этом случае формула для зеркала может быть записана в виде формулы (7.1):

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}.$$

При перемещении источника величину a_1 необходимо заменить на величину $a_1 \pm \Delta$ (мы заранее не знаем, какой знак имеет Δ). При этом величину a_2 следует заменить на $a_2 \mp \Delta$, поскольку сумма обратных величин должна оставаться постоянной. Приравняем левые части в формуле зеркала и получаем:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1 \pm \Delta} + \frac{1}{a_2 \mp \Delta}, \text{ тогда } \frac{\pm \Delta}{a_1(a_1 \pm \Delta)} = \frac{\pm \Delta}{a_2(a_2 \mp \Delta)}.$$

Знак равенства в последнем соотношении означает, что должны быть равны знаменатели, откуда получаем квадратное уравнение $a_2^2 \mp a_2 \Delta - a_1(a_1 \pm \Delta) = 0$ с двумя корнями: $a_2' = a_1 \pm \Delta$, $a_2'' = -a_1$. Поскольку $R = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}$, то для первого корня получается два решения:

- 1) если источник удаляют от зеркала ($+\Delta$), то $a_2 = 25,0$ см, $R = 22,2$ см;
- 2) если источник приближают к зеркалу ($-\Delta$), то $a_2 = 15,0$ см, $R = 17,1$ см.

Второй корень означает, что изображение мнимое, а формула зеркала приводит к равенству $\frac{2}{R} = 0$, что соответствует плоскому зеркалу. И это решение можно было бы получить без всяких вычислений только на основании свойств изображения в плоском зеркале.

Итак, мы предполагали, что изображение является действительным. Предлагаем читателю самостоятельно исследовать случай возможного

мнимого изображения. Для этого требуется показать, что никакого другого решения кроме плоского зеркала в этом случае не существует.

Задача 7.6. Построить ход луча в простых системах.

а) Построить ход луча I после отражения в выпуклом зеркале (рис. 7.21, а).

б) Построить ход луча после преломления в собирающей линзе (рис. 7.22, а).

в) Построить ход луча после преломления в рассеивающей линзе (рис. 7.23, а).

г) При заданной главной оптической оси известны положения точечного источника и его изображения (рис. 7.24, а). Построить зеркало, с помощью которого получено данное изображение.

д) При заданном положении главной оптической оси в однородной среде известны положения точечного источника S и его изображения S' (рис. 7.25, а). Определить положение тонкой линзы, с помощью которой получено данное изображение, и найти положение ее фокусов.

Решение. а) Воспользуемся тем, что задано положение фокуса зеркала. Построим вспомогательный луч 2 , параллельный лучу 1 , таким образом, чтобы его продолжение проходило через точку фокуса F . Тогда после отражения луч $2'$ пойдет параллельно оптической оси (рис. 7.21, б).

Теперь воспользуемся тем свойством, что после отражения в выпуклом зеркале параллельных лучей их продолжения должны пересекаться в одной точке в фокальной плоскости. Продолжение луча $2'$ пересечет фокальную плоскость в точке B . Но тогда через эту же точку должно пройти и продолжение луча $1'$, который получается после отражения луча 1 в зеркале.

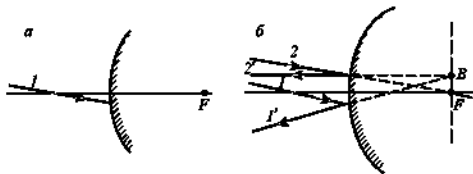


Рис. 7.21

б) В данном случае стандартный метод побочной оптической оси непосредственно не работает, так как различные фокусные расстояния говорят о разных показателях преломления по разные стороны от линзы. В этом случае луч, проходящий через оптический центр O тонкой линзы, будет испытывать преломление.

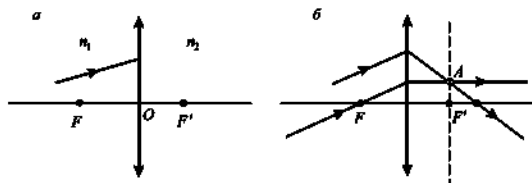


Рис. 7.22

Вспользуемся свойством пучка параллельных лучей, которые после преломления в линзе пересекаются в фокальной плоскости. Построим вспомогательный луч, параллельный заданному, но проходящий через передний фокус F . В соответствии с определением фокуса такой луч после преломления в линзе пойдет параллельно главной оптической оси, пересекая заднюю фокальную плоскость в точке A (рис. 7.22, б). Но поскольку исходный луч параллелен вспомогательному, то после преломления в линзе он тоже должен пройти через точку A фокальной плоскости.

Интересно, что подход, лежащий в основе метода побочной оси, можно использовать и в данном случае. Для этого требуется построить преломление луча, проходящего через оптический центр линзы под некоторым углом к оптической оси. Предлагаем читателю выполнить это построение самостоятельно.

в) Принципиально построение хода луча (рис. 7.23, а) выполняется точно таким же образом, как в п. б), только необходимо учесть, что для

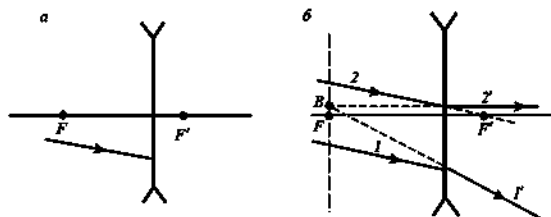


Рис. 7.23

рассеивающей линзы передний и задний фокусы меняются местами. Вследствие этого вспомогательный луч 2, параллельный исходному лучу 1, выбираем так, чтобы его продолжение после линзы проходило через передний фокус F' (рис. 7.23, б). Тогда после преломления в линзе луч $2'$ пойдет параллельно главной оптической оси. Его продолжение пересечет заднюю фокальную плоскость в точке A . Но тогда через эту же точку пройдет продолжение луча $1'$, который образуется вследствие преломления луча 1.

г) Для построения зеркала достаточно найти положение двух его кардинальных точек — центра кривизны O и полюса C (точки пересечения главной оптической оси с отражающей поверхностью зеркала). Напомним, что для сферических зеркал есть только один луч, который непосредственно проходит через источник и изображение. Это луч, проходящий через центр кривизны O зеркала. Поэтому луч, проведенный через источники S и S' , пересечет оптическую ось в точке O , которая и является центром кривизны зеркала (рис. 7.24, б).

Для нахождения полюса зеркала — точки C используем закон отражения. Луч от источника S , попадающий в точку полюса C , должен образовывать с осью угол, равный углу между отраженным лучом и этой же осью (рис. 7.24, б). Для выполнения данного условия построим точку S'' , симметричную точке S' относительно оптической оси. Проведем луч SS'' до пересечения с оптической осью. По построению лучи SC и CS' образуют с оптической осью одинаковые углы. Таким образом, точка C является полюсом зеркала, а расстояние OC равно радиусу его кривизны.

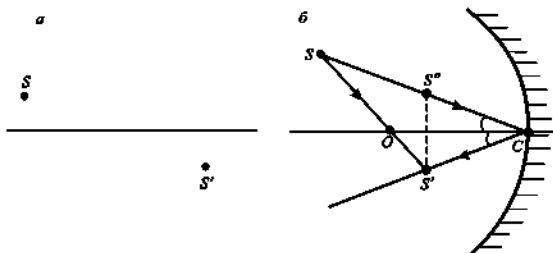


Рис. 7.24

д) В однородной среде точечный источник S и его изображение S' должны лежать на побочной оптической оси, т.е. луч, проходящий через точки S и S' , должен пересекать оптическую ось в точке O , которая является оптическим центром линзы. Перпендикуляр, проведенный через точку O , определяет положение (главную плоскость) линзы (рис. 7.25, б).

Для нахождения точки фокуса проведем луч из точки S параллельно оптической оси до пересечения с главной плоскостью линзы в точке C (рис. 7.25, б). После преломления луч (или его продолжение) должен пройти через точку фокуса. Но так как изображение S' находится слева от главной плоскости линзы, то ясно, что линза будет рассеивающей и луч после преломления отклонится от оптической оси. Через точку S' пройдет продолжение луча $S'C$, пересечение которого с оптической осью даст точку фокуса. В однородной среде фокусные расстояния линзы будут одинаковы.

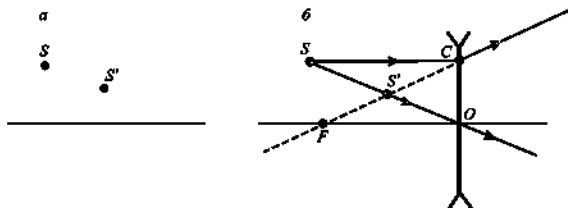


Рис. 7.25

Задача 7.7. Между линейным источником и экраном находится тонкая линза. При двух различных положениях линзы между источником и экраном на экране наблюдается четкое изображение источника. При одном положении линзы высота изображения равна a , а при другом — b . Схема расположения отдельных элементов представлена на рис. 7.26. Найти высоту источника.

Решение. Покажем, что данная схема обладает симметрией, определяемой соотношениями $a_1 = a'_2$ и $a_2 = a'_1$, при этом применим два подхода.

Сначала используем аналитический расчет. Поскольку линза одна и та же, то выполняются следующие соотношения:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a'_1} + \frac{1}{a'_2} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{a'_1 + a'_2}{a'_1 a'_2}.$$

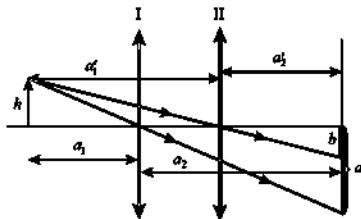


Рис. 7.26

Однако вследствие того, что $a_1 + a_2 = a_1' + a_2' = L$, имеем $a_1 a_2 = a_1' a_2'$. Теперь, возводя первое из приведенных соотношений в квадрат и вычитая почленно учетверенное второе, получаем важное соотношение:

$$(a_1 - a_2)^2 = (a_1' - a_2')^2.$$

Поскольку на величины a , не накладывалось никаких ограничений кроме удовлетворения формулы линзы, то полученное соотношение может выполняться только при двух условиях:

$$a_1 - a_2 = a_1' - a_2', \quad a_1 - a_2 = a_2' - a_1'.$$

В сочетании с уже имеющимися соотношениями первое из полученных определяет тривиальное условие, т.е. $a_1 = a_1'$ и $a_2 = a_2'$, а второе как раз соответствует требуемому: $a_1 = a_2'$ и $a_2 = a_1'$.

Полученный результат можно доказать без использования математического аппарата, основываясь только на свойствах идеальной оптической системы. Будем опираться на два основных принципа: стигматичности (единственности изображения источника) и обратимости (если изображение источника сделать источником, то его изображение в точности совпадет с исходным источником). Обратим внимание на то, что при положении I линзы получается увеличенное изображение источника, причем расположение источника, линзы и изображения является единственно возможным (условие стигматичности). Если же теперь полученное изображения рассматривать в качестве источника, то должно получиться уменьшенное изображение при том же расположении элементов (условие обратимости). Но ведь при положении II линзы получается именно уменьшенное изображение при том же расположении элементов (рис. 7.26). Это означает, что положение II линзы является

перевернутым положением I линзы. Следовательно, выполняются соотношения:

$$a_1 = a'_2, \quad a_2 = a'_1.$$

Теперь, используя определение поперечного увеличения

$$\frac{a}{h} = \frac{a'_2}{a'_1}, \quad \frac{b}{h} = \frac{a_2}{a_1}$$

и почленно перемножив соотношения, получим:

$$\frac{ab}{h^2} = \frac{a'_2 a_2}{a'_1 a_1} = \frac{a_1 a_2}{a_2 a_1} = 1, \quad \text{или } h = \sqrt{ab}.$$

Задача 7.8. Два сложных зеркала представляют собой одинаковые тонкие стеклянные плосковыпуклые линзы, у одной из которых посеребрена плоская грань (рис. 7.27, а), а у второй — выпуклая грань (рис. 7.27, б). Найти отношение фокусных расстояний этих зеркал.

Решение. Поскольку исходные линзы тонкие, то оптическая сила сложных зеркал определяется как сумма оптических сил отдельных элементов. Для первого зеркала $\Phi_1 = \Phi_{\text{пл}} + \Phi_{\text{пл.з}} + \Phi_{\text{в.з}}$, где $\Phi_{\text{пл}} = \frac{n-1}{R}$, $\Phi_{\text{пл.з}} = 0$ (плоское зеркало).

Отсюда имеем:

$$\Phi_1 = \frac{2(n-1)}{R}, \quad f_1 = \frac{R}{2(n-1)}.$$

Для второго зеркала

$$\Phi_2 = \Phi_{\text{пл}} + \Phi_{\text{в.з}} + \Phi_{\text{в.з}} = \frac{2(n-1)}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2n}{R}, \quad f_2 = \frac{R}{2n}.$$

Тогда $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n-1}$, и при среднем значении для стекла $n = 1,5$ получаем: $\frac{f_1}{f_2} = 3$.

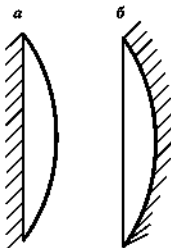


Рис. 7.27

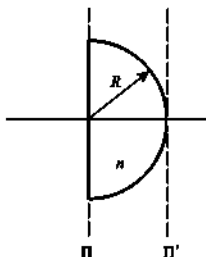


Рис. 7.28

Задача 7.9. Найти положение главных и фокальных плоскостей для толстой линзы, представляющей собой половину стеклянного шара радиусом R .

Решение. Воспользуемся методом лучевых матриц, считая входную плоскость Π совпадающей с плоской поверхностью системы, а выходную плоскость — проходящей через точку полюса сферической поверхности (рис. 7.28).

Лучевая матрица системы представляет собой произведение матриц для каждого из элементов системы — матрицы преломления на плоской поверхности M_P , матрицы распространения в стекле M_R и матрицы преломления на сферической поверхности M_C . Поскольку для плоской границы матрица преломления является единичной, результирующая лучевая матрица будет иметь следующий вид:

$$M = M_C M_R M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{n} \\ -\Phi & 1 - \Phi \frac{R}{n} \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \frac{1-n}{-R}$ — оптическая сила сферической поверхности.

В соответствии с определением (соотношения (7.6) и (7.8)) найдем значения параметров, определяющих положение кардинальных элементов:

$$l_H = \frac{1-D}{C} = \frac{1-1+\Phi \frac{R}{n}}{-\Phi} = -\frac{R}{n},$$

$$l_H' = \frac{1-A}{C} = \frac{1-1}{-\Phi} = 0,$$

$$l_F = \frac{-D}{C} = \frac{1-\Phi \frac{R}{n}}{\Phi} = R \frac{1-\frac{n-1}{n}}{n-1} = \frac{R}{n(n-1)},$$

$$l_{F'} = \frac{-A}{C} = \frac{l}{\Phi} = \frac{R}{n-1}.$$

Теперь на основе полученных значений графически обозначим положение кардинальных элементов относительно самой толстой линзы (рис. 7.29).

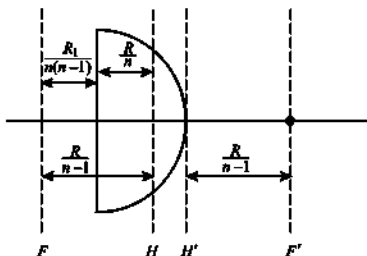


Рис. 7.29

Значение параметра l_H — отрицательное, т.е. положение входной главной плоскости H смещено вправо от входной плоскости системы (плоской поверхности линзы) на расстояние $\frac{R}{n}$. Выходная главная плоскость H' совпадает с выходной плоскостью оптической системы, т.е. проходит через полюс сферической поверхности.

Задняя фокальная поверхность F' сдвинута вправо от задней главной плоскости H' на величину фокусного расстояния $\frac{R}{n-1}$, в то время как передняя фокальная поверхность F сдвинута влево от входной плоскости оптической системы на величину $\frac{R}{n(n-1)}$, причем несложно убедиться в том, что расстояние между плоскостями F и H в точности равно фокусному.

В качестве самостоятельного упражнения доказать, что положение кардинальных элементов относительно линзы не изменится, если линзу перевернуть, т.е. входной поверхностью будет сферическая.

Задача 7.10. Найти построением и аналитически положения главных и фокальных плоскостей системы двух тонких собирающих линз с фокусными расстояниями $f_1 = 15,0$ см и $f_2 = 5,0$ см, расположенных на расстоянии $d = 10,0$ см друг от друга.

Решение. Сначала определим положение плоскостей построением, представив оптическую схему с сохранением масштаба (рис. 7.30). Специфической особенностью данной схемы является совпадение положений задних фокусов обеих линз.

Начнем построение с луча I , параллельного главной оптической оси, поскольку его пересечение с главной оптической осью даст положение точки заднего фокуса системы. После преломления в линзе I он должен пройти через задний фокус этой линзы F'_1 , но путь луча I' перекрывается линзой II (рис. 7.30).

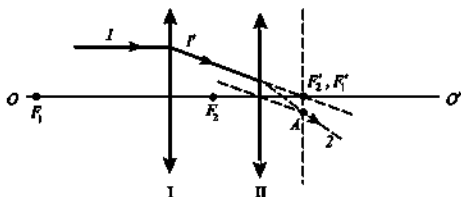


Рис. 7.30

Для построения прохождения этого луча через линзу II используем метод побочной оптической оси. Проведем через оптический центр линзы II луч, параллельный падающему. Он пересечет заднюю фокальную плоскость линзы II в точке A (рис. 7.30). Именно через эту точку пройдет исходный луч после преломления в линзе II (луч 2). Точка пересечения этого луча с главной оптической осью даст положение F' задней фокальной плоскости (рис. 7.31).

Для нахождения положения задней главной плоскости H' воспользуемся основным свойством главных плоскостей — их взаимным сопряжением. Это означает, что луч 2 должен выйти из точки задней главной плоскости H' на таком же расстоянии от главной оптической оси, на котором луч I пересечет переднюю главную плоскость H . Для этого найдем точку B пересечения продолжений исходного луча I и луча 2 (рис. 7.31), что и определяет положение задней главной плоскости H' .

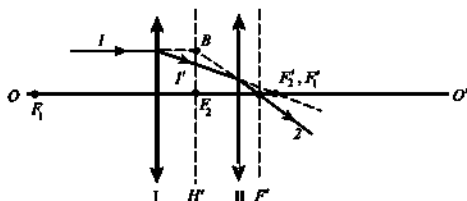


Рис. 7.31

Для нахождения передней пары фокальной и главной плоскостей воспользуемся свойством обратимости оптической системы: если на пути вышедшего луча поставить зеркало так, чтобы луч поменял свое направление на обратное, то он пройдет через систему по тому же пути, что и исходный луч, но в обратном порядке.

Итак, пусть прошедший через систему луч будет параллелен оптической оси. Отражаем его в обратном направлении (рис. 7.32) и получаем луч I . Тогда после преломления в линзе II он пройдет через ее передний (в данном случае) фокус F_2 . Преломление в линзе I строим методом побочной оси так, как это было описано выше, и получаем точку C в фокальной плоскости линзы I, через которую должен пройти луч 2, прошедший через систему. Из построения видно, что луч 2 уходит от главной оптической оси. Поэтому строим продолжение вышедшего луча в обратном направлении. Точка его пересечения с главной оптической осью даст положение F передней фокальной плоскости, а точка его пересечения с исходным лучом I — положение передней главной плоскости H .

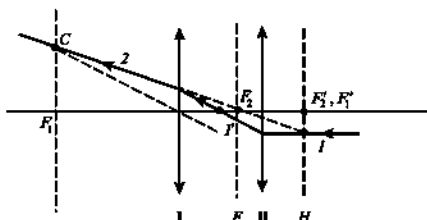


Рис. 7.32

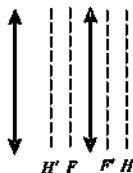


Рис. 7.33

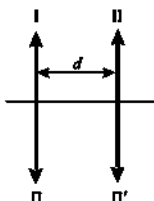


Рис. 7.34

Сводя оба построения к одному, получаем картину, показанную на рис. 7.33.

Конкретные значения для расстояний можно получить из простых геометрических соотношений, которые здесь не приводятся.

На первый взгляд, картина расположения кардинальных элементов несколько необычная: мы имеем существенную инверсию (перестановку) главных плоскостей. Поэтому проверим результаты построения аналитическим расчетом, используя метод лучевых матриц.

Исходно мы имели систему двух собирающих линз с фокусными расстояниями f_1 и f_2 , расположенных на расстоянии d в среде с показателем преломления $n = 1,0$ (рис. 7.34). Мы специально рассматриваем задачу в общем виде, чтобы проанализировать полученные результаты.

Если входную плоскость II совместить с линзой I, а выходную плоскость II' — с линзой II, то полная матрица системы определяется следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\Phi_c & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_c = \frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 f_2}$ — оптическая сила системы.

Теперь положение главных и фокальных плоскостей определяется следующими соотношениями (см. (7.6) и (7.8)):

$$l_H = \frac{1-D}{C} = -\frac{d}{f_2 \Phi_c},$$

$$l_{H'} = \frac{1-A}{C} = \frac{d}{f_1 \Phi_c},$$

$$l_F = \frac{-D}{C} = -\frac{d-f_2}{f_2 \Phi_c},$$

$$l_F = \frac{-A}{C} = -\frac{d-f_1}{f_1\Phi_c}$$

Отвлечемся на некоторое время от нашей конкретной системы и проведем общий анализ возможного расположения главных плоскостей. В случае, когда расстояние d между линзами меньше суммы фокусных расстояний ($f_1 + f_2$), мы получаем собирающую систему ($\Phi_c > 0$). Но тогда параметры l_H и $l_{H'}$ будут отрицательными, что означает смещение передней главной плоскости вправо от линзы I, а задней главной плоскости — смещение влево от линзы II (рис. 7.35, а).

При увеличении d оптическая сила системы Φ_c уменьшается, что ведет к значительному росту параметров l_H и $l_{H'}$. В этом случае возможны не только инверсия в расположении плоскостей H и H' , но и их выход за пределы расположения линз (рис. 7.35, б).

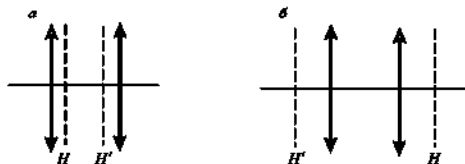


Рис. 7.35

При условии $d = f_1 + f_2$ система становится телескопической ($\Phi_c = 0$), главные плоскости уходят на бесконечность.

В случае, когда $d > f_1 + f_2$, система становится рассеивающей ($\Phi_c < 0$), а параметры l_H и $l_{H'}$ — положительными. При этом плоскость H будет оставаться слева от линзы I, а плоскость H' — справа от линзы II (рис. 7.36).

Проведенный небольшой анализ показывает, что в принципе может быть получена любая последовательность расположения главных и фокальных плоскостей оптической системы.

Теперь вернемся к нашей конкретной системе линз и, подставив численные значения параметров, получим: $l_H = -15,0$ см, $l_{H'} = -5,0$ см, $l_F = -7,5$ см, $l_{F'} = 2,5$ см,

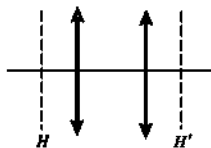


Рис. 7.36

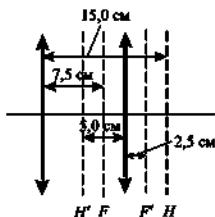


Рис. 7.37

$F_0 = 7,5$ см, что позволяет указать конкретное расположение кардинальных элементов (рис. 7.37).

Таким образом, аналитический расчет полностью подтверждает результат, полученный на основании построения.

Задача 7.11. Построить изображение точечного источника в оптической системе, заданной своими кардинальными элементами.

Решение. Напомним, что введение главных плоскостей оптической системы позволяет провести формальную замену ее

тонкой линзой, поэтому и методы построения практически такие же, как и для тонкой линзы: необходимо найти точку пересечения лучей (или их продолжений), исходящих из источника. При этом лучше выбирать характеристические лучи, ход которых можно легко построить.

Рассмотрим для определенности последовательность $FSHH'F'$. Это означает, что точечный источник S находится между передними фокальной и главной плоскостями (рис. 7.38).

В качестве луча l удобно взять луч, распространяющийся параллельно оптической оси и попадающий на входную главную плоскость в точке A . Тогда согласно свойствам главных плоскостей луч выйдет из сопряженной точки A' на выходной главной плоскости H' , которая расположена на таком же расстоянии от главной оптической оси, что и точка A . Согласно свойствам оптической системы луч, входящий па-

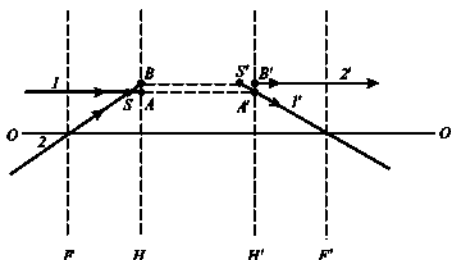


Рис. 7.38

параллельно главной оптической оси, после прохождения оптической системы должен пройти через задний фокус системы (луч I').

В качестве второго луча удобно взять луч 2, продолжение которого проходит через точку переднего фокуса системы. Луч 2 попадает на входную главную плоскость в точке B и выходит из сопряженной точки B' выходной главной плоскости параллельно главной оси (луч $2'$). Лучи I' и $2'$ расходятся, поэтому изображение S' получится на пересечении их продолжений.

По формальным соображениям изображение S' должно считаться мнимым при действительном источнике S . Однако для оптических систем понятия действительности и мнимости теряют строгую определенность, поскольку, как показано в предыдущей задаче, главные плоскости могут быть существенно смещены относительно реальных элементов оптической системы. В таком случае точечный источник, находящийся слева от входной главной плоскости системы и формально считающийся действительным, может возникнуть за счет схождения лучей справа от реальной входной поверхности системы, для которой он будет мнимым. Точно так же полученное изображение (рис. 7.38) формально (по построению) является мнимым, однако может располагаться справа от реальной выходной поверхности оптической системы и являться действительным. Фактически мы определяем, как изменяют свое направление лучи 1 и 2, проходящие через точку S , после прохождения оптической системы.

Методика построения принципиально не изменится, если, например, источник S существенно сдвинуть вправо, получив, например, последовательность $FHH'SF'$ (рис. 7.39). Тогда S можно рассматривать формально в качестве мнимого источника, который образуется как действи-

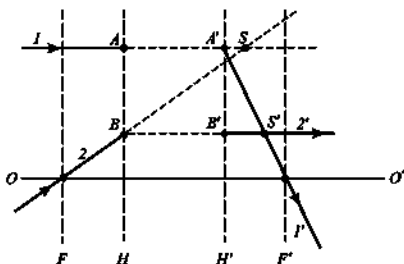


Рис. 7.39

тельное изображение, получаемое некой другой системой, но на пути сходящихся в точку S лучей мы теперь помещаем нашу оптическую систему. Иными словами, мы строим ход лучей, которые должны были бы сойтись в точке S , после прохождения через заданную систему.

Луч 1 возьмем параллельным главной оптической оси так, чтобы при своем продолжении от прошел через точку S . Точки входа (точка A) и выхода (точка A') являются сопряженными для главных плоскостей. После выхода из точки A' луч $1'$ должен пройти через задний фокус системы. В качестве второго луча возьмем луч 2 , который проходит через передний фокус системы в направлении точки S . Снова точки входа (точка B) и выхода (точка B') являются сопряженными, а после выхода в точке B' луч $2'$ должен распространяться параллельно главной оптической оси. Пересечение лучей $1'$ и $2'$ даст изображение S' точечного источника S . Такая методика построения «работает» в любом случае взаимного расположения кардинальных элементов и точечного источника. Рассмотрим, например, последовательность $H'F'FSH$ (рис. 7.40).

Для построения снова берем луч 1 , параллельный главной оптической оси, который при своем продолжении должен пройти точку S и попасть на входную главную плоскость H в точке A . Сопряженная точка A' будет находиться на выходной главной плоскости H' . Тогда после прохождения системы луч $1'$ должен быть направлен так, чтобы он проходил через точку A' и задний фокус системы.

В качестве второго луча 2 берем луч, который при своем направлении на точку S будет проходить через точку переднего фокуса и достигать входной главной плоскости в точке B . Точка B' на выходной главной плоскости будет сопряженной B , луч $2'$, выходя из точки B' , будет рас-

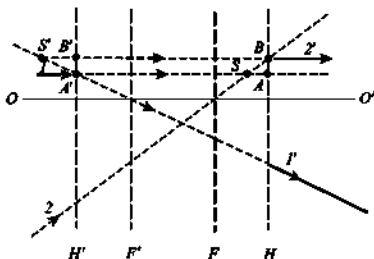


Рис. 7.40

протянуться параллельно главной оптической оси. Поскольку лучи I' и $2'$ расходятся, изображение S' получится на пересечении их продолжений.

Приведенный пример хорошо отражает ситуацию, которую мы отмечали ранее. Речь идет о преобразовании входящих лучей I и 2 в выходящие I' и $2'$. Поэтому ход лучей в области между главными плоскостями изображен пунктиром, поскольку может не соответствовать реальным лучам в этой области.

Задача 7.12. Центрированная оптическая система состоит из двух тонких линз с фокусными расстояниями $f_1 = 20,0$ см и $f_2 = -5,0$ см, расположенных на расстоянии $d = 25,0$ см друг от друга. Перед собирающей линзой на расстоянии $L = 30,0$ см расположен предмет, поперечный размер которого $h = 3,0$ см. Найти положение изображения предмета и его поперечное увеличение.

Решение. Выполним расчет двумя методами. Первый основан на последовательном получении изображения предмета сначала в первой линзе. Оно в свою очередь будет являться источником для построения изображения во второй линзе (рис. 7.41). (Здесь проведено последовательное построение, чтобы была более понятной ситуация, которая показана на рис. 7.42.)

Используем формулу тонкой линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f_1}$ и для положения промежуточного изображения h_1 в первой линзе получаем:

$$a_2 = \frac{f_1 a_1}{a_1 - f_1}, \quad a_2 = \frac{20 \cdot 30}{10} = 60,0 \text{ см.}$$

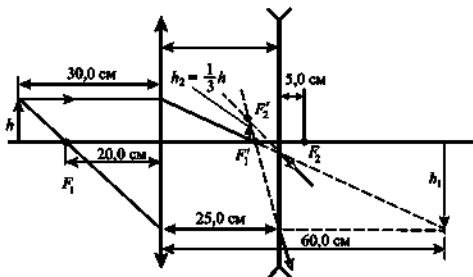


Рис. 7.41

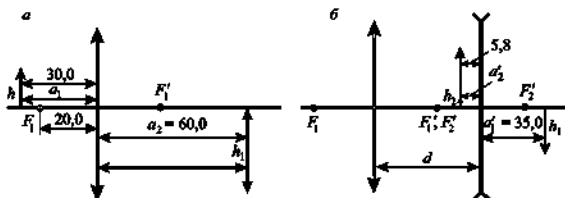


Рис. 7.42

Полученное изображение h_1 будет располагаться, как показано на рис. 7.42, а, являться мнимым источником для второй линзы, и его положение относительно этой линзы определяется, как показано на рис. 7.42, б: $a'_2 = a_2 - d = 35,0$ см. Однако, поскольку источник мнимый, а вторая линза рассеивающая, величины a'_2 и f_2 в формуле линзы нужно брать со знаком \leftarrow , т.е.

$$\frac{1}{a'_2} + \frac{1}{a'_2} = -\frac{1}{f_2} \quad \text{или} \quad a'_2 = \frac{f_2 a'_2}{f_2 - a'_2} \approx -5,8 \text{ см.}$$

Знак \leftarrow у a'_2 говорит о том, что изображение будет находиться на расстоянии 5,8 см перед второй линзой.

Для определения увеличения используем такую же последовательность операций: $V = \frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1} \frac{h_1}{h} = \frac{a'_2 a_2}{a'_1 a_1} = \frac{1}{3}$.

Второй способ основан на использовании лучевых матриц. Полная матрица системы определяется как произведение матриц для трех элементов: линзы с фокусным расстоянием f_1 , воздушного зазора между линзами и линзы с фокусным расстоянием f_2 , взятых в обратном порядке. Произведение матриц дает следующий результат:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\Phi_0 & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix},$$

где оптическая сила системы $\Phi_0 = \frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 f_2}$, $\Phi_0 = 10,0$ дптр, что соответствует фокусному расстоянию $F_0 = 10,0$ см. Положение главных

плоскостей задается значениями параметров результирующей матрицы в соответствии с соотношениями (7.6):

$$l_H = -\frac{df_1}{f_1 + f_2 - d}, \quad l_{H'} = \frac{25 \cdot 20}{25 + 5 - 20} = 50 \text{ см},$$

$$l_H = \frac{df_2}{f_1 + f_2 - d}, \quad l_{H'} = -\frac{25 \cdot 5}{25 + 5 - 20} = -12,5 \text{ см}.$$

Мы можем изобразить конкретное положение главных плоскостей (рис. 7.43), откладывая расстояния l_H влево от линзы с фокусным расстоянием f_1 ($l_H > 0$) и расстояния $l_{H'}$ влево от линзы с фокусным расстоянием f_2 ($l_{H'} < 0$). Поскольку $F_c > 0$ (система работает как собирающая линза), фокальные плоскости располагаются слева от H и справа от H' на расстоянии 10,0 см.

Теперь мы можем непосредственно применить формулу тонкой линзы, где в качестве фокусного расстояния берется величина $F_c = 10,0$ см, а положение предмета и его изображения определяются относительно входной и выходной главных плоскостей соответственно. Величина a_1'' в данном случае равна $l_H - a_1$ и берется со знаком \leftarrow , так как для нашей системы источник является мнимым (находится справа от входной главной плоскости H). (Это как раз поясняет комментарий относительно действительности и мнимости источников в задаче 7.11.) Подстановка этого значения в соотношение $-\frac{1}{a_1''} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{F_c}$ дает

$$a_2' = \frac{F_c a_1''}{F_c + a_1''} a_2' = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ см}.$$

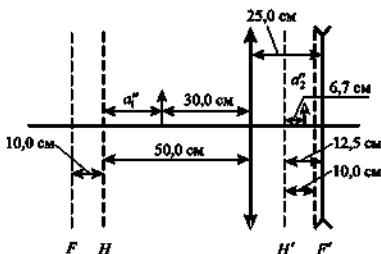


Рис. 7.43

Это положение относительно входной главной плоскости. Если учесть, что эта плоскость смещена влево от второй линзы на 12,5 см, то получается, что изображение смещено влево от второй линзы на 5,8 см. Теперь увеличение равно

$$V = \frac{h_2}{h_1} = \frac{a_2''}{a_1''} = \frac{1}{3}.$$

На первый взгляд, использование матричного метода представляется более сложным, однако это только для относительно простых систем. А если в нашем случае вместо тонких линз использовать толстые, то матричный метод остается единственно возможным.

Задача 7.13. При установке на бесконечность труба Галилея имеет длину $l = 60,0$ см и дает 21-кратное увеличение. Определить:

- фокусные расстояния объектива и окуляра трубы;
- на какое расстояние Δl надо передвинуть окуляр трубы, чтобы четко видеть предметы, находящиеся на расстоянии $a = 100,0$ м.

Решение. Труба Галилея представляет собой телескопическую систему и состоит из собирающей (объектив) и рассеивающей (окуляр) линз (рис. 7.45).

а) При установке на бесконечность задний фокус $F_{об}'$ объектива совмещен с передним фокусом $F_{ок}$ окуляра (условие телескопичности системы, рис. 7.44). Если l — длина трубы (расстояние между объективом и окуляром), то $l = f_{об} - f_{ок}$. Увеличение трубы равно отношению размеров источника и изображения, что в данном случае реально соответствует отношению фокусных расстояний, т.е.

$$V = \frac{f_{об}}{f_{ок}}.$$

Отсюда легко получить, что $f_{ок} = \frac{l}{V-1} = 3,0$ см и $f_{об} = Vf_{ок} = 63,0$ см.

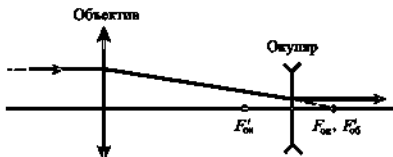


Рис. 7.44

б) Положение даваемого объективом изображения предмета, находящегося от объектива на расстоянии a_1 , можно найти с помощью формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{об}}$$

В соответствии с настройками трубы изображение предмета в объективе должно получаться вблизи переднего фокуса окуляра. Таким образом, окуляр необходимо сдвинуть на расстояние

$$\Delta l = b - f_{ок} = \frac{f_{ок}^2}{a - f_{ок}}, \quad \Delta l = 0,40 \text{ см.}$$

Обратим внимание на то, что величина смещения окуляра, вообще говоря, нелинейна относительно смещения объекта. Однако на больших расстояниях ($a \gg f_{об}$) можно считать, что $\Delta l \approx f_{ок}/a$.

Задача 7.14. Оптические силы объектива и окуляра микроскопа равны соответственно 100 и 20 дптр. Увеличение микроскопа равно 50,0. Каково будет увеличение этого микроскопа, если расстояние между объективом и окуляром увеличить на 2,0 см?

Решение. При наблюдении с помощью микроскопа предмет AB располагают вблизи переднего фокуса объектива $F_{об}$ (рис. 7.45).

Объектив дает увеличенное действительное перевернутое изображение $A'B'$ вблизи фокуса окуляра $F_{ок}$. В свою очередь окуляр переводит изображение $A'B'$ в увеличенное мнимое изображение A^*B^* , которое находится на расстоянии наилучшего зрения от окуляра (глаза): $O'B^* = L_0 = 25$ см. При расчетах принимается, что расстояние от предмета AB до объектива приближенно равно фокусному расстоянию объектива $f_{об}$,

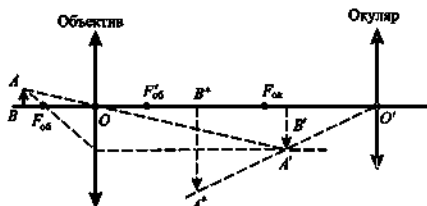


Рис. 7.45

а расстояние от изображения $A'B'$ до окуляра равно фокусному расстоянию окуляра $f_{ок}$.

Из подобия треугольников AOB и $OA'B'$ следует, что даваемое объективом увеличение

$$Y_{об} \approx \frac{A'B'}{AB} \approx \frac{f_{об} + X}{f_{об}} = 1 + X\Phi_{об},$$

где X — расстояние между положениями фокусов объектива и окуляра.

Из подобия треугольников $A'O'B'$ и $A^*O'B^*$ находим увеличение, даваемое окуляром:

$$Y_{ок} = \frac{A^*B^*}{A'B'} = \frac{L_0}{O'B'} \approx L_0\Phi_{ок}.$$

Увеличение микроскопа

$$Y = Y_{об}Y_{ок} = (1 + X\Phi_{об})L_0\Phi_{ок}.$$

При изменении расстояния между объективом и окуляром на Δl увеличение микроскопа

$$Y' = (1 + (X + \Delta l)\Phi_{об})L_0\Phi_{ок} = Y + \Delta l\Phi_{об}L_0\Phi_{ок}, \quad Y' = 60,0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вывести с помощью принципа Ферма формулу преломления параксиальных лучей на сферической поверхности радиусом R разделяющей среды с показателями преломления n_1 и n_2 .

2. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной d с показателем преломления n . Найти величину смещения δ луча как функцию угла падения θ .

Ответ: $\delta = [1 - \sqrt{(1 - \sin^2 \theta)/(n^2 - \sin^2 \theta)}] d \sin \theta$.

3. Для трехгранной призмы с преломляющим углом $\theta = 60^\circ$ угол наименьшего отклонения луча в воздухе $\varphi_{мин} = 37^\circ$. Найти угол наименьшего отклонения для этой призмы в воде.

Ответ: $8,7^\circ$.

4. Путем построения найти положение сферического зеркала и его фокуса, если P и P' — соответственно точечный источник и его изображение, OO' — оптическая ось (рис. 7.46).

5. Определить фокусное расстояние вогнутого зеркала, если:

а) при расстоянии между предметом и изображением $L = 15,0$ см поперечное увеличение $Y = -2,0$;

б) при одном положении предмета поперечное увеличение $Y_1 = -0,5$, а при другом положении, смещенном относительно первого на расстояние $L = 5,0$ см, поперечное увеличение $Y_2 = -0,25$.

Ответ: а) 20,0 см; б) 5,0 см.

6. Путем построения найти положения тонкой линзы в однородной среде и ее фокусов, если известны положения точечного источника S и его изображения S' относительно оптической оси OO' (рис. 7.47).

7. Определить фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, которое представляет собой двояковыпуклую тонкую стеклянную линзу с одной посеребренной поверхностью. Радиус кривизны линзы $R = 30,0$ см.

Ответ: $f = R/2(2n - 1)$, $f = 7,5$ см.

8. Изображение предмета, находящегося на расстоянии 10,0 см от тонкой линзы, прямое и увеличенное в 2 раза. Найти фокусное расстояние линзы.

Ответ: 20,0 см.

9. Имеются две тонкие симметричные стеклянные ($n = 1,5$) линзы: одна собирающая с радиусом кривизны поверхности 15 см, другая рассеивающая с радиусом кривизны поверхности 10 см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние f этой системы в воде ($n_0 = 1,33$)?

Ответ: $f = n_0 R_1 R_2 / [2(n - 1)(R_2 - R_1)]$, $f = -40$ см.

10. Найти оптическую силу Φ :

а) тонкой стеклянной линзы в жидкости с показателем преломления $n_0 = 1,7$, если ее оптическая сила в воздухе $\Phi = -5,0$ дптр;

б) тонкой симметричной двояковыпуклой стеклянной линзы, с одной стороны которой находится воздух, а с другой — вода, если оптическая сила этой линзы в воздухе $\Phi = 10,0$ дптр.

Ответ: а) $\Phi = 2,0$ дптр; б) $\Phi = 6,7$ дптр.

11. Система состоит из тонкой симметричной собирающей стеклянной линзы (радиус кривизны поверхности $R = 20$ см) и плоского зеркала

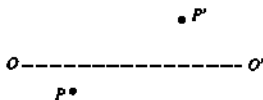


Рис. 7.46

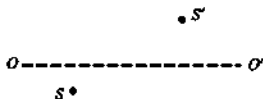


Рис. 7.47

ла, расположенного перпендикулярно к оптической оси линзы. Расстояние между линзой и зеркалом $l = 10$ см. Найти оптическую силу Φ этой системы, если пространство между линзой и зеркалом заполнено водой.

Ответ: $\Phi = 44$ дптр.

12. Центрированная система из трех тонких линз (рис. 7.48) находится в воздухе. Найти оптическую силу Φ системы и определить положение главных плоскостей.

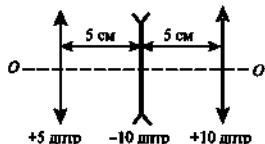


Рис. 7.48

Ответ: $\Phi = 7,5$ дптр; главные плоскости расположены симметрично на расстоянии $10,0$ см справа от первой линзы и слева от третьей. (Мы имеем инверсию главных плоскостей, когда входная плоскость совпадает с третьей линзой, а выходная — с первой.)

13. Пусть F и F' — соответственно передний и задний фокусы оптической системы, H и H' — ее передняя и задняя главные точки. Найти путем построения положение изображения точечного источника S для следующих взаимных расположений S, F, F', H, H' : $FSHH'F'$; $HSFF'H'$; $HF'SFH'$; $HFH'SF'$.

14. При какой толщине d толстая выпукло-вогнутая стеклянная линза в воздухе будет иметь оптическую силу $-1,0$ дптр, если радиусы кривизны ее выпуклой и вогнутой поверхностей равны соответственно $10,0$ и $7,5$ см.

Ответ: $d = 3,0$ см.

15. Найти фокусное расстояние F для пузырька воздуха радиусом $1,0$ мм в воде.

Ответ: $F = -1,5$ мм.

16. Оптическая система образована из двух одинаковых стеклянных ($n = 1,5$) шаров, радиусы которых R . Каково должно быть расстояние d между центрами этих шаров, чтобы система являлась телескопической?

Ответ: $d = 3R$.

17. Предмет находится на расстоянии 30,0 см от выпуклой поверхности выпукло-плоской стеклянной линзы, радиус кривизны поверхности которой 10,0 см. На каком расстоянии от плоской поверхности этой линзы получится изображение, если толщина линзы равна:

а) 3,0 мм;

б) 3,0 см;

в) 3,0 дм?

Отв е т: а) 60 см; б) 58 см; в) 40 см.

8

ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Идеальная оптическая система должна давать изображение точечного источника в виде точки. В силу неидеальности отдельных оптических элементов и (или) отступления от параксиального приближения изображение точки размывается и представляет собой пятно со сложным распределением интенсивности. Частично улучшить ситуацию позволяет пространственное ограничение пучка света, проходящего через оптическую систему, т.е. введение диафрагмы. На первый взгляд может показаться, что чем сильнее закрывать диафрагму, тем лучшего качества должно стать изображение, но при сильно закрытой диафрагме все более существенными становятся дифракционные эффекты, которые устранить принципиально невозможно. Конкуренция этих двух эффектов (улучшение изображения при закрытии диафрагмы, с одной стороны, и его размытие за счет дифракции — с другой) определяет конечную величину *пространственного разрешения*, под которым понимается величина наименьшего расстояния между двумя объектами, которые видны в данный оптический прибор как раздельные объекты. Именно разрешающая способность является главной характеристикой применяемого оптического прибора. Методика определения разрешающей способности для оптических приборов на примере микроскопа и телескопа будет приведена при решении соответствующих задач.

Отдельным классом оптических приборов являются спектральные приборы, в которых осуществляется разложение электромагнитного излучения оптического диапазона на монохроматические составляющие. Распределение энергии электромагнитного излучения по длинам волн называется *спектром излучения*.

Как правило, простейший спектральный прибор состоит из двух оптических и одного диспергирующего элементов. Оптические элементы служат для формирования световых потоков до и после диспергирующего элемента, назначение которого состоит в расложении падающего на него излучения в спектр путем пространственного разделения излучения с разными длинами волн. Диспергирующий элемент может работать на основании использования явлений дифракции (диспергирующий элемент — дифракционная решетка), дисперсии (диспергирующий элемент — призма), интерференции (диспергирующий элемент — эталон Фабри — Перо).

Если излучение практически монохроматического источника направить в спектральный прибор, то на выходе будет получаться линия конечной ширины из-за неидеальности оптических систем и свойств диспергирующего элемента. Как правило, форма спектральной линии на выходе из прибора формируется за счет эффектов интерференции и (или) дифракции, поэтому она имеет четко выраженный максимум, окруженный минимумами. Тогда под *шириной спектральной линии* будем понимать спектральное расстояние ($\delta\lambda$) между ближайшими симметричными минимумами, окружающими центральный максимум.

Основными характеристиками спектральных приборов являются разрешающая способность, угловая (или линейная) дисперсия, дисперсионная область.

Разрешающая способность спектрального прибора определяется наименьшей разностью длин волн $\delta\lambda$ двух спектральных линий, которые еще наблюдаются раздельно в данный спектральный прибор. Если принять длину одной из волн за λ , а другой — за $\lambda + \delta\lambda$, то для количественной характеристики разрешающей способности R можно использовать следующее выражение:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \quad (8.1)$$

Если в основе ограничения разрешающей способности лежат дифракционные явления, то в этом случае для определения разрешающей силы спектрального прибора применяют *критерий Рэлея*, согласно которому две спектральные линии считаются разрешенными, если положение главного максимума распределения интенсивности одной линии совпадает с положением первого минимума другой. Если эти линии имеют одинаковую интенсивность, то провал между ними должен быть не менее 20% от максимальной интенсивности (рис. 8.1).

Наиболее распространенным диспергирующим элементом является дифракционная решетка, которая раскладывает свет, падающий на нее,

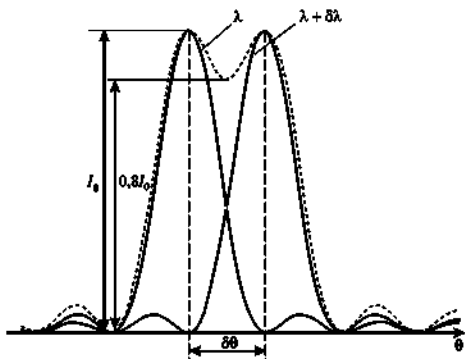


Рис. 8.1

в спектр, поскольку угол дифракции зависит от длины волны (за исключением случая $m = 0$).

Найдем разрешающую способность дифракционной решетки. Пусть на нее нормально падают две плоские волны с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$. В результате дифракции этих волн возникают две дифракционные картины. Согласно критерию Рэлея спектральные линии будут разрешены, если первый добавочный минимум дифракционной картины для длины волны λ будет совпадать с главным максимумом дифракционной картины для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ (рис. 8.1):

$$d \sin \theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N} = m(\lambda + \delta\lambda). \quad (8.2)$$

Отсюда разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN. \quad (8.3)$$

Как видно из полученной формулы, разрешающая способность дифракционной решетки возрастает с увеличением порядка дифракции. Однако при этом существенно падает интенсивность волны в данном направлении. Разрешающую способность дифракционной решетки можно повысить. Для этого необходимо установить дифракционную

решетку под некоторым углом к падающей волне. Предлагаем читателю самостоятельно разобрать вопрос о разрешающей способности решетки в таком случае.

Следует отметить, что при выводе разрешающей способности дифракционной решетки предполагалось, что дифракционная решетка освещается полностью, поэтому если освещается только ее часть, то под шириной следует понимать только освещенную часть дифракционной решетки.

Диспергирующие свойства призмы основаны на дисперсии света в материале, из которого она изготовлена (подробнее о дисперсии см. в гл. 13). Разрешающая способность призмы зависит от величины дисперсии $dn/d\lambda$ и является максимальной при установке ее под углом наименьшего отклонения:

$$R = b \frac{dn}{d\lambda},$$

где b — ширина основания призмы.

Вывод этого выражения будет сделан при решении задачи 8.4.

Угловая дисперсия $D_\theta = d\theta/d\lambda$ характеризует изменение угла отклонения светового пучка, выходящего из прибора, при изменении длины волны. Для дифракционной решетки при произвольном угле падения света ее можно найти прямым дифференцированием соотношения (6.12):

$$D_\theta = \frac{m}{d \cos \theta}. \quad (8.4)$$

Дисперсионная область — это интервал длин волн $\Delta\lambda$, где не происходит перекрытия спектров различных порядков (как правило, речь идет о соседних порядках). Найдем дисперсионную область для дифракционной решетки. Пусть на дифракционную решетку падает излучение, лежащее в спектральном интервале от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Перекрытие спектров соседних порядков для указанного спектрального интервала возможно, когда максимум $(m + 1)$ -го порядка для длины волны λ будет совпадать с максимумом m -го порядка для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$:

$$d \sin \theta = (m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda), \quad (8.5)$$

откуда

$$\Delta\lambda = \lambda/m. \quad (8.6)$$

Таким образом, для дифракционной решетки дисперсионная область уменьшается с ростом порядка дифракции.

Примеры решения задач

Задача 8.1. Свет с длиной волны λ падает нормально на дифракционную решетку с периодом d , содержащую N штрихов. Найти угловую ширину фраунгоферова максимума дифракции m -го порядка.

Решение. Для того чтобы определить угловую ширину дифракционного максимума, необходимо обратиться к рис. 6.4. Из него видно, что дифракционный максимум (2) окружают два добавочных минимума (1), следовательно, угловая ширина максимума будет разностью между угловыми положениями добавочных минимумов: $\delta\theta = (\theta_+ - \theta_-)$. Запишем условия для добавочных минимумов, соседних с главным максимумом:

$$\begin{cases} d \sin \theta_- = m\lambda - \lambda/N, \\ d \sin \theta_+ = m\lambda + \lambda/N. \end{cases}$$

Вычитая из второго условия первое, получаем:

$$d(\sin \theta_+ - \sin \theta_-) = 2\lambda/N.$$

Расписывая разность синусов, имеем:

$$2d \cos\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) = 2\lambda/N.$$

Положим $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$. При этом в силу малой разности между углами ($\delta\theta \ll \theta$) углу θ будет соответствовать направление на дифракционный максимум m

$$\sin\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) \approx \left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right).$$

Тогда, подставляя эти значения, получаем: $d \cos \theta \cdot \delta\theta = 2\lambda/N$. Из условия для максимума дифракционной решетки (формула 6.116) имеем: $\sin \theta = m\lambda/d$, $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. Окончательно получаем:

$$\delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd\sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}}.$$

Таким образом, мы нашли ширину спектральной линии для дифракционной решетки.

Следует отметить, что с ростом порядка дифракции происходит уменьшение угловой ширины дифракционного максимума.

Задача 8.2. Дифракционная решетка имеет период $d = 1,50$ мкм. Найти угловую дисперсию D_θ , соответствующую максимуму наибольшего порядка спектральной линии с длиной волны $\lambda = 530$ нм, если свет падает на решетку под углом $\alpha = 30^\circ$ к нормали.

Решение. Сначала определим максимальный порядок дифракции при наклонном падении света на дифракционную решетку. Данный порядок мы уже находили в п. б) задачи 6.2, поэтому воспользуемся полученными результатами. Исходя из условия (6.12), получим:

$$m_m = \left[\frac{d}{\lambda} (1 + \sin \alpha) \right],$$

откуда $m_m = 4$. Угловая дисперсия

$$D_\theta = \frac{m_m}{d \cos \theta} = \frac{m_m}{d \sqrt{1 - \sin^2 \theta}},$$

а $\sin \theta$ найдем из условия (6.12): $\sin \theta = \frac{m_m \lambda}{d} - \sin \alpha$. Тогда

$$D_\theta = \frac{m_m}{d \sqrt{1 - (m_m \lambda / d - \sin \alpha)^2}}, \quad D_\theta = 6,5 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}} = 22 \frac{\text{угл. мин}}{\text{нм}}.$$

Задача 8.3. Свет, содержащий две спектральные линии с длинами волн $\lambda_1 = 600,000$ нм и $\lambda_2 = 600,050$ нм, падает нормально на дифракционную решетку шириной $L = 10,0$ мм. Под некоторым углом дифракции θ эти линии оказались на пределе разрешения (по критерию Рэлея). Найти θ .

Решение. Спектральные линии будут разрешены по критерию Рэлея, если минимум одной будет попадать на максимум другой. В этом случае выполняется условие (8.3):

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN = m \frac{L}{d},$$

где $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$; $\delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Поскольку λ_1 и λ_2 близки, то условие для дифракционного максимума для средней линии будет мало отличаться от условия для каждой линии, поэтому можно записать: $d \sin \theta = m \lambda$. Тогда

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = \sin \theta \frac{L}{\lambda}, \quad \sin \theta = \frac{\lambda^2}{L \delta \lambda}.$$

Подставляя численные значения, получаем: $\theta = 46^\circ$.

Задача 8.4. Определить разрешающую способность трехгранной симметричной призмы при установке ее под углом наименьшего отклонения.

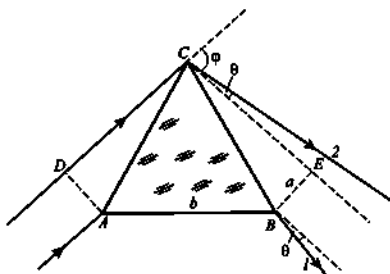


Рис. 8.2

Решение. При установке призмы под углом наименьшего отклонения ход лучей в призме является симметричным (рис. 8.2) и лучи внутри призмы идут параллельно основанию AB (предлагаем читателю доказать это утверждение самостоятельно). Из-за конечного размера грани призмы пучок, проходящий через нее, также будет ограничен в размерах, т.е. данная ситуация аналогична тому, что плоская волна падает на узкую щель. Угловое распределение интенсивности монохроматического дифрагированного света в этом случае считается таким же, как при дифракции Фраунгофера на щели, т.е. описывается формулой (6.4), где $u = (\pi a/\lambda)\sin\theta$, a — ширина пучка (эквивалентна ширине щели при дифракции Фраунгофера на щели). Угол θ отсчитывается здесь от нормали пучка, вышедшего из призмы. Поскольку для призмы выполняется условие $a \gg \lambda$, то уширение пучка мало и с большой точностью можно записать: $u = (\pi a/\lambda)\theta$. Тогда условие (6.11 а) для первого минимума при дифракции на щели примет вид $a\theta = \lambda$, т.е. разность хода между лучами, ограничивающими выходящий из призмы пучок, будет равна λ .

Рассмотрим две плоские волны с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$, падающих на призму под одним и тем же углом. Вследствие дисперсии показателя преломления они отклоняются призмой на несколько отличающийся угол. Согласно критерию Рэлея, две спектральные линии считаются разрешенными, если минимум одной попадает на максимум другой. Применим его для определения разрешающей способности призмы. Запишем

условие нулевого максимума при дифракции на щели для волны с длиной волны λ для крайних лучей (разность хода между крайними лучами должна равняться нулю):

$$nb - (DC + CE) = 0.$$

Согласно критерию Рэля для волны с длиной волны $\lambda + \delta\lambda$ этому же направлению должен соответствовать первый минимум дифракции на щели (разность хода между крайними лучами должна равняться длине волны):

$$(n + \delta n)b - (DC + CE) = \lambda + \delta\lambda,$$

откуда $b\delta n = \lambda + \delta\lambda \approx \lambda$. Тогда для призмы разрешающая способность (8.1)

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b \frac{\delta n}{\delta\lambda} = b \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$$

Знак модуля стоит потому, что для прозрачных веществ вдали от полюса поглощения с увеличением длины волны показатель преломления падает (более подробно это будет рассмотрено в гл. 13).

Задача 8.5. Имеется зрительная труба с объективом диаметром $D = 5,0$ см. Определить разрешающую способность объектива трубы и минимальное расстояние между двумя точками, находящимися на расстоянии $L = 3,0$ км от трубы, которое она может разрешить. Считать длину волны $\lambda = 0,55$ мкм.

Решение. С точки зрения геометрической оптики идеальная оптическая система дает изображение точечного источника света в виде точки бесконечно малых размеров. Но линзы (зеркала) любого реального оптического прибора имеют конечный размер, следовательно, за счет дифракции выходящий пучок света уширяется, это приводит к тому, что изображение точечного источника имеет конечные размеры. Это и ограничивает разрешающую способность объектива. По сути мы имеем дело с дифракцией Фраунгофера на входном отверстии. Для круглого входного отверстия дифракционная картина состоит из концентрических светлых и темных колец. На центральный максимум (диск Эйри) приходится 84% проходящего через входное отверстие светового потока. На основании формулы (6.6) угловой радиус θ первого темного кольца $\theta = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр входного отверстия.

Пусть имеются два точечных источника, угловое расстояние между которыми $\delta\theta$. Они будут разрешены объективом, если максимум дифракционной картины от одного источника попадает на минимум для другого (рис. 8.3), т.е. $\delta\theta \geq \theta$ (δr — расстояние между максимумами диф-

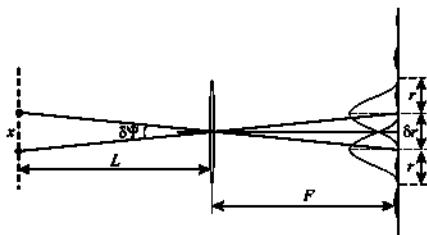


Рис. 8.3

рационных картин от источников на экране; r — расстояние между максимумом и минимумом для одного источника), $\delta\psi = \theta = 1,22\lambda/D$ (см. формулу 6.6)). Поэтому разрешающую силу объектива можно определить как $R = \frac{1}{\delta\psi}$, где $\delta\psi$ — минимальное угловое расстояние между двумя объектами, разрешаемое объективом (согласно критерию Рэля).

Тогда разрешающая способность объектива $R = \frac{D}{1,22\lambda}$. Подставив численные значения, получим $R = 7,45 \cdot 10^4$. Минимальное расстояние x между двумя предметами, находящимися на расстоянии L от трубы, будет равно $L\delta\psi = L/R = 0,04$ м.

Задача 8.6. Имеется микроскоп с числовой апертурой объектива $\sin u = 0,24$, где u — угол полураствора конуса лучей, падающих на оправу объектива. Найти минимальное разрешаемое расстояние для этого микроскопа при оптимальном освещении объекта светом с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм.

Решение. В отличие от телескопа волны, падающие на объектив микроскопа, нельзя считать плоскими, так как предмет находится близко к объективу. В то же время плоскость изображения находится на расстоянии $L = 160$ мм (стандартная длина тубуса микроскопа), которое намного больше диаметра объектива, поэтому волны вблизи плоскости изображения можно приближенно считать плоскими и применять формулы для дифракции Фраунгофера.

Рассмотрим две близкие точки A и B объекта, расположенные на расстоянии u друг от друга (рис. 8.4). В результате дифракции на круглом отверстии (Q_0) в плоскости изображения (плоскость P) каждая из точек будет представлена своей дифракционной картиной. Минимальное рас-

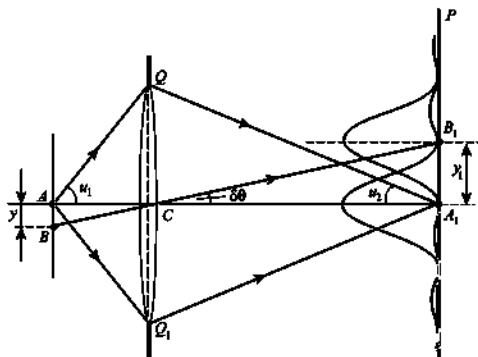


Рис. 8.4

стояние y_1 между точками изображения A_1 и B_1 , при котором они будут разрешены, определяется из критерия Рэля: максимум одной дифракционной картины должен попадать на минимум другой, т.е. y_1 равно радиусу первого темного дифракционного кольца, окружающего изображение точки A_1 или B_1 . На основании формулы (6.6) находим угловой радиус первого темного дифракционного кольца: $\delta\theta = 1,22\lambda/QQ_1$, где QQ_1 — диаметр диафрагмы, ограничивающей пучок света. В то же время $y_1 = \delta\theta \cdot CA_1$, где CA_1 — расстояние от объектива до плоскости изображения; $y_1 = 1,22\lambda(CA_1/QQ_1)$. Но $QQ_1/CA_1 = 2\text{tg} u_2 \approx 2\sin u_2$, так как диаметр объектива много меньше, чем расстояние от объектива до плоскости изображения (рис. 8.4), а это значит, что угол u_2 мал. Следовательно, $y_1 = 0,61\lambda/\sin u_2$.

Объективы микроскопов изготавливаются так, чтобы для сопряженных точек (точки предмета и соответствующей ей точки изображения) выполнялось условие синусов Аббе: $n\sin u = n_1 y_1 \sin u_1$. Поскольку предмет и изображение находятся в воздухе, то $n = n_1 = 1$ и $y_1 \sin u_1 = y_1 \sin u_1$. Окончательно получим: $y = 0,61\lambda/\sin u$. Подставив численные значения, будем иметь: $y = 1,4$ мкм.

Задача 8.7 Найти для эталона Фабри — Перо, толщина которого $d = 2,5$ см, дисперсионную область $\Delta\lambda$, если наблюдение ведется вблизи длины волны $\lambda = 0,50$ мкм.

Решение. Интерферометр Фабри — Перо состоит из двух стеклянных (или кварцевых) установленных параллельно друг другу пластин, внутренние плоские поверхности которых хорошо отполированы (с точностью до $0,01\lambda$). На эти поверхности наносятся хорошо отражающие покрытия. Наружные поверхности пластин обычно составляют небольшой угол с внутренними, чтобы световой блик, отраженный от наружных поверхностей, не мешал наблюдениям.

Интерферометр Фабри — Перо можно рассматривать как плоскопараллельную воздушную пластину. В результате многократного отражения света от двух параллельных плоскостей образуются группы плоских волн, которые интерферируют между собой. В результате наблюдается интерференционная картина, представляющая собой полосы равного наклона, локализованные в бесконечности.

Если между интерферометром и экраном поместить сферическую собирающую линзу так, чтобы экран был в ее фокусе, а в качестве источника света использовать точечный источник с малой расходимостью излучения, то в этом случае полосы будут иметь вид концентрических колец с центром в фокусе линзы (рис. 8.5). Каждое кольцо формируется лучами, падающими под определенным углом θ на интерферометр.

Разность хода для любых соседних лучей (например, для лучей 1 и 2)

$$\Delta = 2h - S = \frac{2d}{\cos\theta} - 2d \operatorname{tg}\theta \sin\theta = 2d \cos\theta.$$

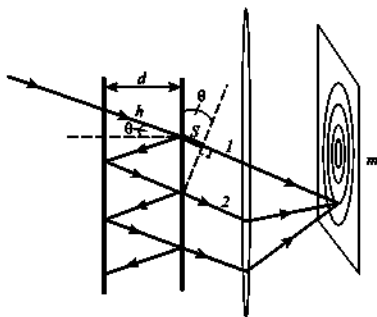


Рис. 8.5

Если $\Delta = m\lambda$, где m — порядок интерференции, то эти лучи будут усиливать друг друга и для этого направления будет наблюдаться максимум. Следовательно, $m = \frac{2d \cos \theta}{\lambda}$. Максимальный порядок интерференции m_m соответствует центральному пятну ($\theta = 0$) и в данном случае равен $\frac{2d}{\lambda} = 1,0 \cdot 10^5$.

Дисперсионная область определяется разностью длин волн $\Delta\lambda$, при которой наступает перекрытие полос соседних порядков интерференции. Перекрытие полос соседних порядков интерференции будет происходить, если максимум порядка m для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ будет попадать на максимум порядка $m + 1$ для длины волны λ :

$$2d \cos \theta = (m+1)\lambda, \quad 2d \cos \theta = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Следовательно, $\lambda = m\Delta\lambda$.

С учетом найденного максимального порядка интерференции получим:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2d}, \quad \Delta\lambda = 5,0 \text{ пм} = 5,0 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Интерферометр Фабри — Перо имеет малую дисперсионную область, но при этом большой порядок интерференции, т.е. он позволяет исследовать узкие спектральные интервалы с высоким разрешением.

Задача 8.8. Определить наибольший интервал длин волн $\Delta\lambda$, при котором нигде не перекрываются дифракционные спектры разных порядков для решетки с периодом $d = 4,0$ мкм при освещении ее светом в интервале длин волн от $\lambda - \Delta\lambda$ до $\lambda + \Delta\lambda$ для длины волны $\lambda = 576$ нм.

Решение. Наибольшее наложение спектров происходит для высших порядков дифракции, поэтому если не будут накладываться друг на друга волны с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ порядка $m_m - 1$ и длиной волны $\lambda - \Delta\lambda$ порядка m_m , то не будет наложения и для всех остальных порядков. Максимально возможный порядок дифракции будет определяться как $m_m = [d/(\lambda - \Delta\lambda)]^*$. Запишем условие наложения различных порядков дифракции:

$$\sin \varphi = m_m (\lambda - \Delta\lambda) / d = (m_m - 1) (\lambda + \Delta\lambda) / d,$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2m_m - 1} = \frac{\lambda}{2[d/(\lambda - \Delta\lambda)] - 1}.$$

* Здесь и далее квадратными скобками отмечена операция взятия целой части.

Для того чтобы решить это уравнение, воспользуемся методом последовательных приближений, суть которого заключается в следующем. Выбираем какое-либо начальное значение для искомой величины (в нашем случае в роли такой величины выступает m_m). Подставляем это значение в исходное уравнение и рассчитываем $\Delta\lambda$. Используя полученное значение $\Delta\lambda$, рассчитываем новое значение m_{m1} и с его помощью находим новое значение $\Delta\lambda_1$. Процесс необходимо продолжать до тех пор, пока разность значений, полученных на данном и предыдущем шагах, станет меньше наперед заданной величины. Поскольку в нашем случае величина порядка дифракции является целым числом, то условием окончания итераций можно считать ход, когда m_{m1} перестанет изменяться при итерациях.

В качестве первого приближения возьмем следующее условие: $\Delta\lambda = 0$. Тогда $m_{m1} = [d/\lambda]$. Используя значение m_{m1} , найдем ширину спектрального диапазона:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\lambda}{2m_{m1} - 1}$$

После подстановки численных значений получим $m_{m1} = 6$, откуда $\Delta\lambda_1 = 52$ нм. Теперь для нахождения следующего приближения рассчитываем $m_{m2} = [d/(\lambda - \Delta\lambda_1)]$, $m_{m2} = 7$ и с его помощью находим $\Delta\lambda_2 = 44$ нм. Используя значение $\Delta\lambda_2$, находим значение $m_{m3} = [d/(\lambda - \Delta\lambda_2)]$. Подставив численные значения, получим $m_{m3} = 7$, т.е. значение максимального порядка дифракции не изменилось, а это значит, что найдено решение исходного уравнения и значение $\Delta\lambda = 44$ нм является максимальным значением интервала длин волн, при котором еще не происходит перекрытия соседних спектров во всех порядках дифракции.

Задачи для самостоятельного решения

1. К высокой опоре с двух сторон подвешены красные сигнальные лампы ($\lambda = 640$ нм), расстояние между лампами $d = 1,0$ м. Конструкцию рассматривают ночью в телескоп с расстояния $r = 40$ км. Определить минимальный диаметр объектива телескопа, при котором лампы будут еще видны раздельно.

Ответ: $D = \frac{1,22\lambda r}{d}$, $D = 3,1$ см.

2. Определить разрешающую силу дифракционной решетки, которая может разрешить две спектральные линии с длиной волны $\lambda_1 = 578,7$ нм и длиной волны $\lambda_2 = 579$ нм. Какой ширины должна быть эта решетка, чтобы она могла разрешить их в третьем порядке? Решетка имеет 100 штрихов на 1 мм.

Ответ: $R = \lambda / (\lambda_2 - \lambda_1)$, $R = 1930$; $L = \lambda d / (m(\lambda_2 - \lambda_1))$, $L = 6,5$ мм.

3. Плоский параллельный световой пучок шириной $a = 3,0$ мм падает нормально на дифракционную решетку шириной $L = 10$ мм с периодом $d = 2,0$ мкм. Определить, какую минимальную разность длин волн данная решетка сможет разрешить вблизи длины волны $\lambda = 500$ нм для данного светового пучка:

а) в первом порядке;

б) если этот же пучок будет падать под углом $\varphi = 30^\circ$ к нормали.

Ответ: а) $\delta\lambda = \lambda d / a$, $\delta\lambda = 0,33$ нм; б) $\delta\lambda = \lambda d \cos\varphi / a$, $\delta\lambda = 0,29$ нм.

4. При какой длине волны возможно раздельное наблюдение в микроскоп двух точек, находящихся на расстоянии $\Delta x = 0,004$ мм друг от друга, если диаметр оправы объектива $d = 2$ мм, а его фокусное расстояние $f = 10$ мм?

Ответ: а) $\lambda = \Delta x \cdot d / (0,61 f)$, б) $\lambda = 0,66$ мкм.

5. Ширина дифракционной решетки равна длине основания призмы. Разрешающая способность решетку в первом порядке и призмы для длин волн $\lambda = 532$ нм одинакова. Определить период решетки d , если показатель преломления материала призмы для длины волны $\lambda_1 = 486$ нм равен $n_1 = 1,5537$, а для длины волны $\lambda_2 = 546$ нм равен $n_2 = 1,5477$.

Ответ: $d = (\lambda_2 - \lambda_1) / (n_1 - n_2)$, $d = 10$ мкм.

6. Определить порядок спектра эталона Фабри – Перо для длины волны $\lambda = 532$ нм, если расстояние между пластинками $d = 1$ см. Угол падения считать малым.

Ответ: $m = d / \lambda$, $m = 18\,797$.

7. Найти разрешающую способность R телескопа с объективом диаметром $D = 2,0$ см для длины волны $\lambda = 550$ нм. При каком увеличении телескопа будет полностью использована его разрешающая способность? Диаметр d зрачка глаза принять равным $5,0$ мм.

Ответ: $R = D / (1,22\lambda)$, $R = 7,5 \cdot 10^4$; $\Gamma = D / d$, $\Gamma = 4$.

8. Во сколько раз повысится увеличение микроскопа для объектива с числовой апертурой $\sin u = 0,8$, если перейти от наблюдения в зеленом свете ($\lambda_1 = 550$ нм) к наблюдению в фиолетовом ($\lambda_2 = 400$ нм) и воспользоваться иммерсионным маслом ($n = 1,6$)? Найти минимально разрешаемое расстояние y микроскопом в этом случае.

Ответ: $\eta = n\lambda_1 / (\lambda_2)$, $\eta = 2,2$; $y = 0,19$ мкм.

9

ПОЛЯРИЗАЦИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН

В большинстве процессов взаимодействия световой волны и вещества основополагающую роль играет электрическая составляющая поля волны, причем для ряда веществ (анизотропных) показатель преломления зависит от направления колебаний вектора \vec{E} . Свет называется *поляризованным*, если колебания вектора напряженности \vec{E} (*светового вектора*) в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, подчиняются строгой математической зависимости.

Если световой вектор совершает колебания в указанной плоскости вдоль фиксированного направления, то такая волна называется *плоско* или *линейно поляризованной*. Примером линейно поляризованной волны является волна, испускаемая гармоническим осциллятором (см. гл. 1).

При сложении двух монохроматических линейно поляризованных волн одинаковой частоты, но разной ориентации векторов амплитуды волна остается линейно поляризованной только в случае совпадения начальных фаз. Если же фазы не совпадают, то за период направление результирующего вектора \vec{E} изменяется так, что конец этого вектора описывает эллипс. Такая поляризация называется *эллиптической*. При определенных условиях (векторы амплитуд волн ориентированы ортогонально, модули амплитуд одинаковы, а сдвиг фаз равен $\pi/2$) эллипс вырождается в окружность и наблюдается *круговая поляризация*.

Эллиптическая поляризация и круговая могут быть как *правой* (вектор \vec{E} вращается по ходу часовой стрелки, если смотреть навстречу распространяющейся волне), так и *левой* (при вращении в противоположную сторону).

В реальных источниках выходящее излучение формируется как результат суперпозиции волн от большого числа элементарных излучателей (атомов или молекул). В подавляющем большинстве случаев эти элементарные излучатели можно моделировать гармоническим осциллятором, т.е. они дают линейно поляризованное излучение. Однако вследствие хаотической ориентации элементарных излучателей и статистической природы излучения в выходящем излучении присутствуют линейно поляризованные компоненты всевозможных (в плоскости, ортогональной направлению распространения волны) ориентаций со случайным распределением фаз.

Если в данном случае попытаться воспользоваться принципом суперпозиции, то результирующий вектор \vec{E} выходящей волны будет изменяться хаотически как по направлению, так и по величине, причем на временных промежутках, значительно меньших периода волны. Такое излучение называют *неполяризованным* или *естественным*.

Однако при определенных условиях (например, в сильном электрическом поле) элементарные излучатели могут приобретать преимущественное направление, что приводит к преимущественной ориентации одних линейно поляризованных компонент по отношению к другим. Можно сказать, функция ориентационного распределения компонент приобретает вытянутую форму (из окружности превращается, как правило, в овал, но может иметь и более сложный вид). Такое излучение называется *частично поляризованным*. В этом случае интенсивность частично поляризованного света можно представить как сумму интенсивностей неполяризованной $I_{\text{неп}}$ и поляризованной $I_{\text{пол}}$ компонент.

Для характеристики частично поляризованного света вводят понятие *степени поляризации*

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I}, \quad (9.1)$$

где $I = I_{\text{неп}} + I_{\text{пол}}$ — полная интенсивность света.

При распространении в однородных изотропных средах поляризация излучения не изменяется.

Для получения поляризованного света и анализа вида поляризации используются поляризационные приборы различных классов. В большинстве случаев *поляризатором* называется прибор, который независимо от состояния поляризации излучения на входе дает на выходе линейно или плоско поляризованный свет.

Плоскостью поляризации (ПП) *идеального поляризатора* называется плоскость, которой должен быть параллелен электрический вектор световой волны, чтобы такая волна прошла через поляризатор без поглощения (изменения интенсивности).

При пропускании линейно поляризованного света через реальный поляризатор, даже если электрический вектор параллелен плоскости поляризации, интенсивность света на выходе из поляризатора будет меньше, чем интенсивность падающего света, из-за потерь энергии при отражении и поглощении. При дальнейшем рассмотрении (если потери энергии не оговорены) поляризатор считается идеальным.

Если электрический вектор не параллелен ПП поляризатора, то через поляризатор проходит лишь составляющая электрического вектора, параллельная этому направлению.

Пусть направление колебаний светового вектора падающего света составляет угол α с ПП поляризатора, E_0 — амплитуда этого вектора. После выхода из поляризатора амплитуда светового вектора $E = E_0 \cos \alpha$, а так как интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора, то согласно закону Малюса интенсивность прошедшего света

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (9.2)$$

С помощью поляризатора можно исследовать поляризацию света, и в этом случае он называется *анализатором*. При определении степени поляризации изменяют положение ПП анализатора, вращая его относительно направления распространения света, анализируя интенсивность прошедшего через анализатор излучения, и находят его максимальное I_m и минимальное I_{\min} значения. Степень поляризации света определяется соотношением

$$P = \frac{I_m - I_{\min}}{I_m + I_{\min}}. \quad (9.3)$$

Для линейно поляризованного излучения вследствие закона Малюса следует, что $P = 1$. В естественном свете результирующий вектор \vec{E} изменяется хаотически как по ориентации, так и по величине. При прохождении естественного света через поляризатор для различных волн угол α между направлением светового вектора \vec{E} и ПП поляризатора принимает различные значения. Для расчета интенсивности по формуле (9.2) используют среднее значение $\langle \cos^2 \alpha \rangle = 0,5$. Соответственно интенсивность естественного света, прошедшего поляризатор при любой ориентации последнего,

$$I = 0,5 I_{\text{ест}}. \quad (9.4)$$

Отсюда непосредственно получаем, что $P = 0$. Для частично поляризованного света $I_m > I_{\min}$, следовательно, $0 < P < 1$.

Пусть на границу двух прозрачных немагнитных диэлектриков плоская световая волна падает под углом θ_1 , отражается под этим же углом и преломляется под углом θ_2 . Электрический вектор падающей волны можно представить как $\vec{E}^u = \vec{E}_\parallel^u + \vec{E}_\perp^u$, где вектор \vec{E}_\parallel^u параллелен плоскости падения, а вектор \vec{E}_\perp^u перпендикулярен к плоскости падения. Аналогично можно представить электрические векторы отраженной и преломленной волн: $\vec{E}^{opr} = \vec{E}_\parallel^{opr} + \vec{E}_\perp^{opr}$, $\vec{E}^{np} = \vec{E}_\parallel^{np} + \vec{E}_\perp^{np}$. На рис. 9.1, а векторы, параллельные плоскости падения, показаны стрелками, а векторы, перпендикулярные к этой же плоскости, — точками, так как направлены на нас.

Из граничных условий для векторов электрического поля следуют соотношения для электрических компонент отраженной и преломленной волн:

$$E_\perp^{opr} = E_\perp^u \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad E_\perp^{np} = E_\perp^u \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (9.5)$$

$$E_\parallel^{opr} = E_\parallel^u \frac{2 \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad E_\parallel^{np} = E_\parallel^u \frac{2 \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (9.6)$$

Эти соотношения называют *формулами Френеля* (в честь французского ученого О.Ж. Френеля, получившего аналогичные формулы в 1823 г.).

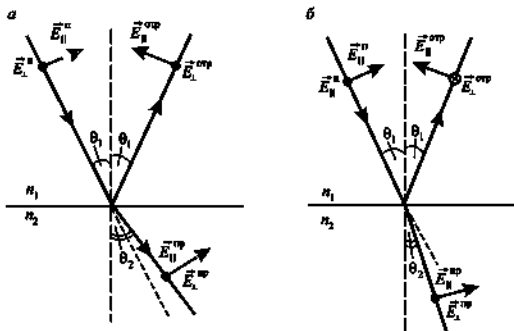


Рис. 9.1

Согласно закону преломления соотношение углов падения и преломления

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (9.7)$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_2, n_1 — абсолютные показатели преломления (относительно вакуума) второй и первой сред соответственно.

На рис. 9.1, а показано распространение световой волны из оптически более плотной среды в оптически менее плотную, т.е. $n_1 > n_2$. Соответственно согласно формуле (9.7) $\theta_1 < \theta_2$.

Рассмотрим распространение световой волны из оптически менее плотной среды в оптически более плотную. Согласно формуле (9.7) при $n_1 < n_2$ угол падения больше угла преломления, т.е. $\theta_1 > \theta_2$ (рис. 9.1, б). В этом случае в соотношении (9.5) для $E_{\perp}^{\text{отп}}$ выражение $\sin(\theta_2 - \theta_1) < 0$ и, следовательно, выражение для электрической компоненты отраженной волны, перпендикулярной к плоскости падения, становятся отрицательными. Это означает, что вектор $\vec{E}_{\perp}^{\text{отп}}$ противоположен вектору $\vec{E}_{\perp}^{\text{п}}$, т.е. направлен от нас перпендикулярно к плоскости, что показано на рис. 9.1, б крестиком.

Таким образом, при распространении волны из оптически менее плотной среды в оптически более плотную фаза вектора электрической компоненты отраженной волны, перпендикулярной к плоскости падения, отличается на π от фазы электрической компоненты падающей волны, перпендикулярной к плоскости падения. Изменение фазы волны на π соответствует потере половины длины волны. Следовательно, при отражении световой волны от оптически более плотной среды наблюдается потеря половины длины волны.

Формулы Френеля получены для плоской линейно поляризованной волны, а на основании принципа суперпозиции обобщаются для волны любой поляризации.

Анализ формул Френеля показывает, что в отраженной волне преобладают колебания электрического вектора, перпендикулярные к плоскости падения, а в преломленной — параллельные плоскости падения. Таким образом, при падении естественного света отраженная и преломленная волны являются частично поляризованными.

В случае $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ $\text{tg}(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \infty$ и $E_{\parallel}^{\text{отп}} = 0$, т.е. отраженный свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. При

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta_2 = \sin(\pi/2 - \theta_1) = \cos \theta_1$. Подставим последнее соотношение в формулу (9.7):

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1 = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.8)$$

Угол падения, определяемый из соотношения $\operatorname{tg} \theta_B = n_{21}$, называется *углом Брюстера* или *углом полной поляризации*. При падении света под этим углом отраженный свет полностью поляризован. При этом колебания светового вектора \vec{E} в отраженном свете происходят в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения.

Поскольку интенсивность определяется квадратом амплитуды светового вектора, для интенсивности света, отраженного от границы раздела двух диэлектриков, и интенсивности преломленного света, можно записать:

$$I_{\perp}^{\text{отр}} = I_{\perp}^{\text{п}} \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad I_{\parallel}^{\text{отр}} = I_{\parallel}^{\text{п}} \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (9.9)$$

$$I_{\parallel}^{\text{пр}} = I_{\parallel}^{\text{п}} \frac{4 \sin^2 \theta_2 \cdot \cos^2 \theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \quad I_{\perp}^{\text{пр}} = I_{\perp}^{\text{п}} \frac{4 \sin^2 \theta_2 \cdot \cos^2 \theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (9.10)$$

Если учесть закон преломления, то для интенсивности света, отраженного от границы раздела двух диэлектриков с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 , и для интенсивности преломленного света можно записать:

$$I_{\parallel}^{\text{отр}} = I_{\parallel}^{\text{п}} \left(\frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \right)^2, \quad I_{\perp}^{\text{отр}} = I_{\perp}^{\text{п}} \left(\frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1} \right)^2, \quad (9.11)$$

$$I_{\parallel}^{\text{пр}} = I_{\parallel}^{\text{п}} \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2)^2}, \quad I_{\perp}^{\text{пр}} = I_{\perp}^{\text{п}} \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1)^2}. \quad (9.12)$$

При распространении света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную, т.е. при $n_1 > n_2$, согласно формуле (9.8) $\sin \theta_1 < \sin \theta_2$ и $\theta_1 < \theta_2$. При увеличении угла падения угол преломления также возрастает, и при максимальном угле преломления $\theta_2 = 90^\circ$ преломленный луч направлен вдоль границы двух сред. Угол падения в этом случае называется *предельным углом полного внутреннего отражения*

($\theta_1 = \theta_0$), потому что при углах падения, больших этого ($\theta_1 > \theta_0$), наблюдается полное отражение света в первую среду, т.е. интенсивность преломленного света равна нулю. Соответственно предельный угол полного внутреннего отражения определяется соотношением

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (9.13)$$

Коэффициент отражения ρ показывает, какая часть энергии или интенсивности падающего света отражается от какой-то поверхности:

$$\rho = \frac{I_{\text{отр}}}{I_n}, \quad (9.14)$$

где $I_{\text{отр}}$ — интенсивность отраженного света; I_n — интенсивность падающего света.

Коэффициент потерь χ характеризует уменьшение энергии или интенсивности света при прохождении через оптическую систему и показывает, какая часть энергии или интенсивности падающего света потеряна в оптической системе:

$$\chi = \frac{I_x - I}{I_n} = \frac{I_{\text{пот}}}{I_n}, \quad (9.15)$$

где I — интенсивность света, прошедшего через вещество; $I_{\text{пот}}$ — интенсивность света, потерянного в веществе.

Если в условии задачи коэффициент потерь не задан, то при рассматриваемых условиях потерями энергии света можно пренебречь.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Определить, какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси Oz декартовой системы координат, если проекции вектора \vec{E} описываются следующими функциями:

- а) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \sin(\omega t - kz)$;
- б) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi/4)$;
- в) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi)$.

Решение. а) Разделим оба выражения на E , возведем в квадрат и сложим:

$$\frac{E_x^2}{E^2} + \frac{E_y^2}{E^2} = \cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz) = 1.$$

Данное уравнение соответствует уравнению окружности $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$, т.е. конец вектора \vec{E} описывает окружность в плоскости xOy и соответственно волна имеет круговую поляризацию. Полученный результат закономерен: ведь амплитуды компонент одинаковы, а в заданных функциях проекций фазы различаются на $\pi/2$.

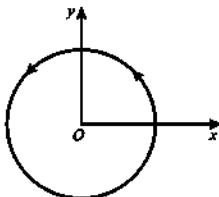


Рис. 9.2

Из заданных уравнений следует, что волна распространяется вдоль оси Oz . Если смотреть навстречу распространяющейся волне (против оси Oz , направленной на нас), то круговая поляризация является левой (рис. 9.2), поскольку если время увеличивается, то E_x убывает, а E_y возрастает.

б) Преобразуем выражение для E_x , введя для упрощения обозначение $(\omega t - kz) = \varphi$: $\frac{E_x}{E} = \cos \varphi$, умножим обе части на $\sin \pi/4$:

$$\frac{E_x}{E} \sin \pi/4 = \cos \varphi \cdot \sin \pi/4.$$

Преобразуем выражение для E_y :

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E} &= \cos(\varphi + \pi/4) = \cos \varphi \cdot \cos \pi/4 - \sin \varphi \cdot \sin \pi/4 = \\ &= \frac{E_x}{E} \cos \pi/4 - \sin \varphi \cdot \sin \pi/4. \end{aligned}$$

Отсюда $\frac{E_y}{E} - \frac{E_x}{E} \cos \pi/4 = -\sin \varphi \cdot \sin \pi/4$. Возведем полученные соотношения в квадрат и сложим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y}{E} - \frac{E_x}{E} \cos \pi/4 \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E} \sin \pi/4 \right)^2 &= \\ = \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \pi/4 + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \pi/4 &= \sin^2 \pi/4, \end{aligned}$$

$$\frac{E_y^2}{E^2} - \frac{2E_x E_y}{E^2} \cos \pi/4 + \frac{E_x^2}{E^2} (\cos^2 \pi/4 + \sin^2 \pi/4) = \sin^2 \pi/4.$$

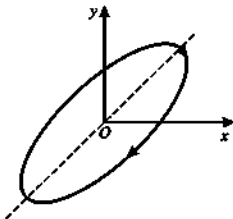


Рис. 9.3

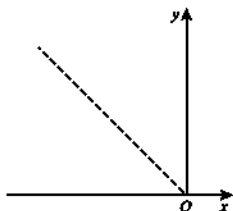


Рис. 9.4

Полученное уравнение $\frac{E_x^2}{E^2} - \frac{2E_x E_y}{E^2} \times \times \cos \alpha / 4 + \frac{E_y^2}{E^2} = \sin^2 \pi / 4$ соответствует уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$, большая ось которого совпадает с прямой $x = y$. Вектор \vec{E} вращается по ходу часовой стрелки, если смотреть навстречу распространяющейся волне (т.е. навстречу оси Oz , направленной на нас), и эллиптическая поляризация является правой (рис. 9.3).

в) Используем равенство $\cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$ и преобразуем выражение для E_y :

$$E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi) = -E \cos(\omega t - kz) = -E_x.$$

Такое уравнение соответствует уравнению прямой $y = -x$, т.е. в данном случае волна линейно поляризована (рис. 9.4).

Задача 9.2. На пути частично поляризованного света поместили поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\varphi = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение. Согласно формуле (9.1) степень поляризации частично поляризованного света

$$P = \frac{I_{\text{лин}}}{I} = \frac{I_{\text{лин}}}{I_{\text{лин}} + I_{\text{ест}}} = \frac{1}{1 + I_{\text{ест}}/I_{\text{лин}}},$$

где $I_{\text{лин}}$ — интенсивность линейно поляризованного света; $I_{\text{ест}}$ — интенсивность естественного света.

В положении максимального пропускания поляризатора направление светового вектора линейно поляризованного света совпадает с направ-

лением поляризации поляризатора. Следовательно, при максимальном пропускании линейно поляризованный свет проходит полностью, а интенсивность естественного света, согласно формуле (9.4), уменьшается в 2 раза: $I_m = I_{\text{лин}} + I_{\text{ест}} \cdot 0,5$.

После поворота поляризатора на заданный угол $I = I_{\text{лин}} \cos^2 \varphi + I_{\text{ест}} \cdot 0,5$.

По условию $I = \frac{I_m}{\eta}$, или $I_m = \eta I$, а $I_{\text{лин}} + I_{\text{ест}} \cdot 0,5 = \eta(I_{\text{лин}} \cos^2 \varphi + I_{\text{ест}} \cdot 0,5)$,

$$1 + \frac{I_{\text{ест}}}{I_{\text{лин}}} \cdot 0,5 = \eta \cos^2 \varphi + \eta \frac{I_{\text{ест}}}{I_{\text{лин}}} \cdot 0,50, \quad \frac{I_{\text{ест}}}{I_{\text{лин}}} = \frac{(1 - \eta \cos^2 \varphi)}{0,5(\eta - 1)} = 0,25,$$

$$P = \frac{1}{1 + I_{\text{ест}}/I_{\text{лин}}}, \quad P = \frac{1}{1 + 0,25} = 0,80.$$

Задача 9.3. Плоскополяризованная волна проходит через поляризатор и анализатор, угол между плоскостями поляризации которых $\alpha_1 = 30^\circ$, причем направление колебаний вектора \vec{E} падающего света лежит в плоскости поляризации поляризатора. Во сколько раз изменится интенсивность света, прошедшего через эту систему, если, повернув анализатор, увеличить угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора до $\alpha_2 = 45^\circ$? Отражением и поглощением света пренебречь.

Решение. По условию колебания светового вектора падающего света параллельны плоскости пропускания поляризатора, поэтому изменения в интенсивности прошедшего света вызваны только поворотом анализатора. Следовательно, направление колебаний вектора \vec{E} составляет угол α_1 с главной плоскостью анализатора. Пусть интенсивность этого света, прошедшего через поляризатор, равна I_0 . Тогда согласно закону Малюса (9.2) интенсивность света, прошедшего через систему, в первом случае $I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1$, а во втором случае $I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2$. Отношение интенсивностей:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} = \frac{\cos^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

т.е. интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\frac{I_1}{I_2} = 1,5$ раза.

Задача 9.4. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два одинаковых поляризатора,

между плоскостями поляризации которых угол $\alpha = 60^\circ$, если для каждого из поляризаторов коэффициенты отражения и потерь равны соответственно $\rho = 5\%$ и $\chi = 5\%$ как для естественного, так и для линейно поляризованного падающего на них света,

Решение. Пусть интенсивность света, падающего на первый поляризатор, равна I_0 . Согласно условию коэффициент отражения света $\rho = 5\%$, тогда из формулы (9.14) интенсивность отраженного света $I_{\text{отр}} = \rho I_0$, а в первый поляризатор проходит свет интенсивностью $I_1 = I_0 - I_{\text{отр}} = I_0 - \rho I_0 = I_0(1 - \rho)$. Поскольку свет естественный, то на выходе из поляризатора, согласно формуле (9.4), интенсивность света была бы $0,5I_1$, но так как дан коэффициент потерь, то согласно формуле (9.15) потерянная интенсивность света в поляризаторе $I_{\text{пот}} = \chi \cdot 0,5I_1$. Тогда с учетом потерь интенсивность на выходе из первого поляризатора

$$I_2 = 0,5I_1 - \chi \cdot 0,5I_1 = 0,5I_1(1 - \chi) = 0,5I_0(1 - \rho)(1 - \chi).$$

Аналогично свет отражается от второго поляризатора, и интенсивность проходящего в него света $I_3 = I_2(1 - \rho)$, а света, выходящего из второго поляризатора, $I_4 = I_3(1 - \chi)\cos^2 \alpha = 0,5I_0(1 - \rho)^2(1 - \chi)^2 \cos^2 \alpha$. Отношение интенсивности падающего на систему света к интенсивности прошедшего

$$\frac{I_0}{I_4} = \frac{1}{0,5(1 - \rho)^2(1 - \chi)^2 \cos^2 \alpha},$$

т.е. интенсивность света после прохождения двух поляризаторов уменьшилась в

$$\frac{I_0}{I_4} = \frac{2}{(0,95)^4 \cdot 0,25} = 9,82 \approx 10 \text{ раз.}$$

Задача 9.5. На боковую грань призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,73$, падает под углом Брюстера монохроматический свет, плоскость колебаний вектора \vec{E} которого лежит в плоскости падения. При каком преломляющем угле призмы α свет пройдет через нее, не испытав потерь на отражение? Поглощением света пренебречь.

Решение. По условию плоскость колебаний вектора \vec{E} лежит в плоскости падения, следовательно, $E_{\perp}^{\text{отр}} = 0$. Согласно формуле (9.5) в этом случае составляющая светового вектора в отраженной волне $E_{\perp}^{\text{отр}} = 0$, т.е. свет линейно поляризован.

При падении волны под углом Брюстера $\text{tg}(\theta_B + \theta_2) \rightarrow \infty$, поэтому вторая составляющая светового вектора в отраженной волне

$$E_{\parallel}^{\text{отр}} = E_{\parallel}^{\text{пад}} \frac{\text{tg}(\theta_B - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_B + \theta_2)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, в данном случае при падении света на первую грань призмы не возникает отраженной волны, т.е. на первой грани призмы нет потерь энергии на отражение, свет проходит внутрь призмы без потери интенсивности.

Рассмотрим треугольник ABD , образованный проходящим в призме лучом и двумя перпендикулярами к граням призмы (рис. 9.5). Внешний угол α треугольника при вершине D равен преломляющему углу призмы как два угла со взаимно перпендикулярными сторонами. В то же время внешний угол треугольника равен $\theta_2 + \theta'_1$. Следовательно, преломляющий угол призмы $\alpha = \theta_2 + \theta'_1$.

Найдем угол преломления θ_2 на первой грани, используя закон преломления $\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_2} = n$ и соотношение (9.8):

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_B}{n}, \quad \text{tg} \theta_B = \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = n, \quad \cos \theta_B = \frac{\sin \theta_B}{n}.$$

Используем тригонометрическое тождество $\sin^2 \theta_B + \cos^2 \theta_B = 1$, подставим $\cos \theta_B$ и получим $\sin^2 \theta_B + \frac{\sin^2 \theta_B}{n^2} = 1$. Отсюда $\sin \theta_B = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$. Тогда

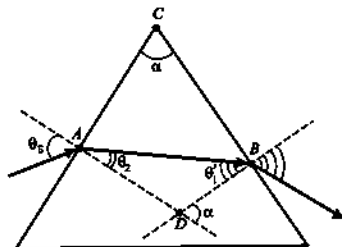


Рис. 9.5

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_B}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(1,73)^2 + 1}} = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = 30^\circ.$$

По условию $E_1^n = 0$, тогда согласно формуле (9.6) $E_1^{np} = 0$, т.е. преломленный луч также поляризован в плоскости падения. Для того чтобы свет не отражался при падении на внутреннюю поверхность призмы, угол падения на внутреннюю поверхность должен быть равен

углу Брюстера и $\operatorname{tg} \theta_1' = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,73} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta_1' = 30^\circ$. Следовательно, $\alpha = \theta_2 + \theta_1' = 60^\circ$.

Задача 9.6. На поверхность воды ($n = 1,33$) падает под углом Брюстера плоско поляризованная световая волна. Плоскость колебаний светового вектора составляет с плоскостью падения угол $\varphi = 45,0^\circ$. Найти коэффициент отражения.

Решение. При падении под углом Брюстера отраженный свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. Тогда из формул Френеля (9.9) интенсивность компонент отраженного света

$$I_{\parallel}^{op} = 0, \quad I_{\perp}^{op} = I_1^n \frac{\sin^2(\theta_B - \theta_2)}{\sin^2(\theta_B + \theta_2)}.$$

Пусть интенсивность падающего света I_0 , тогда $I_1^n = I_0 \cos^2 \varphi$. Выполним преобразование:

$$\left(\frac{\sin(\theta_B - \theta_2)}{\sin(\theta_B + \theta_2)} \right)^2 = \left(\frac{\sin \theta_B \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_B \cdot \sin \theta_2}{\sin \theta_B \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_B \cdot \sin \theta_2} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_B \cdot \operatorname{ctg} \theta_2 - 1}{\operatorname{tg} \theta_B \cdot \operatorname{ctg} \theta_2 + 1} \right)^2.$$

При падении под углом Брюстера (см. задачу 9.5)

$$\sin \theta_B = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \operatorname{tg} \theta_B = n.$$

Значит,

$$\operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\sin \theta_2} = n.$$

Тогда

$$I_{\perp}^{op} = I_1^n \frac{\sin^2(\theta_B - \theta_2)}{\sin^2(\theta_B + \theta_2)} = I_0 \cos^2 \varphi \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

Согласно соотношению (9.14) коэффициент отражения

$$\rho = \frac{I_{\perp}^{\text{отр}}}{I_0} = \cos^2 \varphi \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 \approx 0,039.$$

Задача 9.7. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на поверхность плоскопараллельной прозрачной пластины, расположенной в воздухе. При этом от верхней поверхности пластины пучок света отражается с коэффициентом отражения $\rho = 0,08$. Найти степень поляризации волн пучков 1 и 3, отраженных от верхней и нижней граней пластины, и степень поляризации преломленных пучков 2 и 4 (рис. 9.6).

Решение. Зададим необходимые величины. Пусть интенсивность падающей волны I_0 , угол падения равен θ_B . По закону отражения угол отражения пучка 1 также равен θ_B . Пусть угол преломления пучка 2 равен θ_2 , тогда угол отражения пучка 3 также равен θ_2 .

Поскольку по условию пластина плоскопараллельная, то пучок 4 выходит из нее под углом θ_B .

Определим степень поляризации волн пучка 1. По условию угол падения равен углу Брюстера. Тогда $\theta_B + \theta_2 = 90^\circ$, $\text{tg}(\theta_B + \theta_2) \rightarrow \infty$ и согласно формулам (9.9) $I_{\parallel}^{\text{отр}} = 0$ и $I_{\perp}^{\text{отр}} = I_0 \sin^2(\theta_B - \theta_2)$, т.е. отраженный пучок 1 линейно поляризован. Используем формулу (9.3) и получим:

$$P_1 = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\perp}^{\text{отр}} - I_{\parallel}^{\text{отр}}}{I_{\perp}^{\text{отр}} + I_{\parallel}^{\text{отр}}} = \frac{I_{\perp}^{\text{отр}} - 0}{I_{\perp}^{\text{отр}} + 0}, \quad P_1 = 1.$$

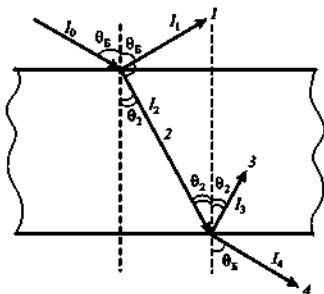


Рис. 9.6

Теперь определим степень поляризации волн пучка 2. Как уже отмечалось, формулы (9.6) показывают, что в преломленном пучке $E_{\parallel}^{np} > E_{\perp}^{np}$, т.е. преобладают колебания, параллельные плоскости падения. Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то согласно соотношению (9.10) в преломленном пучке $I_{\parallel}^{np} > I_{\perp}^{np}$ и степень поляризации

$$P_l = \frac{I_{\parallel} - I_{\min}}{I_{\parallel} + I_{\min}} = \frac{I_{\parallel}^{np} - I_{\perp}^{np}}{I_{\parallel}^{np} + I_{\perp}^{np}}.$$

Используя уравнение $\frac{I_{\parallel}^{np}}{I_{\perp}^{np}} = \frac{(E_{\parallel}^{np})^2}{(E_{\perp}^{np})^2}$, условие $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ и формулы (9.6), получаем:

$$\frac{I_{\parallel}^{np}}{I_{\perp}^{np}} = \frac{(E_{\parallel}^{np})^2}{(E_{\perp}^{np})^2} = \frac{(E_{\parallel}^n)^2}{(E_{\perp}^n)^2 \cos^2(\theta_2 - (90^\circ - \theta_1))} = \frac{(E_{\parallel}^n)^2}{(E_{\perp}^n)^2 \cos^2(2\theta_2 - 90^\circ)}.$$

Для определения отношения $\frac{(E_{\parallel}^n)^2}{(E_{\perp}^n)^2}$ учтем, что для естественного света каждый из векторов \vec{E}_0 , амплитуды можно разложить на два составляющих вектора: параллельного плоскости падения ($\vec{E}_{0,\parallel}$) и перпендикулярного к плоскости падения ($\vec{E}_{0,\perp} = \vec{E}_{0,\parallel} + \vec{E}_{0,\perp}$). Из-за хаотичности направлений колебаний этих векторов средние значения суммарных амплитуд будут равны: $\langle E_{\perp}^n \rangle = \langle E_{\parallel}^n \rangle$, поэтому $\frac{(E_{\parallel}^n)^2}{(E_{\perp}^n)^2} = 1$, а соответствующие интенсивности равны $I_{\parallel}^n = I_{\perp}^n = \frac{I_0}{2}$. Тогда

$$\frac{I_{\parallel}^{np}}{I_{\perp}^{np}} = \frac{1}{\cos^2(2\theta_2 - 90^\circ)} = \frac{1}{\sin^2 2\theta_2}$$

и необходимо найти $\sin^2 2\theta_2$. Используем, что интенсивность отраженного света $I_{\parallel}^{op} = 0$ и $I_{\perp} = I_{\perp}^{op} = \rho I_0$.

А также согласно соотношениям (9.9) для падения света под углом Брюстера

$$\begin{aligned}
 I_1^{\text{отп}} &= I_1^n \frac{\sin^2(\theta_B - \theta_2)}{\sin^2 90^\circ} = I_1^n \sin^2(\theta_B - (90^\circ - \theta_B)) = \\
 &= I_1^n \sin^2(2\theta_B - 90^\circ) = I_1^n \cos^2 2\theta_B.
 \end{aligned}$$

Тогда $\rho I_0 = \frac{I_0}{2} \cos^2 2\theta_B$, $\cos^2 2\theta_B = 2\rho$, $\sin^2 2\theta_B = 1 - \cos^2 2\theta_B = 1 - 2\rho$,

$$\frac{I_{\parallel}^{\text{отп}}}{I_1^{\text{отп}}} = \frac{1}{1-2\rho}, \text{ степень поляризации}$$

$$P_2 = \frac{I_{\parallel}^{\text{отп}} - I_{\perp}^{\text{отп}}}{I_{\parallel}^{\text{отп}} + I_{\perp}^{\text{отп}}} = \frac{I_1^{\text{отп}} - I_1^{\text{отп}}(1-2\rho)}{I_1^{\text{отп}} + I_1^{\text{отп}}(1-2\rho)} = \frac{2\rho}{2-2\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad P_2 = 0,087.$$

Найдем степень поляризации волн пучка 3, т.е. пучка, отраженного от второй поверхности пластины. Запишем соотношения (9.9) с учетом того, что в данном случае угол падения равен θ_2 , угол преломления равен θ_B , $\theta_B + \theta_2 = 90^\circ$. Соответственно $\text{tg}^2(\theta_B + \theta_2) = \text{tg}^2 90^\circ \rightarrow \infty$ и компоненты интенсивности при отражении от второй поверхности $I_{\parallel}^{\text{отп}} = 0$,

$I_1^{\text{отп}} = I_1^n \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_B)}{\sin^2 90^\circ}$. Таким образом, пучок 3 поляризован перпендикулярно к плоскости падения, и тогда, как и для пучка 1, степень его поляризации $P_3 = 1$.

Для расчета степени поляризации волн пучка 4, вышедшего из пластины, запишем формулы (9.6) с учетом того, что падающим пучком для данного случая является преломленный пучок 2:

$$E_{\parallel}^{\text{выш}} = E_1^{\text{отп}} \frac{2\sin\theta_B \cdot \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_B)\cos(\theta_2 - \theta_B)}, \quad E_{\perp}^{\text{выш}} = E_1^{\text{отп}} \frac{2\sin\theta_B \cdot \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_B)}.$$

Найдем, как и для пучка 2, отношение

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{\parallel}^{\text{выш}}}{I_{\perp}^{\text{выш}}} &= \frac{(E_{\parallel}^{\text{выш}})^2}{(E_{\perp}^{\text{выш}})^2} = \frac{(E_1^{\text{отп}})^2}{(E_1^{\text{отп}})^2 \cos^2((90^\circ - \theta_B) - \theta_B)} = \\
 &= \frac{(E_1^{\text{отп}})^2}{(E_1^{\text{отп}})^2 \cos^2(90^\circ - 2\theta_B)} = \frac{(E_1^{\text{отп}})^2}{(E_1^{\text{отп}})^2 \sin^2 2\theta_B}.
 \end{aligned}$$

Используем полученные ранее соотношения $\sin^2 2\theta_B = 1 - 2\rho$ и

$$\frac{(E_{\parallel}^{\text{отп}})^2}{(E_{\perp}^{\text{отп}})^2} = \frac{I_1^{\text{отп}}}{I_1^{\text{отп}}} = \frac{1}{1-2\rho}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{I_{\parallel}^{\text{выш}}}{I_{\perp}^{\text{выш}}} = \frac{(E_{\parallel}^{\text{пр}})^2}{(E_{\perp}^{\text{пр}})^2 \sin^2 2\theta_B} = \frac{1}{(1-2\rho)^2}.$$

Степень поляризации волн пучка 4

$$P_4 = \frac{I_{\parallel}^{\text{выш}} - I_{\perp}^{\text{выш}}}{I_{\parallel}^{\text{выш}} + I_{\perp}^{\text{выш}}} = \frac{I_{\parallel}^{\text{выш}} - I_{\perp}^{\text{выш}}(1-2\rho)^2}{I_{\parallel}^{\text{выш}} + I_{\perp}^{\text{выш}}(1-2\rho)^2} = \frac{1 - (1-2\rho)^2}{1 + (1-2\rho)^2} = \frac{2\rho(1-\rho)}{1-2\rho(1-\rho)},$$

$$P_4 = 0,173.$$

Различия в степени поляризации пучков 2–4 обусловлены различным изменением интенсивностей параллельной и перпендикулярной плоскостей падения компонент светового излучения в рассмотренных случаях.

Задача 9.8. В стеклянный сосуд, расположенный на горизонтальной опоре, налиты две несмешивающиеся жидкости. При падении светового луча из воздуха ($n_0 \approx 1,0$) на поверхность верхней жидкости он преломляется, а затем отражается от поверхности нижней жидкости. Определить:

- показатель преломления верхней жидкости, если отраженный от нижней жидкости свет линейно поляризован при угле отражения $\theta_2 = 42,0^\circ$, а показатель преломления нижней жидкости $n_2 = 1,33$;
- угол падения света на поверхность верхней жидкости в этом случае;
- угол падения света на поверхность раздела жидкостей, при котором будет наблюдаться полное отражения света;
- угол, при котором в этом случае свет падает на поверхность верхней жидкости.

Решение. а) Определяем показатель преломления верхней жидкости. Если отраженный от поверхности второй жидкости свет плоскополяризован, то угол падения равен углу Брюстера и по законам отражения равен углу отражения ($\theta_B = \theta_2$). Согласно соотношениям (9.8) $\text{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$ и показатель преломления верхней жидкости $n_1 = \frac{n_2}{\text{tg} \theta_B}$,

$$n_1 = \frac{1,33}{\text{tg} 42^\circ} \approx 1,48.$$

б) Определяем угол падения света на поверхность верхней жидкости. Если сосуд расположен на горизонтальной опоре, то поверхности жидкостей также горизонтальны и угол падения на поверхность нижней жидкости равен углу преломления при падении на поверхность верхней жидкости. Тогда по закону преломления $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_B} = \frac{n_1}{n_2}$, где θ_1 – угол паде-

ния луча из воздуха на поверхность верхней жидкости. Поскольку $n_1 \approx 1,0$, то $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \cdot n_1$, $\theta_1 = \arcsin(\sin \theta_2 \cdot n_1)$, $\theta_1 = \arcsin(\sin 42,0^\circ \cdot 1,48) \approx 82,0^\circ$.

в) Определяем угол падения света на поверхность раздела жидкостей, при котором будет наблюдаться полное отражение света. Согласно соотношению (9.13) предельный угол полного внутреннего отражения

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad \sin \theta_0 = \frac{1,33}{1,48} \approx 0,8986 \quad \text{и} \quad \theta_0 \approx 64,0^\circ. \quad \text{Следовательно, полное}$$

отражение на поверхности раздела жидкостей будет наблюдаться при углах падения света из верхней жидкости $\theta_2 > 64,0^\circ$.

г) Определяем угол, при котором свет падает на поверхность верхней жидкости. Угол $\theta_2 > 64^\circ$ не может быть равен углу преломления при падении света на поверхность верхней жидкости, так как в этом случае для угла падения на поверхность верхней жидкости $\sin \theta_1' > \sin 64^\circ \cdot 1,48 > > 1,33$, что невозможно. Но луч света можно направить через боковую стенку стеклянного сосуда так, что он будет падать на поверхность верхней жидкости со стороны нижней жидкости под углом $\theta_2 > 64^\circ$. Этот угол больше предельного угла полного внутреннего отражения на границе верхней жидкости с воздухом. Тогда $\sin \theta_0' = \frac{1,0}{1,48} \approx 0,6757$, $\theta_0' \approx 43^\circ$.

При таком ходе луча свет будет полностью отражаться от поверхности раздела верхней жидкости с воздухом, а затем полностью отражаться от поверхности раздела верхней и нижней жидкостей. Такое явление используется в световодах, специально изготовленных волокнах, в которых свет распространяется, поочередно отражаясь от стенок волокна.

Задача 9.9. Луч естественного света падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность стекла. Показатели преломления воздуха и стекла равны соответственно $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,5$.

а) Получить формулу для коэффициента отражения и найти, сколько процентов составляет интенсивность отраженного света от интенсивности падающего.

б) Рассчитать степень поляризации преломленного света.

Решение. а) Согласно соотношению (9.14) коэффициент отражения $\rho = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{п}}}$. При падении под углом Брюстера отраженный свет линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, поэтому $I_{\parallel}^{\text{отр}} = 0$ и $I_{\text{отр}} = I_{\perp}^{\text{отр}}$. Воспользуемся вторым соотношением (9.11) и преобразуем его с учетом условия задачи.

Пусть интенсивность естественного света I_0 . Для естественного света угол α между направлением вектора \vec{E} и каким-либо другим направ-

ленем принимает различные значения. Для расчета интенсивности используют среднее значение $\langle \cos^2 \alpha \rangle = 0,5$, поэтому интенсивность естественного падающего света можно представить следующим образом: $I_0 = I_{\parallel}^n + I_{\perp}^n$, где $I_{\parallel}^n = I_{\perp}^n = 0,5I_0$.

При падении под углом Брюстера $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ и $\cos \theta_2 = \sin \theta_1$. Тогда

$$I_{\perp}^{op} = I_{\perp}^n \left(\frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1} \right)^2 = \frac{I_0}{2} \left(\frac{n_2 \sin \theta_1 - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \sin \theta_1 + n_1 \cos \theta_1} \right)^2.$$

Разделим последнее выражение на $\sin \theta_1$ и учтем соотношение (9.8):

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad I_{\perp}^{op} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{n_2 \sin \theta_1 - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \sin \theta_1 + n_1 \cos \theta_1} \right)^2 = \frac{I_0}{2} \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \right)^2.$$

Тогда коэффициент отражения

$$\rho = \frac{I_{\perp}^{op}}{I_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \right)^2, \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{2,25 - 1}{2,25 + 1} \right)^2 \approx 0,074.$$

Соответственно интенсивность отраженного света $I_{отр} = \rho I_0$ составляет 7,4% от интенсивности падающего света.

б) Согласно соотношениям (9.10) в преломленном пучке $I_{\parallel}^{op} > I_{\perp}^{op}$ и степень поляризации

$$p = \frac{I_{\parallel} - I_{\min}}{I_{\parallel} + I_{\min}} = \frac{I_{\parallel}^{op} - I_{\perp}^{op}}{I_{\parallel}^{op} + I_{\perp}^{op}}.$$

Используем формулы (9.12). Интенсивность преломленного света, поляризованного параллельно плоскости падения,

$$I_{\parallel}^{op} = I_{\parallel}^n \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2)^2} = \frac{I_0}{2} \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \sin \theta_1)^2}.$$

Разделим последнее выражение на $\cos^2 \theta_1$ и учтем соотношение (9.8):

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

$$I_{\parallel}^{np} = \frac{I_0}{2} \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \sin \theta_1)^2} = \frac{I_0 2n_1^2}{(n_2 + n_1 \operatorname{tg} \theta_1)^2} = \frac{I_0 2n_1^2}{4n_2^2} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2.$$

Интенсивность преломленного света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения,

$$\begin{aligned} I_{\perp}^{no} &= I_{\perp}^n \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1)^2} = \frac{I_0}{2} \frac{4n_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1}{(n_2 \sin \theta_1 + n_1 \cos \theta_1)^2} = \\ &= \frac{I_0}{2} \frac{4n_1^2}{(n_2 \operatorname{tg} \theta_1 + n_1)^2} = \frac{I_0}{2} \frac{4n_1^4}{(n_2^2 + n_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Для упрощения расчетов степени поляризации подставим значения показателей преломления:

$$I_{\parallel}^{np} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{1,0}{1,5} \right)^2 \approx \frac{I_0}{2} \cdot 0,444, \quad I_{\perp}^{no} = \frac{I_0}{2} \frac{4(1,0)^4}{(2,25 + 1,0)^2} \approx \frac{I_0}{2} \cdot 0,379.$$

Степень поляризации преломленного света

$$P = \frac{I_{\parallel}^{np} - I_{\perp}^{no}}{I_{\parallel}^{np} + I_{\perp}^{no}}, \quad P = \frac{0,444 - 0,379}{0,444 + 0,379} \approx 0,08.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В частично поляризованном свете интенсивность поляризованного света равна интенсивности естественного света. Найти степень поляризации P частично поляризованного света.

Ответ: $P = 0,5$.

2. При анализе частично поляризованного света установлено, что степень поляризации $P = 0,75$. Во сколько раз максимальная интенсивность света I_m , прошедшего через анализатор, отличается от минимальной (I_{min})?

Ответ: $I_m / I_{min} = 7$.

3. При анализе частично поляризованного света минимальная интенсивность света, прошедшего через анализатор, в 9 раз меньше максимальной. Найти степень поляризации P частично поляризованного света.

Ответ: $P = 0,8$.

4. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Сколько процентов составляет интенсивность поляризованной компоненты I_n от интенсивности естественной компоненты $I_{\text{ест}}$?

Ответ: $I_n = 33\% I_{\text{ест}}$.

5. На поляризатор падает свет, состоящий из комбинации некогерентных линейно поляризованной волны и волны, поляризованной по кругу. При некотором положении поляризатора регистрируется максимальная интенсивность проходящего света, а при повороте поляризатора из этого положения на угол $\alpha = 60^\circ$ интенсивность проходящего света уменьшается на $\beta = 50\%$. Найти отношение интенсивности света I_x , поляризованного по кругу, к интенсивности линейно поляризованного света I_n .

Ответ: $I_x/I_n = 1$.

6. При прохождении естественного света через поляризатор и анализатор интенсивность света уменьшилась в 8 раз. Найти угол α между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, если отражением и потерями энергии света при прохождении света через эту систему можно пренебречь.

Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

7. При пропускании естественного света через поляризатор интенсивность света на выходе из поляризатора составляет $\eta_1 = 30\%$ интенсивности падающего света. Если этот свет пропустить через два таких поляризатора, то интенсивность прошедшего света будет составлять $\eta_2 = 13,5\%$ начальной интенсивности. Найти угол α между плоскостями пропускания поляризаторов (отражением и потерями энергии света можно пренебречь).

Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

8. Естественный свет пропускают через поляризатор и анализатор, угол между плоскостями поляризации которых $\alpha = 60^\circ$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы, если для поляризатора и анализатора коэффициенты отражения ρ и потерь χ по величине равны: $\rho = \chi = 0,1$.

Ответ: $I_0/I \approx 12$.

9. Луч естественного света падает из воздуха на поверхность стекла. Угол α между падающим и отраженным лучами 116° . Определить показатель преломления n стекла, если отраженный свет максимально поляризован.

Ответ: $n = 1,6$.

10. Определить угловую высоту (угол α между солнечными лучами и горизонтально) Солнца над горизонтом, если свет, отраженный от по-

верхности озера (в безветренную погоду), является плоскополяризованным. Показатель преломления воды $n = 1,333$.

Ответ: $\alpha \approx 36^\circ 52'$.

11. Стеклянная пластинка соприкасается нижней гранью с жидкостью. Показатель преломления стекла $n_1 = 1,55$, предельный угол полного отражения на границе стекло — жидкость $\theta_0 = 71,0^\circ$. Найти показатель преломления n жидкости.

Ответ: $n = 1,47$.

12. В вертикальный широкий стеклянный сосуд с плоскопараллельным дном налита вода. Показатели преломления стекла, воды и воздуха соответственно равны $n_1 = 1,58$, $n_2 = 1,33$ и $n_3 = 1,0$. Определить, существует ли такой угол падения светового луча θ_1 из воздуха на поверхность воды, при котором луч не выйдет в воздух:

- а) из дна сосуда;
- б) из боковой стенки сосуда.

Ответ: а) $\theta_1 = 90^\circ$, что в сосуде вряд ли возможно; б) $\theta_1 \approx 61^\circ$.

13. Луч света падает из воздуха на поверхность стекла, отражается и преломляется. Показатель преломления воздуха $n_a = 1,0$. Найти показатель преломления n стекла, если отраженный луч полностью поляризован при угле преломления в стекле $\theta = 30^\circ$.

Ответ: $n = 1,7$.

14. Угол полного внутреннего отражения на границе стекло — воздух $\theta_0 = 40,5^\circ$. Показатель преломления воздуха $n_a = 1,0$. Найти угол θ_B полной поляризации для этого стекла в воздухе.

Ответ: $\theta_B = 57^\circ$.

15. Луч света падает из воздуха ($n_a = 1,0$) на поверхность жидкости, налитой в стеклянный сосуд, преломляется и отражается от дна. Показатель преломления стекла $n_1 = 1,5$. Найти:

- а) показатель преломления n жидкости, если отраженный луч полностью поляризован при угле отражения от дна $\theta = 43^\circ$;
- б) угол отражения луча от дна θ' в этом сосуде, при котором будет наблюдаться полное внутреннее отражение.

Ответ: а) $n = 1,6$; б) $\theta' \approx 70^\circ$.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

Оптически анизотропной называется среда, в которой скорость распространения световых волн зависит от направления распространения и состояния их поляризации. Анизотропная среда характеризуется определенным порядком расположения частиц и (или) анизотропией самих частиц. К анизотропным средам относятся, например, различные прозрачные кристаллы.

Оптической осью кристалла называется направление в кристалле, скорость распространения световой волны вдоль которого не зависит от направления колебаний светового вектора \vec{E} . Оптическая ось — не фиксированная прямая в кристалле, а направление, т.е. любая прямая, параллельная оптической оси, также является оптической осью. Кристалл с одной оптической осью называется *одноосным*, а с двумя оптическими осями — *двухосным* (в пособии не рассматриваются задачи для таких кристаллов).

Главной плоскостью называется плоскость, проходящая через оптическую ось и направление распространения падающей световой волны. Для каждого направления распространения волны существует своя главная плоскость.

Явление *двойного лучепреломления* заключается в том, что при падении световой волны, например на одноосный кристалл исландского шпата, при распространении света в кристалле возникают две волны, в общем случае распространяющиеся в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление может наблюдаться даже в случае нулевого угла падения.

Волна, распространяющаяся в одноосном кристалле вдоль направления падающей волны при угле падения, равном нулю, называется *обыкновенной волной*, а направление, вдоль которого она распространяется, — *обыкновенным лучом*. Вторая преломленная

волна называется *необыкновенной волной*, а направление, вдоль которого она распространяется, — *необыкновенным лучом*.

Различия обыкновенной и необыкновенной волн:

1) при заданном направлении распространения падающей волны направление распространения обыкновенной волны в кристалле определяется по законам преломления, а для определения направления распространения необыкновенной волны в общем случае эти законы неприменимы. Как правило, необыкновенный луч не лежит в плоскости падения;

2) обыкновенная волна поляризована перпендикулярно к главной плоскости кристалла, а плоскость поляризации необыкновенной волны параллельна главной плоскости;

3) обыкновенная и необыкновенная волны распространяются в одном направлении и с одинаковой скоростью только вдоль направления оптической оси. Фазовая скорость, а следовательно, и показатель преломления обыкновенной волны не зависят от направления распространения ее в кристалле. Скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от направления распространения волны в кристалле.

С точки зрения принципа Гюйгенса при двойном лучепреломлении каждая точка фронта волны, достигшая грани кристалла, становится источником двух волн — обыкновенной и необыкновенной.

Скорость распространения обыкновенной волны V_o по всем направлениям одинакова, поэтому точка на грани кристалла, которой достиг фронт падающей волны, становится источником сферической обыкновенной волны.

Скорость необыкновенной волны V_e в направлении оптической оси совпадает со скоростью обыкновенной волны, а по другим направлениям отличается, поэтому в общем случае фронт необыкновенной волны от точки кристалла, которой достиг фронт падающей волны, не является сферической поверхностью, а образует эллипсоид вращения.

На рис. 10.1 дано построение Пойгенса для одноосного кристалла при падении световой волны перпендикулярно к его грани. Прямая OO' показывает направление оптической оси кристалла, главная плоскость кристалла совпадает с плоскостью рисунка. В момент падения плоский фронт падающей волны совпадает с гранью кристалла, а точки A и A_1 становятся источниками вторичных волн. Так как скорость обыкновенной волны одинакова по всем направлениям, то на рис. 10.1 показано сферическое сечение обыкновенных волн, распространяющихся из этих точек.

Для необыкновенных волн скорость распространения зависит от направления, только вдоль оптической оси скорость такая же, как для

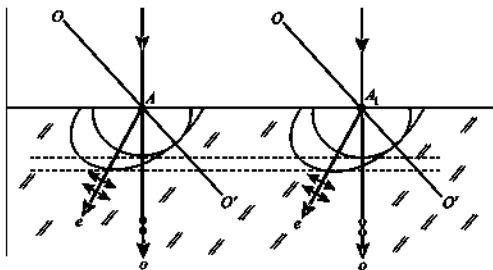


Рис. 10.1

обыкновенной волны. На рис. 10.1 показано несферическое сечение необыкновенных волн, распространяющихся из точек A и A_1 , в случае, когда скорость $V_e > V_o$ в направлении левее направления распространения падающей волны.

Штриховыми линиями для какого-то момента распространения света в кристалле показаны положения фронта обыкновенной и необыкновенной волн, а также направления их распространения: обыкновенный (o) и необыкновенный (e) лучи.

Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно к главной плоскости, т.е. в данном случае перпендикулярно к плоскости рисунка, поэтому колебания светового вектора волны o показаны точками на луче o . Необыкновенная волна поляризована в главной плоскости, и направление, вдоль которого происходят колебания светового вектора волны e , показано стрелками на луче e . Обыкновенные лучи всегда перпендикулярны к волновому фронту, а необыкновенные лучи могут составлять с волновым фронтом угол, отличный от 90° .

Если для одноосного кристалла в направлении, перпендикулярном к оптической оси, скорость обыкновенной волны больше скорости необыкновенной ($V_o > V_e$) и соответственно для показателей преломления $n_o < n_e$, то кристалл называют *положительным* (например, кварц), а при обратном соотношении $V_o < V_e$ и $n_o > n_e$ кристалл называют *отрицательным* (например, исландский шпат).

Пространственное разделение волн с различными направлениями поляризации при распространении в анизотропных кристаллах используется для получения поляризованного света из неполяризованного и для преобразования состояния поляризации света.

Рассмотрим кристаллическую пластинку из одноосного кристалла толщиной d , вырезанную параллельно оптической оси. Если перпендикулярно к пластинке падает линейно поляризованный свет, то в пластинке обыкновенная и необыкновенная волны распространяются в одном направлении, но с разными скоростями, и на выходе из нее возникает оптическая разность хода. Если кристалл положительный ($n_e > n_o$), то оптическая разность хода

$$\Delta = (n_e - n_o)d \quad (10.1)$$

и соответственно разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_e - n_o). \quad (10.2)$$

Поскольку обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях, то на выходе из кристалла в общем случае происходит сложение взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами и разностью фаз $\Delta\varphi$. Соответственно формируется световая волна, конец светового вектора \vec{E} которой в общем случае описывает эллипс.

На рис. 10.2 схематично показано прохождение естественного света через систему из поляризатора Π и кристаллической пластинки. В естественном свете перед падением на поляризатор показаны всевозможные направления вектора \vec{E} , из поляризатора выходит линейно поляризованный свет, а в результате прохождения через кристаллическую пластинку линейно поляризованный свет превращается в эллиптически поляризованный, т.е. конец светового вектора \vec{E} описывает эллипс.

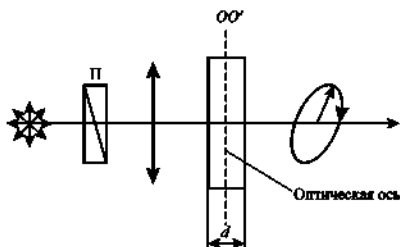


Рис. 10.2

Если на пластинку падает линейно поляризованный свет, плоскость поляризации которого образует угол 45° с ее оптической осью, то при этом амплитуды векторов \vec{E} обыкновенной и необыкновенной волн равны, а разность фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$. В этом случае на выходе из пластинки получается свет с круговой поляризацией.

Когда разность фаз $\Delta\varphi = (2m+1)\pi/2$, т.е. оптическая разность хода Δ обыкновенной и необыкновенной волн кратна $m\lambda \pm \lambda/4$, то пластинка называется *четвертьволновой*. При падении на такую пластинку света с круговой поляризацией можно получить свет линейно или эллиптически поляризованный.

Если оптическая разность хода Δ обыкновенной и необыкновенной волн равна $m\lambda \pm \lambda/2$ и соответственно разность фаз $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, то пластинка называется *полуволновой*. При падении перпендикулярно к пластинке линейно поляризованного света на выходе из нее свет остается линейно поляризованным, но плоскость поляризации света имеет другое положение в пространстве. Происходит поворот плоскости поляризации на угол 2φ , где φ — угол между плоскостью поляризации падающего света и оптической осью пластинки.

При пропускании эллиптически поляризованного света через полуволновую пластинку происходит поворот плоскости эллипса и изменяется направление вращения светового вектора.

Соответственно при разности фаз $\Delta\varphi = (2m+1)2\pi$ и $\Delta = m\lambda$ свет, проходящий через пластинку, остается плоско поляризованным с колебаниями светового вектора в той же плоскости.

Примеры решения задач

Задача 10.1. На поверхность одноосного кристалла падает из вакуума под углом α параллельный пучок естественного света. Рассмотреть ход обыкновенной и необыкновенной волн для положительного и отрицательного кристаллов в тех случаях, когда оптическая ось OO' кристалла:

- перпендикулярна к его поверхности;
- лежит в плоскости падения параллельно поверхности кристалла.

Решение. а) При падении пучка естественного света на одноосный кристалл, исходя из принципа Гюйгенса, каждая точка фронта волны, достигшая грани кристалла, становится источником двух вторичных волн — обыкновенной (волна o) и необыкновенной (волна e). Рассмотрим момент, когда плоский фронт падающей волны (пунктирная линия на рис. 10.3) достиг поверхности кристалла в точке A и из нее начали распространяться вторичные волны.

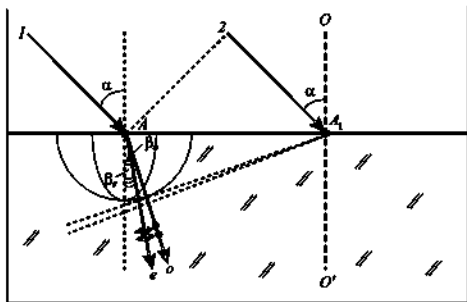


Рис. 10.3

Для обыкновенной волны скорость распространения по всем направлениям одинакова, поэтому из точки A начинает распространяться обыкновенная волна, фронт которой имеет сферическую форму, а направление распространения обыкновенной волны показано на рис. 10.3 лучом o . Главная плоскость совпадает с плоскостью рисунка, на луче o поставлены точки, что соответствует колебаниям электрического вектора обыкновенной волны перпендикулярно к плоскости рисунка.

Для положительного кристалла в направлении, перпендикулярном к оптической оси, скорость распространения обыкновенной волны меньше скорости распространения обыкновенной волны ($V_o < V_e$), а в направлении оптической оси эти скорости равны ($V_o = V_e$). Поэтому на рис. 10.3 показано несферическое сечение фронта необыкновенной волны e , распространяющейся из точки A как бы «внутри» сечения сферического фронта волны o .

На луче e поставлены стрелки, что соответствует колебаниям электрического вектора необыкновенной волны в главной плоскости (или в данном случае в плоскости рисунка).

Для положительного кристалла скорость обыкновенной волны больше скорости необыкновенной ($V_o > V_e$) и соответственно $n_o < n_e$, поэтому углы между направлением распространения каждой из этих волн и перпендикуляром к точке A различны. На рис. 10.3 показано, что $\beta_e > \beta_o$.

К моменту, когда фронт падающей волны достигнет точки A_1 , обыкновенная и необыкновенная волны из точки A , а также волны из точек поверхности кристалла, расположенных между точками A и A_1 , распро-

странятся внутри кристалла. На рис. 10.3 показаны пунктирными линиями положения фронтов обыкновенных и необыкновенных волн в кристалле к моменту достижения фронтом падающей волны точки A_1 .

На рис. 10.4 пучок естественного света падает на отрицательный кристалл, главная плоскость совпадает с плоскостью рисунка. В момент достижения плоским фронтом падающей волны точки A она становится источником обыкновенной и необыкновенной волн. Для отрицательного кристалла в направлении, перпендикулярном к оптической оси, скорость необыкновенной волны больше скорости обыкновенной волны ($V_e > V_o$), поэтому за одно и то же время необыкновенная волна в этом направлении проходит в кристалле большее расстояние, чем обыкновенная. Вдоль направления оптической оси скорости обыкновенной и необыкновенной волн равны, поэтому на рисунке показано, что для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся из точки A , сечение сферического фронта волны o расположено как бы «внутри» сечения несферического фронта волны e .

Для отрицательного кристалла скорость распространения обыкновенной волны меньше, чем необыкновенной ($V_o < V_e$), и соответственно $n_o > n_e$. На рис. 10.4 показано, что углы между направлениями распространения волн и перпендикуляром к точке A различны ($\beta_o > \beta_e$).

В момент падения луча 2 на поверхность кристалла из точки A_1 начнут распространяться вторичные волны. Для обоих кристаллов лучи распространяются под небольшими углами к оптической оси и скорости обыкновенной и необыкновенной волн мало различаются. Поэтому поверхности волновых фронтов обыкновенных и необыкновенных волн,

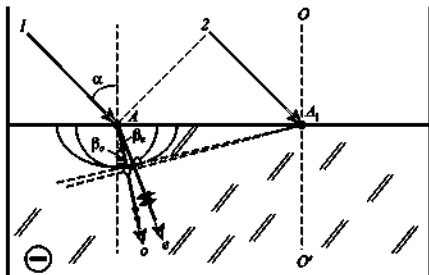


Рис. 10.4

построенные как огибающие вторичных волн, распространяющихся из точек поверхности кристалла от A до A_1 , на рис. 10.3 и 10.4 мало различаются.

б) Если оптическая ось положительного и отрицательного кристаллов лежит в плоскости падения параллельно их поверхности, то вдоль этой оси скорости необыкновенной и обыкновенной волн равны ($V_e = V_o$). Для положительного кристалла в направлении, перпендикулярном к оптической оси, скорость распространения необыкновенной волны меньше, чем обыкновенной ($V_e < V_o$). При достижении фронтом падающей волны точки A на поверхности кристалла из этой точки начнут распространяться необыкновенная и обыкновенная волны. На рис. 10.5 показано несферическое сечение фронта волны e , расположенное как бы «внутри» сечения сферического фронта волны o .

При таком положении оптической оси кристалла направление распространения обеих волн составляет достаточно большие углы с оптической осью, а скорости обыкновенной и необыкновенной волн значительно различаются. При достижении волновым фронтом падающей волны точки A_1 внутри кристалла распространяются вторичные волны от всех точек поверхности от A до A_1 . На рис. 10.5 пунктирными линиями внутри кристалла показаны поверхности волновых фронтов обыкновенных и необыкновенных волн, построенные как огибающие вторичных волн, распространяющихся из точек поверхности кристалла.

Для отрицательного кристалла в направлении, перпендикулярном к оси, скорость необыкновенной волны больше, чем обыкновенной ($V_e > V_o$), поэтому на рис. 10.6 показано, что из точки A распространяет-

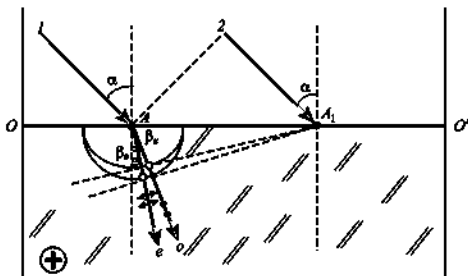


Рис. 10.5

$$n = \frac{c}{V} = \frac{\lambda \nu}{\lambda_{\text{вид}} \nu} = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{вид}}}$$

Тогда длины обыкновенной и необыкновенной волн в пластинке равны соответственно $\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o} =$

$$\approx 291 \text{ нм}, \lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} \approx 326 \text{ нм},$$

б) Световой вектор падающей плоскополяризованной волны можно представить как сумму световых векторов необыкновенной и обыкновенной волн:

$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_o$ (рис. 10.7). Модули этих векторов можно выразить через модуль светового вектора падающей волны: $E_e = E \cos \alpha$ и $E_o = E \sin \alpha$. При прохождении волн через четвертьволновую пластинку возникает разность фаз $\Delta\delta = (2m+1)\pi/2$ и оптическая разность хода $\Delta = m\lambda \pm \lambda/4$. При $\alpha = 60^\circ$ амплитуды этих волн не равны ($E_e < E_o$), поэтому на выходе из пластинки получается свет эллиптической поляризации.

в) Для получения круговой поляризации необходимо равенство амплитуд ($E_e = E_o$). Это возможно, например, в случае, если угол между плоскостью поляризации падающего света и оптической осью пластинки $\beta = 45^\circ$.

Следовательно, свет круговой поляризации получится на выходе из пластинки при уменьшении угла между направлением вектора \vec{E} и осью пластинки на $\alpha - \beta = 15^\circ$.

Задача 10.3. Требуется изготовить параллельную оптической оси кварцевую пластинку, толщина которой не превышала бы $d < h = 0,50$ мм. На пластинку падает линейно поляризованный свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм. Показатели преломления кварца для этой длины волны $n_e = 1,553$ и $n_o = 1,544$. Найти максимальную толщину пластинки, при которой после прохождения пластинки свет:

а) останется линейно поляризованным, но произойдет поворот его плоскости поляризации;

б) станет поляризованным по кругу.

Решение. а) Представляем световой вектор падающей волны так же, как и в задаче 10.2 ($\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_o$) (рис. 10.7). По условию $n_e > n_o$, и при прохождении пластинки, согласно формуле (10.1), возникает оптическая разность хода $\Delta = d(n_e - n_o)$.

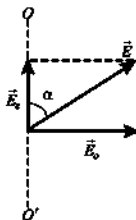


Рис. 10.7

Как отмечалось ранее, свет останется линейно поляризованным при прохождении через полуволновую пластинку, которая дает оптическую разность хода $\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Приравняем оба выражения для разности хода $\left(d(n_e - n_o) = \frac{\lambda}{2} + m\lambda\right)$ и выразим толщину пластинки: $d = \left(\frac{\lambda}{2} + m\lambda\right) / (n_e - n_o)$. Из этого выражения следует, что толщина пластинки при заданных λ, n_e, n_o зависит от m и максимальная толщина пластинки будет при m_m . Найдем m_m , используя данное в условии соотношение $d < h: \left(\frac{\lambda}{2} + m_m\lambda\right) / (n_e - n_o) < h$. Тогда

$$m_m < \frac{h}{\lambda}(n_e - n_o) - \frac{1}{2}, \quad m_m < 7,04, \quad m_m \approx 7.$$

Следовательно, свет останется линейно поляризованным, а произойдет лишь поворот плоскости поляризации при максимальной толщине пластинки

$$d_m = \left(\frac{1}{2} + m_m\right) \lambda / (n_e - n_o), \quad d_m \approx 0,49 \text{ мм}.$$

б) Для того чтобы после пластинки свет был поляризован по кругу, нужны оптическая разность хода $\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{4}$ и равенство амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн. Решая аналогично пункту а), получим, что в этом случае

$$m_m < \frac{h}{\lambda}(n_e - n_o) - \frac{1}{4}, \quad m_m < 7,39, \quad m_m \approx 7.$$

Соответственно свет после пластинки будет поляризован по кругу при максимальной толщине пластинки

$$d_m = \lambda \left(\frac{1}{4} + m_m\right) / (n_e - n_o) \approx 0,47 \text{ мм}$$

и равенстве амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн. Такое равенство амплитуд будет наблюдаться, если угол α между плоскостью поляризации падающего света и оптической осью пластинки будет 45° .

Задача 10.4. Кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину $d = 0,25$ мм и служит четвертьволновой пластинкой для света с длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм. Для каких еще волн

в области видимого спектра она будет четвертьволновой пластинкой? Считать для простоты, что для всех длин волн видимого спектра $n_e - n_o = 0,009$.

Решение. Кварцевая пластинка дает оптическую разность хода $\Delta = d(n_e - n_o)$, а четвертьволновая пластинка – разность хода $\Delta = m\lambda \pm \frac{\lambda}{4}$, т.е. кратную $\Delta = m_1 \frac{\lambda}{4}$, где m_1 – нечетное число. Из равенства $d(n_e - n_o) = m_1 \frac{\lambda}{4}$ выразим m_1 :

$$m_1 = \frac{4d(n_e - n_o)}{\lambda}.$$

Поскольку $d = 0,25 \text{ мм} = 0,25 \cdot 10^3 \text{ мкм}$, то

$$m_1 = \frac{4 \cdot 0,25 \cdot 10^3 \cdot 0,009}{\lambda} = \frac{9}{\lambda}.$$

Видимый диапазон волн соответствует длинам волн $0,39 \text{ мкм} < \lambda < 0,79 \text{ мкм}$. Тогда при округлении до целых чисел $m_{1 \text{ max}} = \frac{9}{0,39} \approx 23$ и $m_{1 \text{ min}} = \frac{9}{0,79} \approx 11$.

Представим все нечетные m_1 , при которых длина волны будет соответствовать видимому диапазону:

m	11	13	15	17	19	21	23
λ (мкм)	0,79	0,69	0,60	0,53	0,47	0,43	0,39

Задача 10.5. Свет проходит через систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми расположена кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической осм. Плоскость поляризации первого поляризатора составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с оптической осью пластинки. При какой минимальной толщине пластинки свет с длиной волны $\lambda_1 = 643 \text{ нм}$ будет проходить сквозь эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 564 \text{ нм}$ будет практически задержан, если для обеих длин волн разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей $n_e - n_o = 0,0090$?

Решение. Если поляризаторы скрещены, то между их главными плоскостями образуется угол 90° . Для того чтобы свет пропел с максимальной интенсивностью через второй поляризатор, после прохождения пластинки плоскость поляризации света следует повернуть на 90° .

Угол между оптической осью пластинки и плоскостью пропускания первого поляризатора $\alpha = 45^\circ$. Для поворота вектора поляризации света на угол $90^\circ = 2\alpha$ пластинка должна быть полуволновой и создавать оптическую разность хода, равную нечетному числу полуволн:

$$\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2} = m' \frac{\lambda}{2},$$

где $m' = 1, 3, 5, \dots$.

Согласно формуле (10.1) создаваемая кристаллической пластинкой оптическая разность хода $\Delta = d(n_e - n_o)$. Приравняем эти выражения:

$$\Delta = d(n_e - n_o) = m' \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда для первой длины волны должна быть толщина пластинки $d = \frac{m_1 \lambda_1}{2(n_e - n_o)}$, где m_1 — нечетное число.

Для того чтобы свет прошел с минимальной интенсивностью через второй поляризатор, плоскость поляризации света после пластинки либо не должна повернуться, либо должна повернуться на 180° или 360° .

Как отмечалось ранее, при прохождении линейно поляризованного света через пластинку в целую волну состояние поляризации света не изменяется, а разность хода после прохождения пластинки $\Delta = m\lambda = m_2 \frac{\lambda}{2}$, где m_2 — четное число. Тогда для второй длины волны толщина пластинки $d = \frac{m_2 \lambda_2}{2(n_e - n_o)}$.

Поскольку в задаче спрашивается о минимальной толщине одной и той же пластинки, то $m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2$, $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{m_2}{m_1} = \frac{643}{564} \approx 1,14$. Для минимальной толщины пластинки это отношение наименьшего значения четного числа к наименьшему значению нечетного числа. Такому соотношению ближе всего соответствуют $m_{1 \min} = 7$ и $m_{2 \min} = 8$. Тогда $\frac{m_2}{m_1} = \frac{8}{7} \approx 1,143$. Поскольку $m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2$, то $d_{1 \min} = \frac{m_{1 \min} \lambda_1}{2(n_e - n_o)}$, или $d_{2 \min} = \frac{m_{2 \min} \lambda_2}{2(n_e - n_o)}$.

Выполним расчеты:

$$d_{1\text{min}} = \frac{7 \cdot 643 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0,009} = 250,06 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 0,25 \text{ мм},$$

$$d_{2\text{min}} = \frac{8 \cdot 564 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0,009} = 250,67 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 0,25 \text{ мм}.$$

Следовательно, минимальная толщина пластинки $d_{\text{min}} \approx 0,25 \text{ мм}$.

Задача 10.6. Призма Николя состоит из кристалла исландского шпата, разрезанного на две равные части вдоль диагональной плоскости BD , составляющей углы 90° с боковыми гранями (рис. 10.8). Эти части склеены тонким слоем канадского бальзама с показателем преломления $n = 1,54$. Световая волна падает из воздуха на грань призмы под таким углом α , что внутри призмы направление распространения необыкновенной волны параллельно длинному ребру призмы, а при распространении этой волны через тонкий слой канадского бальзама смещением направления распространения можно пренебречь. Для такого направления распространения света показатель преломления необыкновенной волны $n_e = 1,516$, а обыкновенной волны $n_o = 1,658$. Найти угол γ кристалла исландского шпата, если угол между направлением распространения обыкновенной волны и перпендикуляром к точке падения на слой канадского бальзама больше угла полного внутреннего отражения на угол $\delta = 1^\circ 45'$ (рис. 10.8).

Решение. Согласно условию задачи из точки падения на грань кристалла распространяются две волны — обыкновенная и необыкновенная. Так как по условию $n_e < n_o$, то направления распространения этих волн относительно перпендикуляра, проведенного в точку падения, определяются углами: $\beta_e > \beta_o$ (рис. 10.8). Пусть угол полного отражения волны o на границе с канадским бальзамом равен φ_0 , тогда обыкновен-

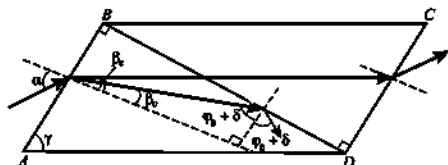


Рис. 10.8

ная волна падает на слой канадского бальзама под углом $\varphi_0 + \delta$, и поскольку этот угол больше угла полного отражения, то обыкновенная волна отражается от слоя канадского бальзама под таким же углом.

Для краткости назовем направление распространения обыкновенной волны лучом o , а направление распространения необыкновенной волны — луч e . По закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = n_o$, $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_e} = n_e$. Отсюда $\frac{\sin \beta_e}{\sin \beta_o} = \frac{n_o}{n_e}$.

Поскольку по условию луч e параллелен длинной грани, то $\gamma + 90^\circ + \beta_e = 180^\circ$ и $\gamma = 90^\circ - \beta_e$. Кроме того, по условию грани AB и BD взаимноперпендикулярны, следовательно, перпендикулярны, проведенные к этим граням в точках падения световой волны на грань кристалла и луча o , также взаимноперпендикулярны. Тогда $\beta_o = 90^\circ - (\varphi_0 + \delta)$, где угол полного отражения определяется из условия $\sin \varphi_0 = \frac{n}{n_o}$.

Выполним расчеты:

$$\sin \varphi_0 = \frac{1,54}{1,658} = 0,929, \quad \varphi_0 = 68^\circ 15', \quad \beta_o = 90^\circ - (68^\circ 15' + 1^\circ 45') = 20^\circ,$$

$$\sin \beta_e = 0,342, \quad \sin \beta_e = \sin \beta_o \frac{n_o}{n_e} = 0,342 \frac{1,658}{1,516} = 0,374, \quad \beta_e \approx 22^\circ \text{ и } \gamma = 68^\circ.$$

Задача 10.7. Призма Воллстонга изготовлена из исландского шпата так, что в левой ее части оптическая ось параллельна плоскости чертежа, а в правой части — перпендикулярна к плоскости чертежа (на рис. 10.9 показано точкой). Угол $\alpha = 15^\circ$ (на рисунке угол увеличен для более наглядного построения). Узкий пучок естественного света с длиной волны $\lambda = 527 \text{ нм}$ ($n_o = 1,664$ и $n_e = 1,489$) падает перпендикулярно к грани левой части призмы. Найти угол между направлениями световых пучков на выходе из призмы.

Решение. Главная плоскость левой части призмы совпадает с плоскостью рисунка. При преломлении на левой грани формируются две волны — обыкновенная (волна o — точка на направлении распространения) и необыкновенная (волна e — стрелка на направлении распространения). Как и в задаче 10.6, для краткости будем называть направления распространения волн лучом o и лучом e . Углы падения обоих лучей на границу левой и правой частей призмы одинаковы, обозначим их α .

В правой части призмы оптическая ось и соответственно главная плоскость правой части перпендикулярны к плоскости рисунка, поэтому плоскость поляризации обыкновенной волны, распространяющейся из левой части призмы, параллельна главной плоскости правой части,

т.е. обыкновенная волна становится в правой части призмы необыкновенной (луч $o \rightarrow e$). Плоскость поляризации необыкновенной волны будет перпендикулярна к главной плоскости правой части, и необыкновенная волна в правой части призмы становится обыкновенной (луч $e \rightarrow o$). Соответственно для каждой волны изменяется показатель преломления: для обыкновенной $n_o \rightarrow n_e$, для необыкновенной $n_e \rightarrow n_o$. Тогда по закону преломления на границе левой и правой частей призмы

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = \frac{n_e}{n_o} > 1, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_e} = \frac{n_e}{n_o} < 1.$$

Из этих соотношений следует, что $\sin \alpha > \sin \beta_o$, $\alpha > \beta_o$, а также $\sin \alpha < \sin \beta_e$, $\alpha < \beta_e$, т.е. лучи $o \rightarrow e$ и $e \rightarrow o$ расходятся после преломления на поверхности раздела левой и правой частей призмы. При падении этих лучей на границу правой части призмы с воздухом угол между перпендикулярами к этой границе и перпендикуляром к границе левой и правой частей равен α . Тогда угол падения на границу с воздухом для луча $e \rightarrow o$ равен $\alpha - \beta_o$, для луча $o \rightarrow e$ угол падения равен $\beta_e - \alpha$, а углы преломления — соответственно β'_o , β'_e .

Соответственно искомый угол $\gamma = \beta'_o + \beta'_e$. Найдем углы β'_o и β'_e . Закон преломления для волн при переходе в воздух можно записать следующим образом:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta_o)}{\sin \beta'_o} = \frac{1}{n_e}, \quad \frac{\sin(\beta_e - \alpha)}{\sin \beta'_e} = \frac{1}{n_o}.$$

Выполним расчеты:

$$\sin \beta'_o = \sin \alpha \cdot \frac{n_e}{n_o} = 0,2588 \cdot \frac{1,489}{1,664} \approx 0,2316, \quad \beta'_o \approx 13^\circ 24';$$

$$\sin \beta'_e = \sin \alpha \cdot \frac{n_o}{n_e} = 0,2588 \cdot \frac{1,664}{1,489} \approx 0,2892, \quad \beta'_e \approx 16^\circ 49';$$

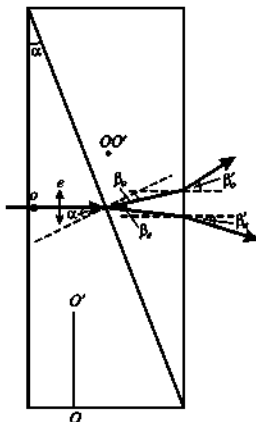


Рис. 10.9

$$\begin{aligned} \sin \beta'_e &= n_e \sin(\alpha - \beta_o) = 1,664 \sin 1^\circ 36' = 1,664 \cdot 0,0279 \approx 0,0464, \quad \beta'_e \approx 2^\circ 40'; \\ \sin \beta'_e &= n_e \sin(\beta_e - \alpha) = 1,489 \sin 1^\circ 49' = 1,489 \cdot 0,0317 \approx 0,0472, \quad \beta'_e \approx 2^\circ 42'; \\ \gamma &= \beta'_e + \beta'_e = 4^\circ 82' = 5^\circ 22' \end{aligned}$$

(на рис. 10.9 для большей наглядности показаны углы больше вычисленных).

Задача 10.8. Кварцевая пластинка толщиной $d = 1,50$ мм, вырезанная параллельно оптической оси, расположена между скрещенными поляризатором и анализатором так, что ось пластинки составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризатора и анализатора. На эту систему падает белый естественный свет, а вышедший из системы свет раскладывает в спектр. Сколько темных полос будет наблюдаться в спектре в интервале длин волн от $\lambda_1 = 550$ нм до $\lambda_2 = 660$ нм? Разность Δn показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей в этом интервале длин волн считать равной $\Delta n = n_e - n_o = 0,009$.

Решение. Поскольку после поляризатора свет поляризован линейно, то минимальная интенсивность после анализатора будет наблюдаться в том случае, когда направление колебаний электрического вектора света, падающего на анализатор, перпендикулярно к его плоскости поляризации. По условию поляризатор и анализатор скрещены, т.е. их плоскости поляризации взаимоперпендикулярны. Тогда минимальная интенсивность после анализатора будет в тех случаях, когда при прохождении пластинки плоскость поляризации света не изменилась, повернулась на 180° или 360° . Плоскость поляризации света не изменяется при прохождении через пластинку в целую длину волны.

Согласно соотношению (10.1) в этом случае разность хода $\Delta = (n_e - n_o)d = m\lambda$, где m — целое число. Тогда $m = \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda}$ и это целое число должно быть в интервале от $m_{\min} = \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda_2}$ для самой большой длины волны до $m_{\max} = \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda_1}$ для самой малой длины волны указанного диапазона. Подставим численные значения и получим:

$$\begin{aligned} m_{\min} &= \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda_2}, \quad m_{\min} = \frac{0,009 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{660 \cdot 10^{-9}} \approx 20,45, \\ m_{\max} &= \frac{(n_e - n_o)d}{\lambda_1}, \quad m_{\max} = \frac{0,009 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{550 \cdot 10^{-9}} \approx 24,55. \end{aligned}$$

В этом интервале целые значения m соответствуют только четырем числам: 21, 22, 23, 24. Соответственно минимальная интенсивность наблюдается только для четырех длин волн из указанного диапазона, т.е. в спектре будет четыре темные полосы для следующих длин волн:

$$\lambda_1 = \frac{(n_e - n_o)d}{m_1}, \lambda_1 = \frac{0,009 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}}{21} \approx 643 \text{ нм,}$$

$$\lambda_2 = \frac{(n_e - n_o)d}{m_2}, \lambda_2 = \frac{0,009 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}}{22} \approx 614 \text{ нм,}$$

$$\lambda_3 = \frac{(n_e - n_o)d}{m_3}, \lambda_3 = \frac{0,009 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}}{23} \approx 587 \text{ нм,}$$

$$\lambda_4 = \frac{(n_e - n_o)d}{m_4}, \lambda_4 = \frac{0,009 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}}{24} \approx 563 \text{ нм.}$$

Задача 10.9. Частично поляризованный свет пропускают через поляризатор. При вращении поляризатора была зарегистрирована минимальная интенсивность прошедшего света, равная I_0 . После того как перед поляризатором поместили четвертьволновую пластинку, оптическая ось которой направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к плоскости пропускания поляризатора, интенсивность света I после поляризатора стала равной ηI_0 , где $\eta = 2,0$. Найти степень поляризации падающего на эту систему света.

Решение. Согласно формуле (9.1) степень поляризации частично поляризованного света $P = \frac{I_{0\text{пол}}}{I}$, где $I_{0\text{пол}}$ — интенсивность линейно поляризованной компоненты в падающем свете, $I = I_{0\text{пол}} + I_{\text{ест}}$ — суммарная интенсивность поляризованного и естественного света.

Минимальная интенсивность при вращении поляризатора наблюдается в том случае, когда световой вектор поляризованной компоненты перпендикулярен к плоскости поляризации поляризатора. Но согласно формуле (9.4) при падении естественного света на выходе из поляризатора регистрируемая интенсивность равна половине интенсивности естественного света. Следовательно, $I_0 = 0,5I_{\text{ест}}$, $I_{\text{ест}} = 2I_0$.

При пропускании частично поляризованного света через четвертьволновую пластинку, оптическая ось которой составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с плоскостью поляризации поляризатора, естественный свет проходит

без изменений. Как отмечалось в задаче 10.2, при таком угле линейно поляризованный свет превращается в свет, поляризованный по кругу.

Интенсивность поляризованной составляющей в падающем свете $I_{0\text{пол}} = E^2$, где E — амплитуда светового вектора. В свете, поляризованном по кругу, $E_x = E \cos \alpha$, $E_y = E \sin \alpha$ и $E_x = E_y$, так как $\alpha = 45^\circ$. Тогда интенсивность света круговой поляризации после выхода из пластинки $I_{1\text{пол}} = I_x + I_y = 2E^2 \cos^2 \alpha = 2I_{0\text{пол}} \cos^2 \alpha$, а при $\alpha = 45^\circ$ $I_{1\text{пол}} = 2I_{0\text{пол}} \times \cos^2 \alpha = I_{0\text{пол}}$.

По закону Малюса (9.2) интенсивность поляризованного света после поляризатора $I_{2\text{пол}} = I_{1\text{пол}} \cos^2 \alpha = 0,5I_{0\text{пол}}$ при $\alpha = 45^\circ$. Тогда максимальная интенсивность света после поляризатора $I = 0,5I_{\text{ост}} + I_{2\text{пол}} = 0,5I_{\text{ост}} + 0,5I_{0\text{пол}}$. По условию эта интенсивность $I = 0,5I_{\text{ост}} + 0,5I_{0\text{пол}} = \eta I_0$. Найдём интенсивность поляризованной компоненты в падающем свете: $I_{0\text{пол}} = 2\eta I_0 - I_{\text{ост}} = 2\eta I_0 - 2I_0 = 2I_0(\eta - 1)$. Тогда степень поляризации падающего света

$$P = \frac{I_{0\text{пол}}}{I} = \frac{2I_0(\eta - 1)}{2I_0 + 2I_0(\eta - 1)} = \frac{(\eta - 1)}{\eta}, \quad P = 0,50.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. На пластинку из исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси, падает параллельный пучок лучей. Толщина пластинки $d = 30,0$ мкм, показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн равны соответственно $n_o = 1,66$ и $n_e = 1,49$. Найти:

а) скорости распространения обыкновенной V_o и необыкновенной V_e волн в пластинке;

б) оптическую разность Δ хода этих волн на выходе из пластинки.

Ответ: 1) $V_o \approx 1,81 \cdot 10^8$ м/с, $V_e \approx 2,01 \cdot 10^8$ м/с; 2) $\Delta = 5,10$ мкм.

2. Четвертьволновая пластинка толщиной $d = 16$ мкм вырезана из кварца. Для монохроматического света с длиной волны $\lambda = 589$ нм показатель преломления обыкновенной волны $n_o = 1,544$. Найти показатель преломления n_e необыкновенной волны.

Ответ: $n_e \approx 1,553$.

3. Перпендикулярно к плоскопараллельной кристаллической пластинке, вырезанной параллельно оптической оси, падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 400$ нм, для которого показатели пре-

ломления обыкновенной и необыкновенной волн равны соответственно $n_o = 1,683$ и $n_e = 1,498$. Определить:

а) из какого кристалла (положительного или отрицательного) изготовлена пластинка;

б) при какой наименьшей толщине d_{\min} эта пластинка будет полуволновой.

О т в е т: а) из отрицательного; б) $d_{\min} \approx 1,08$ мкм.

4. На кристаллическую пластинку из исландского шпата падает монохроматический свет. Определить, при какой минимальной толщине d_{\min}

пластинки возникнет разность фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ между обыкновенной и необыкновенной волнами в случае:

а) длины волны $\lambda_1 = 687$ нм, для которой показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн равны соответственно $n_o = 1,653$ и $n_e = 1,484$;

б) длины волны $\lambda_2 = 486$ нм, для которой показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн равны соответственно $n_o = 1,668$ и $n_e = 1,491$?

О т в е т: а) $d_{\min} \approx 102$ мкм; б) $d_{\min} \approx 686$ мкм.

5. Кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, помещена между скрещенными поляризатором и анализатором. Оптическая ось пластинки составляет угол $\alpha = 45,0^\circ$ с направлениями пропускания поляризатора и анализатора. Найти минимальную толщину d_{\min} пластинки, при которой интенсивность одной из спектральных линий источника с длиной волны $\lambda_1 = 656$ нм будет сильно ослаблена, а для линии с длиной волны $\lambda_2 = 410$ нм будет наблюдаться максимальная интенсивность. Принять для кварца $\Delta n = n_e - n_o = 0,009$.

О т в е т: $d_{\min} = 182$ мкм.

6. Поляризованный по кругу свет интенсивностью I_0 падает на четвертьволновую пластинку. Как будет поляризован свет после пластинки и чему равна его интенсивность I ?

О т в е т: свет линейно поляризован; $I = I_0$.

7. Из кварца необходимо вырезать параллельную оптической оси кристаллическую пластинку толщиной $d \approx 0,6$ мм для того, чтобы линейно поляризованный свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм после прохождения пластинки стал поляризованным по кругу. Показатели преломления кварца обыкновенной и необыкновенной волн соответственно $n_o = 1,544$ и $n_e \approx 1,553$. Найти более точно толщину d пластинки из кварца

для этой цели. Каким должен быть угол α между плоскостью поляризации падающего света и оптической осью пластинки в этом случае?

Ответ: $d = 0,605$ мм; $\alpha = 45^\circ$.

8. Линейно поляризованный свет падает на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. Направление колебаний светового вектора составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с оптической осью пластинки. Определить, как изменится состояние поляризации света, выходящего из пластинки, если эта пластинка:

- полуволновая;
- четвертьволновая.

Ответ: а) направление колебаний светового вектора изменится на угол $\beta = 2\alpha = 90^\circ$; б) свет будет поляризован по кругу.

9. Линейно поляризованный монохроматический свет с длиной волны λ падает на клиновидную кристаллическую пластинку, оптическая ось которой параллельна ребру клина. Направление колебаний светового вектора падающего света составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с оптической осью пластинки, показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн соответственно n_o и n_e , $n_o > n_e$. Как зависит поляризация выходящего из пластинки света от пройденной толщины клина?

Ответ: при прохождении толщин клина $d_1 = \frac{m\lambda}{(n_o - n_e)}$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ — целое число, состояние поляризации света не изменится. При прохождении толщин клина $d_2 = \frac{(2m+1)\lambda}{2(n_o - n_e)}$ выходящий свет линейно поляризован, но плоскость его поляризации перпендикулярна к плоскости поляризации падающего света. При прохождении толщин клина $d_3 = \frac{(2m+1)\lambda}{4(n_o - n_e)}$ выходящий свет поляризован по кругу. При прохождении светом толщин клина, не удовлетворяющих вышеприведенным условиям, выходящий свет эллиптически поляризован.

10. Пластинка толщиной d из одноосного кристалла вырезана параллельно оптической оси и размещена между поляризатором и анализатором так, что оптическая ось пластинки составляет угол α с плоскостью поляризации поляризатора. На поляризатор подает естественный монохроматический свет с длиной волны λ и интенсивностью I_0 . Найти интенсивность света на выходе из анализатора в следующих случаях:

- направления поляризации поляризатора и анализатора взаимно перпендикулярны;

б) направления поляризации поляризатора и анализатора параллельны. Принять разность показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн $\Delta n = |n_e - n_o|$.

Ответ: а) $I_{\perp} = (I_0/2) \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2)$, $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \Delta n$; б) $I_{\parallel} = I_0/2 - I_{\perp} = (I_0/2)(1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2))$, $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \Delta n$.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ КРИСТАЛЛЫ

Интерференция поляризованных волн — явление, возникающее при сложении когерентных поляризованных световых колебаний. Интерференция никогда не наблюдается, если волны поляризованы ортогонально. На практике чаще всего встречается интерференция линейно поляризованных волн.

Оптическая система, позволяющая наблюдать интерференцию таких волн, показана на рис. 11.1. Ее основные элементы — поляризатор Π_1 , кристаллическая пластинка K , вырезанная из двоякопреломляющего одноосного кристалла параллельно его оптической оси OO' , поляризатор (анализатор) Π_2 .

Плоская монохроматическая волна выходит из поляризатора Π_1 плоскополяризованной, направление светового вектора \vec{E} определяет ориентация плоскости поляризации поляризатора Π_1 . Далее монохроматический плоскополяризованный свет попадает на кристаллическую пластинку K , расположенную ортогонально падающей волне. В пластинке происходит двойное лучепреломление, т.е. разделение ис-

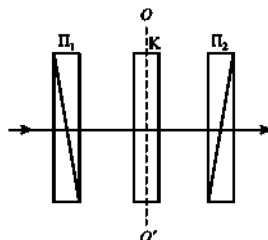


Рис. 11.1

ходной волны на две — обыкновенную и необыкновенную. Показатели преломления n_e и n_o необыкновенной и обыкновенной волн различны. Обыкновенная и необыкновенная волны когерентны и плоскополяризованы взаимно ортогонально, т.е. направление колебаний светового вектора \vec{E}_o в обыкновенной волне происходит перпендикулярно к оптической оси пластинки, в то время как направление колебаний светового вектора \vec{E}_e в необыкновенной волне происходит параллельно оптической оси OO' пластинки. Для повышения контраста интерференционной картины угол между плоскостью поляризации поляризатора Π_1 и оптической осью OO' кристаллической пластинки K обычно устанавливают равным 45° , благодаря чему амплитуды колебаний E_e и E_o равны (это показано на рис. 11.2, 11.3 при решении конкретных задач).

На выходе из пластинки между волнами возникает разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d |n_e - n_o|, \quad (11.1)$$

где λ — длина волны падающего света; d — толщина пластинки K ; n_e , n_o — показатели преломления соответственно необыкновенной и обыкновенной волн.

После пластинки не возникает интерференционная картина вследствие того, что волны поляризованы в ортогональных плоскостях. Однако если на пути вышедших из кристаллической пластинки волн поставить еще один поляризатор (анализатор) Π_2 , то на выходе из него обыкновенная и необыкновенная волны будут поляризованы в одной плоскости — плоскости поляризации поляризатора Π_2 . В этом случае для когерентных и поляризованных в одной плоскости обыкновенной и необыкновенной волн наблюдается интерференция.

Характер интерференционной картины — перераспределение интенсивности результирующего колебания, возникающего после прохождения волнами поляризатора Π_2 , — существенно зависит от взаимной пространственной ориентации плоскостей поляризации поляризаторов. Так, наиболее простыми и практически важными случаями являются два. В одном из них плоскости поляризации поляризаторов ориентированы параллельно друг другу ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$), в другом — взаимно перпендикулярно ($\Pi_1 \perp \Pi_2$, тогда говорят, что поляризаторы скрещены).

Если плоскости поляризации поляризаторов ориентированы параллельно друг другу ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$) и составляют угол 45° с оптической осью OO' кристаллической пластинки, то интенсивность прошедшего света определяется выражением

$$I_0' = I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2), \quad (11.2)$$

где I — интенсивность света, прошедшего через поляризатор Π_1 ; $\Delta\varphi$ — разность фаз необыкновенной и обыкновенной волн после прохождения пластинки (формула (11.1)).

В том случае, когда плоскости поляризации поляризаторов ориентированы ортогонально друг другу ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) и составляют угол 45° с оптической осью OO' кристаллической пластинки интенсивность прошедшего света определяется выражением

$$I'_1 = I \sin^2(\Delta\varphi/2). \quad (11.3)$$

Если кристаллическая пластинка имеет одну и ту же толщину на всем протяжении, то, согласно формуле (11.2) или (11.3), на выходе из поляризатора Π_2 интенсивность монохроматического света будет иметь одну и ту же величину, без характерного для интерференционной картины чередования темных и светлых полос.

Если между двумя скрещенными поляризаторами ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) вместо кристаллической плоскопараллельной однородной пластинки поместить кристаллический клин, оптическая ось которого параллельна его ребру (см. рис. 11.5), то в монохроматическом свете будет наблюдаться классическая интерференционная картина — в виде чередующихся темных ($I'_1 = 0$ при условии $\Delta\varphi = 2m\pi$, где m — целое число) и светлых ($I'_1 = I$ при условии $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$) полос.

В том случае, когда через оптическую систему (рис. 11.1) пропустить некогерентный (белый) свет, то условия максимального усиления и ослабления будут осуществляться для разных монохроматических компонент и будет наблюдаться явление хроматической поляризации, т.е. интерференционная картина окажется окрашенной (см. задачу 11.5). При параллельных и скрещенных поляризаторах Π_1 и Π_2 будут наблюдаться различные интерференционные картины.

Можно наблюдать интерференционную картину, например «мальтийский крест» (см. задачу 11.4), на поверхности кристаллической пластинки, вырезанной перпендикулярно к оптической оси OO' , помещенной между поляризаторами Π_1 и Π_2 и ориентированной так, что оптическая ось OO' совпадает с осью конуса падающего на пластинку сходящегося светового луча.

Примеры решения задач

Задача 11.1. Монохроматический свет интенсивностью I , плоскополяризованный с помощью поляризатора Π_1 , падает нормально на кристаллическую пластинку K , вырезанную параллельно оптической оси.

Угол β между плоскостью поляризации поляризатора Π_1 и оптической осью OO' пластинки равен 45° . За пластинкой расположен поляризатор (анализатор) Π_2 (рис. 11.1). Найти интенсивность I' света, вышедшего из поляризатора Π_2 , если пластинка вносит разность фаз $\Delta\varphi$ между обыкновенной и необыкновенной волнами. Рассмотреть случаи, когда плоскости пропускания поляризаторов:

- скрещены ($\Pi_1 \perp \Pi_2$);
- параллельны ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$).

Решение. а) Рассмотрим случай, когда плоскости пропускания поляризаторов скрещены ($\Pi_1 \perp \Pi_2$, рис. 11.2). Обозначим положение плоскостей поляризации поляризаторов линиями Π_1 и Π_2 , положение оптической оси кристаллической пластинки — OO' .

Плоскополяризованная с помощью поляризатора Π_1 световая волна, вышедшая из поляризатора с амплитудой E , в анизотропной кристаллической пластинке разделяется на две когерентные взаимноортогональнополяризованные волны: необыкновенную и обыкновенную, которые будут распространяться в одном и том же направлении, но уже с другими амплитудами: $E_e = E \cos\beta$ и $E_o = E \sin\beta$ (рис. 11.2). Далее колебания этих волн приводятся поляризатором Π_2 к одной плоскости с амплитудами E'_e и E'_o , т.е. анализатор Π_2 пропустит колебания с амплитудами $E'_e = E \cos\beta \sin\beta$ и $E'_o = E \sin\beta \cos\beta$.

Поскольку угол между плоскостью поляризации поляризатора Π_1 и оптической осью OO' кристаллической пластинки K равен 45° , то амплитуды колебаний $E'_e = E'_o = E/2$.

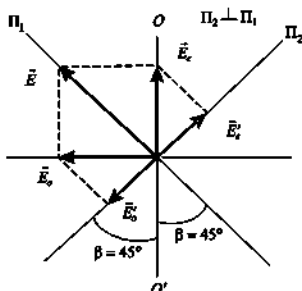


Рис. 11.2

При прохождении оптической системы между волнами возникает разность фаз $\pi + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – разность фаз, которую необыкновенная и обыкновенная волны приобрели при прохождении пластинки, а π – добавочная разность фаз, обусловленная скрещенным положением поляризаторов (что непосредственно иллюстрирует рис. 11.2).

Результирующую амплитуду E' волны, прошедшей через поляризатор Π_2 , можно рассчитать по формуле (3.1):

$$E'^2 = 2\left(\frac{E}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{E}{2}\right)^2 \cos(\pi + \Delta\varphi) = E^2(1 - \cos\Delta\varphi)/2 = E^2 \sin^2(\Delta\varphi/2). \quad (11.4)$$

Используя соотношения $I'_1 \sim E'^2$ и $I' \sim E^2$, получим, что при $\Pi_1 \perp \Pi_2$ интенсивность света I'_1 , вышедшего из поляризатора Π_2 ,

$$I'_1 = I \sin^2(\Delta\varphi/2), \quad (11.5)$$

где I – интенсивность света, прошедшего через поляризатор Π_1 .

Интенсивность света I'_1 зависит от разности фаз $\Delta\varphi$ (формула (11.1)). Если разность фаз, вносимая кристаллической пластинкой, кратна 2π (т.е. $\Delta\varphi = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$), то интенсивность $I'_1 = 0$; если разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами $\Delta\varphi = \pi m'$, где $m' = 1, 3, 5, \dots$, то интенсивность достигает максимума ($I'_1 = I$).

б) Рассмотрим случай, когда плоскости пропускания поляризаторов параллельны ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$, рис. 11.3). Положение плоскостей поляризации

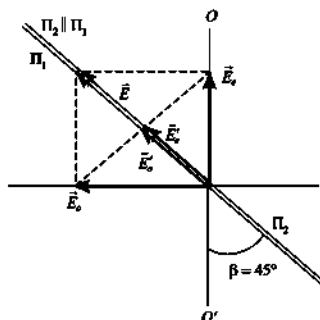


Рис. 11.3

поляризаторов обозначено линиями Π_1 и Π_2 , а положение оптической оси кристаллической пластинки K — линией OO' .

Как и в пункте а), из кристаллической пластинки выйдут две ортогонально поляризованные когерентные волны (обыкновенная и необыкновенная) с разностью фаз $\Delta\varphi$ и амплитудами E_e и E_o . Анализатор Π_2 пропустит колебания только в одной плоскости с амплитудами $E'_e = E_e \cos \Delta\varphi$ и $E'_o = E_o \sin \Delta\varphi$.

Амплитуду E' как результат интерференции обыкновенной и необыкновенной волн можно определить как по формуле (3.1), так и графически с помощью векторной (фазовой) диаграммы (см. гл. 4, методика построения спирали Френеля), на которой длины E'_e и E'_o векторов численно равны амплитудам соответствующих колебаний, а их взаимная ориентация определяется поворотом одного вектора относительно другого на величину фазового сдвига $\Delta\varphi$ (рис. 11.4) (здесь использовано предположение, что обыкновенная волна отстает по фазе на $\Delta\varphi$).

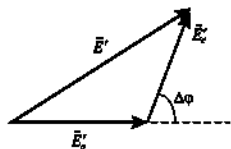


Рис. 11.4

Определим амплитуду E' с помощью векторной (фазовой) диаграммы (рис. 11.4). Согласно теореме косинусов

$$E'^2 = 2\left(\frac{E}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{E}{2}\right)^2 \cos \Delta\varphi = E^2(1 + \cos \Delta\varphi)/2 = E^2. \quad (11.6)$$

Именно величина E'^2 определяет интенсивность волны ($I'_\parallel = E'^2$), прошедшей через поляризатор Π_2 при условии $\Pi_1 \parallel \Pi_2$. Следовательно,

$$I'_\parallel = I \cos^2(\Delta\varphi/2). \quad (11.7)$$

В том случае, когда разность фаз, вносимая кристаллической пластинкой, кратна 2π (т.е. $\Delta\varphi = 2\pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$), то интенсивность достигает максимального значения ($I'_\parallel = I$).

Если разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами $\Delta\varphi = \pi m'$, где $m' = 1, 3, 5, \dots$, то $I'_\parallel = 0$.

Из сравнения полученных формул (11.5) и (11.7) следует, что интенсивность I'_\perp и I'_\parallel оказываются «дополнительными», т.е. в сумме они дают интенсивность света I , прошедшего через поляризатор Π_1 .

Задача 11.2. Свет с длиной волны λ падает на систему, которая состоит из компенсатора Бабиня, помещенного между двумя скрещенными

ми поляризаторами ($\Pi_1 \perp \Pi_2$). Плоскости поляризации поляризаторов составляют угол $\beta = 45^\circ$ с оптическими осями клиньев компенсатора. Показатели преломления кварца обыкновенной и необыкновенной волн равны соответственно n_o и n_e . Найти ширину интерференционной полосы, если преломляющий угол клиньев компенсатора θ .

Решение. Компенсатор Бабине состоит из двух слабо скошенных кварцевых клиньев с одинаковыми преломляющими углами. При этом оптическая ось OO' одного клина ориентирована параллельно его ребру, другого — перпендикулярно к нему (рис. 11.5). Первый клин неподвижен, второй может перемещаться относительно первого вверх и вниз, но при этом обращенные друг к другу поверхности клиньев остаются параллельными друг другу.

Пусть d_1 и d_2 — толщины клиньев компенсатора Бабине в некотором определенном месте, где узкий пучок плоскополяризованного света падает нормально на внешнюю грань компенсатора. Далее свет распространяется в прежнем направлении, пространственного разделения необыкновенной и обыкновенной волн нет, так как оптическая ось первого клина перпендикулярна к направлению распространения.

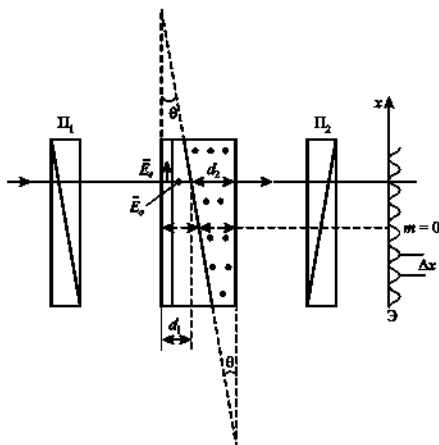


Рис. 11.5

Кварц — положительный одноосный кристалл ($n_e > n_o$), поэтому обыкновенная и необыкновенная волны будут распространяться в первом клине с разными фазовыми скоростями ($V_e = c/n_e, V_o = c/n_o, V_e < V_o$). Следовательно, после прохождения пути геометрической длиной d_1 в первом клине волны приобретают оптическую разность хода

$$\Delta_1 = (n_e - n_o)d_1,$$

что соответствует наличию между обыкновенной и необыкновенной волнами разности фаз

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d_1.$$

После прохождения оптического контакта клиньев волны распространяются во втором клине, вырезанном перпендикулярно к оптической оси. Поэтому та волна, которая была обыкновенной в первом клине, становится необыкновенной во втором, и наоборот, необыкновенная волна в первом клине становится обыкновенной во втором.

Поэтому после прохождения пути геометрической длиной d_2 во втором клине оптическая длина хода одной волны будет $l_1 = n_e d_1 + n_o d_2$, другой волны — будет $l_2 = n_o d_1 + n_e d_2$.

Следовательно, после прохождения обыкновенной и необыкновенной волн через компенсатор Бабинне оптическая разность хода на выходе из компенсатора

$$\Delta = (n_e - n_o)(d_1 - d_2), \quad (11.8)$$

что соответствует сдвигу фаз между волнами

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)(d_1 - d_2).$$

На выходе из компенсатора в том месте, где свет проходит одинаковые толщины обоих клиньев ($d_2 = d_1$), между обыкновенной и необыкновенной волнами не возникает никакой разности фаз (т.е. $\Delta\varphi = 0$). В любом другом месте, где свет пройдет толщины клиньев $d_1 \neq d_2$ между волнами возникнет разность фаз $\Delta\varphi$ (как $\Delta\varphi > 0$, так и $\Delta\varphi < 0$). Линии, соответствующие одинаковой разности фаз, имеют форму прямых, параллельных ребру компенсатора.

Поляризатор P_2 (в положении $P_1 \perp P_2$) помещен за компенсатором Бабинне (рис. 11.5). Интенсивность света I'_\perp , выходящего из поляризатора P_2 , определяется формулой (11.3).

При наблюдении через поляризатор Π_2 чередующиеся равноотстоящие темные полосы ($I'_\perp = 0$) (см. задачу 11.1) будут наблюдаться в местах, удовлетворяющих условию $\Delta r = 2m\lambda$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, что соответствует оптической разности хода волн, кратной длине волны (т.е. $\Delta = m\lambda$). Система равноотстоящих темных полос будет располагаться симметрично относительно нулевой ($m = 0$) темной полосы, которая соответствует тому месту, где свет проходит одинаковые толщины обоих клиньев ($d_2 = d_1$).

Переход от каждой m -й темной полосы к следующей $(m + 1)$ -й темной полосе соответствует изменению оптической разности хода волн на одну длину волны λ :

$$\Delta_{m+1} - \Delta_m = \lambda.$$

Следовательно, при смещении вдоль интерференционной картины на ширину Δx одной темной полосы различие геометрических длин путей Δd волн (см. формулу (11.8)) при прохождении компенсатора составит

$$\Delta d = (d_1 - d_2)_{m+1} - (d_1 - d_2)_m = \frac{(m+1)\lambda}{(n_e - n_o)} - \frac{m\lambda}{(n_e - n_o)} = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)}.$$

Тогда с геометрической точки зрения ширине каждой интерференционной полосы соответствует значение $\Delta x = \frac{\Delta d}{\operatorname{tg} \theta}$. При малой величине угла θ клиньев компенсатора можно воспользоваться равенством $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. При этом условии

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\theta}.$$

При использовании немонахроматического света (широкой области спектра) можно получить ряд хроматических эффектов (т.е. окрашенную интерференционную картину) вследствие зависимости как положения, так и ширины интерференционной полосы от длины волны λ .

Задача 11.3. На кварцевый клин, максимальная толщина которого $d_m = 0,5$ мм, к одной из его граней нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм, поляризованный по кругу. Оптическая ось OO' клина параллельна его ребру. Плоскость поляризации анализатора Π составляет угол $\beta = 45^\circ$ с ребром клина. Показатели преломления кварца равны соответственно $n_o = 1,54$ и $n_e = 1,55$. Найти количество наблюдаемых темных полос.

Решение. На рис. 11.6 представлена оптическая схема эксперимента, описанного в задаче.

Световая волна в кварцевом клине испытывает двулучепреломление: две (необыкновенная и обыкновенная) когерентные и поляризованные

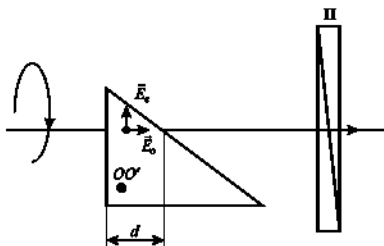


Рис. 11.6

взаимно ортогонально волны распространяются в одном и том же направлении, но с разными фазовыми скоростями ($V_e < V_o$). После прохождения пути геометрической длиной d разность фаз между волнами

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d. \quad (11.9)$$

При угле $\beta = 45^\circ$ между плоскостью поляризации анализатора II и оптической осью клина интенсивность света на выходе из поляризатора определяется выражением (см. анализ света круговой поляризации с помощью пластинки $\lambda/4$)

$$I = E^2(1 + \sin \Delta\varphi).$$

Если разность фаз, приобретаемая обыкновенной и необыкновенной волнами в клине, удовлетворяет условию $\Delta\varphi = 3\pi/2, 7\pi/2, \dots, (2m' + 1)\pi/2$, где $m' = 1, 3, 5, \dots$, то интенсивность света, прошедшего через поляризатор, будет минимальной (т.е. наблюдается темная полоса). А если разность фаз волн удовлетворяет условию $\Delta\varphi = \pi/2, 5\pi/2, \dots, (2m + 1)\pi/2$, где $m = 0, 2, 4, \dots$, то интенсивность света, прошедшего через поляризатор, будет максимальной (т.е. наблюдается светлая полоса).

По мере изменения разности фаз $\Delta\varphi$ волн в клине (см. формулу (11.9)), в поле зрения будут видны чередующиеся светлые и темные полосы. Тогда выражение

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$$

соответствует условию наблюдения m -й светлой полосы.

Следовательно, при максимальной толщине клина d_m общее количество наблюдаемых полос с учетом условия задачи

$$m = 2 \frac{d_m}{\lambda} (n_e - n_o) - \frac{1}{2} \approx 2 \frac{d_m}{\lambda} (n_e - n_o) \approx 20.$$

В этом случае количество темных полос, которые соответствуют нечетным m ,

$$k = \frac{d_m}{\lambda} (n_e - n_o) = 10.$$

Задача 11.4. При наблюдении интерференции в оптической системе, которая представлена на рис. 11.7, на поверхности пластинки можно наблюдать темный «мальтийский крест» (рис. 11.8). Какие изменения нужно произвести с элементами оптической системы, чтобы повернуть весь «крест» в его плоскости на некоторый угол?

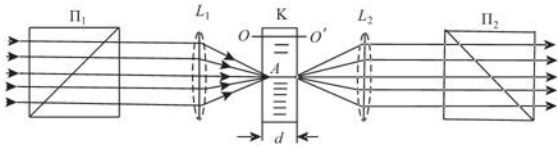


Рис. 11.7

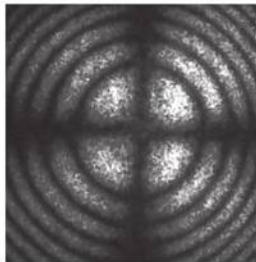


Рис. 11.8

Решение. Параллельный пучок света, прошедший через поляризатор Π_1 , фокусируется с помощью линзы L_1 на входную поверхность плоскопараллельной кристаллической пластинки K . В простейшем случае пластинка вырезана из одноосного кристалла перпендикулярно к оптической оси OO' и ориентирована так, что оптическая ось совпадает с осью симметрии конуса сходящегося светового пучка (см. рис. 11.7). За пластинкой находится линза L_2 и поляризатор Π_2 , плоскость поляризации которого расположена в скрещенном положении относительно плоскости поляризации Π_1 . В результате прохождения света через всю оптическую систему в фокальной плоскости линзы L_2 образуется интерференционная картина, которую можно наблюдать с помощью окуляра, сфокусированного на эту фокальную плоскость.

Характерной чертой такой картины является то, что в случае, когда плоскости поляризации поляризаторов Π_1 и Π_2 скрещены, а пластинка K вырезана из одноосного кристалла перпендикулярно к оптической оси, интерференционные полосы имеют вид системы концентрических темных и светлых окружностей, пересеченных темным «мальтийским крестом» по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 11.8).

Рассмотрим более подробно прохождение через кристаллическую пластинку K плоскополяризованной монохроматической волны, которая падает на поверхность пластинки под углом θ_1 (рис. 11.9).

Согласно закону Снеллиуса внутри кристаллической пластинки будут распространяться с разными скоростями две преломленные световые волны (обыкновенная и необыкновенная) под углами преломления θ_{2o} и θ_{2e} . Обыкновенная (o) и необыкновенная (e) волны когерентные и плоскополяризованные взаимно ортогонально ($\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$). Из

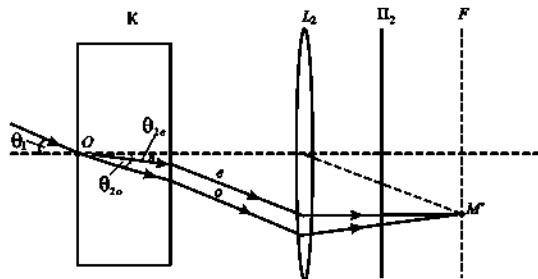


Рис. 11.9

пластинки К обе волны выйдут параллельно падающей волне, так что линзой L_2 они соберутся в одну точку M' в ее фокальной плоскости F .

После прохождения через кристаллическую пластинку толщиной d обыкновенная и необыкновенные волны приобретут разность фаз $\Delta\varphi$ не только за счет разности показателей преломления n_0 и n_e , но и за счет различных углов преломления. Поскольку углы преломления θ_{10} , θ_{2e} различаются очень незначительно, разность фаз двух волн

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o) \frac{d}{\cos\theta_2},$$

где θ_2 — некоторая средняя величина угла преломления (ситуация аналогична той, при которой наблюдаются полосы равного наклона, см. гл. 3). Поляризатор P_2 приводит световые колебания векторов \vec{E}'_e и \vec{E}'_o к одной плоскости (см. рис. 11.2) и тем самым обеспечивает условие интерференции волн в фокальной плоскости линзы L_2 .

Через точку A кристаллической пластинки проходит множество волн падающего сходящегося светового пучка (см. рис. 11.7). Каждому направлению падающей волны на выходе из кристаллической пластинки соответствуют две преломленные световые волны (см. рис. 11.9).

Изохроматическая поверхность (т.е. поверхность равной разности фаз) — геометрическое место точек, для которых разность фаз двух интерферирующих волн является постоянной величиной ($\Delta\varphi = \text{const}$). Сечение таких поверхностей выходной плоскостью кристалла определяет вид изохроматических линий — концентрических темных и светлых окружностей с центрами на оптической оси кристаллической пластинки К, — которые и наблюдаются в фокальной плоскости линзы L_2 .

При ортогональной ориентации поляризаторов ($P_1 \perp P_2$) минимумы интенсивности будут наблюдаться при разности фаз $\Delta\varphi = 2m\pi$ (т.е. при разности хода $\Delta = m\lambda$), максимумы — при $\Delta\varphi = \pi$ (т.е. $\Delta = (m + 1/2)\lambda$). Однако интерференционная картина (коноскопическая фигура) не исчерпывается системой концентрических окружностей — минимумов и максимумов (рис. 11.9).

Интерференционная картина характеризуется еще одной системой линий — так называемых *изогир* — совокупностью точек с одинаковой величиной угла β , который плоскости поляризации поляризаторов составляют с оптической осью кристаллической пластинки. Для главных изогир (при соотношении $\sin 2\beta = 0$) интенсивность света, прошедшего через анализатор, равна нулю (на основании формулы $I'_\perp = I \sin^2 2\beta \times \sin^2(\Delta\varphi/2)$, которая является более общим видом формулы (11.5)).

Главные изогирь имеют вид темного распыльчатого «мальтийского креста», ветви которого параллельны плоскостям поляризации поляризаторов P_1 и P_2 (рис. 11.8). Центр этой картины лежит на оси оптической системы. При вращении кристаллической пластинки вокруг оси оптической системы вид изохромат и изогирь остается неизменным.

Поясним причину образования именно темного «мальтийского креста». Если свет будет распространяться в главных (взаимно перпендикулярных) плоскостях кристаллической пластинки, то двойного лучепреломления происходить не будет. В этом случае из пластинки будет выходить плоскополяризованный свет с первоначальным направлением поляризации, которое задает поляризатор P_1 . Если плоскости поляризации поляризаторов P_1 и P_2 скрещены, то свет с таким направлением поляризации не будет пропущен через оптическую систему поляризатором P_2 , что и приведет к образованию темного «мальтийского креста». Для того чтобы повернуть «мальтийский крест», необходимо повернуть на некоторый одинаковый угол оба поляризатора (оставив их при этом в скрещенном положении).

Задача 11.5. Монохроматический свет (с интервалом длин волн от 400 нм до 700 нм), плоскополяризованный с помощью поляризатора P_1 , падает нормально на кристаллическую пластинку K_1 толщиной $d_1 = 0,02$ мм, вырезанную параллельно оптической оси. Угол β между плоскостью поляризации поляризатора P_1 и оптической осью пластинок равен 45° . Для всего видимого спектра разность показателей преломления пластинки $\Delta n_1 = 0,05$. На пластинку K_1 положили в параллельном положении другую пластинку K_2 толщиной $d_2 = 0,02$ мм с разностью показателей преломления $\Delta n_2 = 0,025$. За пластинками расположен поляризатор P_2 , плоскость поляризации которого ортогональна плоскости поляризации поляризатора P_1 . Определить, в какой цвет будет окрашено поле зрения.

Решение. *Параллельным положением* называется такая ориентация пластинок относительно друг друга, при которой направления распространения волн с большей (меньшей) скоростью в пластинках совпадают. При этом положении пластинок разность хода между необыкновенной и обыкновенной волнами, прошедшими обе пластинки, $\Delta = d_1 \Delta n_1 + d_2 \Delta n_2$, что соответствует наличию разности фаз $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ между волнами.

Если поляризаторы расположены так, что их плоскости поляризации ортогональны, то максимальная интенсивность монохроматического света, прошедшего через оптическую систему, определяется форму-

лой (11.5), из которой видно, что если разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами $\Delta\varphi = \pi m'$, что соответствует оптической разности хода волн $\Delta = \frac{m'\lambda}{2}$, где $m' = 1, 3, 5, \dots$, то интенсивность достигает максимума.

Для численных значений, указанных в условии задачи, $\Delta = 1,5$ мкм. Поле зрения окрашено в красный цвет ($\lambda = 600$ нм) (максимумы третьего порядка, т.е. $m' = 5$).

Задача 11.6. Плоская монохроматическая поляризованная по кругу световая волна интенсивностью I_0 падает нормально на систему двух соприкасающихся поляроидных полуплоскостей, плоскости поляризации которых расположены взаимно ортогонально. Пренебрегая отражением и поглощением света в поляроидах, найти интенсивность света в точке M , расположенной в плоскости, перпендикулярной к поляроидам и проходящей через границу их раздела.

Решение. Представим прохождение плоской монохроматической поляризованной по кругу световой волны через систему поляроидных полуплоскостей как наложение двух явлений: 1) поляризации света, которая полностью определена ориентацией плоскостей поляризации поляроидов; 2) дифракции Френеля уже плоскополяризованной волны от прямолинейного края полуплоскости.

Падающую световую волну, поляризованную по кругу, можно представить как суперпозицию двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях (совпадающих соответственно с плоскостями поляризации поляроидов) и имеющих разность фаз $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$E_{0\perp} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t, \quad E_{0\parallel} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где E_0 — амплитудное значение светового вектора в падающей волне, которое связано с ее интенсивностью соотношением

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2.$$

Каждый поляроид пропускает только ту из двух волн, плоскость поляризации которой совпадает с плоскостью поляризации данного поляроида.

Поскольку поляроиды представляют собой полуплоскости, а точка M находится на линии границы их раздела (т.е. на краю геометрической

тени), то вследствие дифракции Френеля на краю полуплоскости (см. гл. 4) в данную точку приходит только

$$E_{M\perp} = \frac{1}{2} E_{0\perp} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \cos \omega t, \quad E_{M\parallel} = \frac{1}{2} E_{0\parallel} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Это значит, что первая и вторая плоскополяризованные волны обес­печивают в точке M следующие интенсивности:

$$I_{M\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot \left(\frac{E_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2,$$

$$I_{M\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot \left(\frac{E_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2.$$

Поскольку эти волны поляризованы взаимно ортогонально, то ин­терференции не наблюдается и результирующая интенсивность в точке M будет равна сумме интенсивностей, т.е.

$$I_M = I_{M\perp} + I_{M\parallel} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2 = \frac{I_0}{4}.$$

Свет в точке M будет поляризован по кругу.

Интенсивность падающей волны прямо пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора (т.е. $I_0 = E_0^2$) и не зависит от разности фаз $\Delta\varphi$ составляющих $E_{0\perp}$, $E_{0\parallel}$, следовательно, и в точке наблюдения M интенсивности $I_{M\perp}$, $I_{M\parallel}$ волн, которые пройдут через поляризаторы, а так­же результирующая интенсивность I_M не зависят от значения разности фаз $\Delta\varphi$. Значит, при падении на поляризаторы как плоской монохромати­ческой волны естественного света, так и плоскополяризованной волны интенсивность в точке наблюдения $I_M = \frac{I_0}{4}$.

Задача 11.7. Плоская неполяризованная монохроматическая волна интенсивностью I_0 падает нормально на экран, в котором имеется круг­лое отверстие, представляющее собой первую зону Френеля для точки наблюдения M . Найти интенсивность света в точке наблюдения, если отверстие перекрыть двумя одинаковыми поляризаторами, плоскости поляризации которых взаимно ортогональны и граница их раздела про­ходит по диаметру отверстия.

Решение. Воспользуемся подходом, который применялся при решении предыдущей задачи. Представим прохождение плоской моно-

хроматической волны естественного света через систему перекрывающихся круглое отверстие (первую зону Френеля) одинаковых поляризаторов, плоскости поляризации которых взаимно ортогональны и граница раздела которых проходит по диаметру отверстия как наложение нескольких явлений: поляризации света, полностью определяемой ориентацией плоскостей поляризации поляризаторов, дифракции Френеля от прямолинейного края полуплоскости и дифракции Френеля волны на круглом отверстии (соответствующего первой зоне Френеля для точки наблюдения M).

Если I_0 — интенсивность плоской монохроматической волны естественного света, то после прохождения поляризаторов, граница раздела которых проходит по диаметру отверстия, в точке наблюдения M будем иметь волну круговой поляризации интенсивностью $I = \frac{I_0}{4}$ (см. задачу 11.6).

Вследствие дифракции на круглом отверстии, размер которого соответствует первой зоне Френеля, интенсивность света в центре дифракционной картины (в точке наблюдения M) в 4 раза выше, чем интенсивность I поляризованной волны (см. гл. 4, задача 4.3).

В итоге интенсивность в точке наблюдения

$$I_M = 4I = I_0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Между двумя скрещенными поляризаторами ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) находится клиновидная кристаллическая пластинка, вырезанная из исландского шпата так, что оптическая ось пластинки параллельна ребру клина. Угол при вершине клина $\theta = 4,72'$. Оптическая ось пластинки образует с плоскостями поляризации поляризаторов Π_1 и Π_2 угол $\beta = 45^\circ$. На выходе за поляризатором Π_2 в разных точках вдоль грани пластинки наблюдают систему чередующихся равноотстоящих друг от друга и параллельных ребру пластинки светлых (темных) полос. Найти расстояние Δx между серединами светлых полос при прохождении через систему монохроматического света с длиной волны $\lambda = 486$ нм. Для данной длины волны показатели преломления исландского шпата обыкновенной и необыкновенной волн соответственно $n_o = 1,668$ и $n_e = 1,491$.

Ответ: $\Delta x = 2,0$ мм.

2. Монохроматический плоскополяризованный свет падает нормально на грань двучепреломляющей клиновидной пластинки, оптическая ось которой параллельна ребру клина. Оптическая ось пластинки образует с плоскостью поляризации падающего света угол $\beta = 45^\circ$.

а) Определить, как будет выглядеть поверхность клиновидной пластинки, если ее рассматривать через поляризатор Π (анализатор), плоскость поляризации которого:

- 1) параллельна оптической оси пластинки;
- 2) параллельна плоскости поляризации падающего света;
- 3) перпендикулярна к плоскости поляризации падающего света.

б) Каков характер поляризации проходящего через оптическую систему света?

О т в е т: а) 1) поверхность клина будет освещена равномерно; 2), 3) на поверхности клиновидной пластинки наблюдаются системы чередующихся равноотстоящих друг от друга и параллельных ребру клина светлых и темных интерференционных полос; б) если после прохождения клиновидной пластинки разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами $\Delta = m\lambda$ (m — целое число), то выходящий свет будет плоскополяризованным с такой же, как и в падающем свете, ориентацией плоскости поляризации; если $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, то выходящий свет будет плоскополяризованным с ориентацией плоскости поляризации перпендикулярно к плоскости поляризации падающего света; если $\Delta = (m + 1/4)\lambda$, то выходящий свет будет иметь круговую поляризацию. При других значениях Δ выходящий свет будет эллиптически поляризованным.

3. Немонохроматический свет (с интервалом длин волн от 400 нм до 700 нм), плоскополяризованный с помощью поляризатора Π_1 , падает нормально на кристаллическую пластинку K_1 толщиной $d_1 = 0,020$ мм, вырезанную параллельно оптической оси. Угол β между плоскостью поляризации поляризатора Π_1 и оптической осью пластинки равен 45° . Для всего видимого спектра разность показателей преломления пластинки $\Delta n_1 = 0,050$. На пластинку K_1 положили в параллельном положении другую пластинку K_2 толщиной $d_2 = 0,020$ мм с разностью показателей преломления $\Delta n_2 = 0,025$. За пластинками расположен поляризатор Π_2 , плоскость поляризации которого ортогональна плоскости поляризации поляризатора Π_1 . Затем и пластинку, и поляризатор Π_2 повернули на угол 90° от первоначального положения. В какой цвет будет окрашено поле зрения?

О т в е т: поле зрения будет окрашено в зеленый цвет с длиной волны $\lambda = 500$ нм (максимум первого порядка), при этом плоскости поляриза-

ции поляризаторов параллельны, а оптические оси пластинок расположены взаимно ортогонально.

4. На кристаллическую пластинку, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, падает сходящийся пучок поляризованных лучей так, что ось конуса сходящихся лучей совпадает с оптической осью пластинки. В результате интерференции на поверхности пластинки можно наблюдать «мальтийский крест». Какие изменения нужно сделать с элементами оптической системы, чтобы повернуть весь «крест» в его плоскости на некоторый угол?

О т в е т: необходимо повернуть на некоторый одинаковый угол оба поляризатора (оставив их при этом либо в скрещенном, либо в параллельном положении).

5. Плоская монохроматическая световая волна интенсивностью I_0 падает нормально на систему двух соприкасающихся поляроидных полуплоскостей, плоскости поляризации которых расположены взаимно ортогонально. Пренебрегая отражением и поглощением света в поляроидах, найти интенсивность света в точке, расположенной в плоскости, перпендикулярной к поляроидам и проходящей через границу их раздела, если падающий свет естественный.

О т в е т: $I = \frac{I_0}{4}$.

6. Плоская монохроматическая волна естественного света интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие, которое представляет собой первую зону Френеля для точки наблюдения M . Найти интенсивности света в точке наблюдения, если отверстие перекрыть двумя одинаковыми поляризаторами, плоскости поляризации которых взаимно ортогональны и граница их раздела проходит по окружности, ограничивающей первую половину зоны Френеля.

О т в е т: $I_M = 2I_0$.

7. В интерференционной схеме Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 11.10) помещен поляризатор Π , плоскость поляризации которого параллельна ориентации щелей. Щели узкие (порядка длины волны), расстояние между щелями значительно больше ширины каждой щели. Как изменится интерференционная картина на экране, если перед каждой щелью S_1 и S_2 поместить одинаковые кристаллические пластинки $\lambda/4$, оптические оси которых ориентированы взаимно ортогонально друг другу (соответственно перпендикулярно и параллельно направлению щелей)? Что произойдет, если поляризатор Π повернуть на угол 90° ?

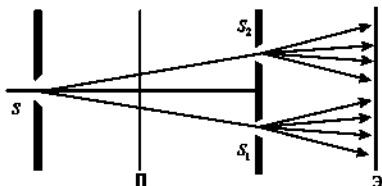


Рис. 11.10

Объяснить изменения, которые произойдут в интерференционной картине, если поляризатор убрать.

Отв е т: при помещении пластинок $\lambda/4$ интерференционные полосы на экране смещаются на четверть ширины полосы. При повороте поляризатора на угол 90° интерференционные полосы на экране смещаются в противоположную сторону на четверть ширины полосы относительно начального положения. Если поляризатор убрать, то интерференционные полосы наблюдаться не будут.

8. В условиях предыдущей задачи заменить пластинки $\lambda/4$ на пластинки $\lambda/2$.

Отв е т: при использовании пластинки $\lambda/2$ интерференционные полосы на экране смещаются на половину ширины полосы. При повороте поляризатора на угол 90° интерференционные полосы на экране смещаются в противоположную сторону на половину ширины полосы относительно начального положения. Если поляризатор убрать, то интенсивность интерференционных полос возрастет в 2 раза.

9. Почему демонстрации по интерференции поляризованных волн в большинстве случаев проводят с очень тонкими кристаллическими пластинками (кварца или исландского шпата) в монохроматическом свете? Почему, используя пластинки из исландского шпата ($n_o = 1,66$; $n_e = 1,49$) даже малой толщины тяжело получить интерференционную картину в некогерентном свете?

Отв е т: оптическая разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами, выходящими из кристаллической анизотропной пластинки, существенно зависит от ее толщины. Для получения интерференционной картины необходимо выполнение следующего условия: оптическая разность хода должна быть меньше длины когерентности

(т.е. $\Delta < l_{\text{ког}}$). У исландского шпата очень большая разность показателей преломления ($n_o = 1,66$, $n_e = 1,49$) соответственно для обыкновенного и необыкновенного лучей (волн), следовательно, даже для пластинок малой толщины получаются большие разности хода в соответствии с формулой $\Delta = (n_o - n_e)d$. Длина когерентности световой волны непосредственно связана со степенью монохроматичности ($\Delta\lambda/\lambda$): чем больше последняя, тем больше и длина когерентности, поэтому при использовании немонохроматического света $l_{\text{ког}}$ мала. Значит, при использовании даже тонкой пластинки из исландского шпата выполнение условия $\Delta < l_{\text{ког}}$, необходимого для наблюдения интерференции в немонохроматическом свете, невозможно.

12

ОПТИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ
И НАВЕДЕННАЯ
АНИЗОТРОПИЯ

Оптическая анизотропия — различие оптических свойств среды в зависимости от направления распространения в ней оптического излучения (света) и ориентации его поляризации. Различают естественную и наведенную (искусственную) оптическую анизотропию. Ее важнейшие проявления — двойное лучепреломление (см. гл. 10) и вращение плоскости поляризации в оптически активных веществах.

Оптически активные вещества подразделяются на два типа. К первому типу относятся вещества, которые оптически активны в любом агрегатном состоянии (сахара), так как оптическая активность обусловлена асимметричным строением самих молекул, ко второму типу — вещества, которые оптически активны лишь в кристаллической фазе (кварц), причем оптическая активность является свойством кристалла как целого.

При однократном прохождении слоя активного вещества толщиной d (кварц) монохроматический свет, предварительно прошедший через поляризатор, останется плоскополяризованным, но при этом происходит поворот плоскости поляризации на угол

$$\psi = \alpha d, \quad (12.1)$$

где α — постоянная вращения, которая зависит от рода вещества и очень существенно — от длины волны λ (в первом приближении $\alpha \sim \frac{1}{\lambda^2}$).

Угол поворота ψ плоскости поляризации оптически активными чистыми жидкостями (скипидар, камфора, никотин) или растворами оптически активных веществ (фруктозы, сахарозы) в прозрачных растворителях (в воде) определяется соотношением

$$\psi = [\alpha] \rho d \text{ или } \psi = [\alpha] C d, \quad (12.2)$$

где $[\alpha]$ — удельная постоянная вращения вещества; ρ — плотность жидкости; d — толщина слоя оптически активного раствора; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Удельная постоянная вращения вещества α численно определяется величиной угла (в градусах), на который поворачивается плоскость поляризации при прохождении плоскополяризованного света через 10-сантиметровую толщину активного раствора, имеющего концентрацию 1 г/мл (при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и длине волны $\lambda = 589,3$ нм). Удельное вращение считают положительным для правовращающих веществ (т.е. тех, которые поворачивают плоскость поляризации по ходу часовой стрелки, если смотреть навстречу распространяющемуся световому лучу) и отрицательным — для левовращающих веществ.

Наведенная (искусственная) оптическая анизотропия возникает в средах, чаще всего от природы оптически изотропных, под действием внешних воздействий, меняющих локальную симметрию и выделяющих в таких средах определенное направление.

Эффект Керра — квадратичный электрооптический эффект, возникновение двойного лучепреломления в оптически изотропных веществах под действием внешнего однородного электрического поля. Он обусловлен главным образом гиперполяризуемостью среды, происходящей вследствие переориентации дипольных моментов атомов или молекул под действием внешнего однородного электрического поля. В результате среда становится оптически анизотропной, двулучепреломляющей, т.е. по своим оптическим свойствам подобной одноосному кристаллу, в котором направление оптической оси совпадает с направлением силовой линии внешнего электрического поля. При прохождении монохроматического света через такое оптически анизотропное вещество разность показателей преломления между необыкновенной и обыкновенной волнами определяется выражением

$$(n_e - n_o) = B \lambda E^2,$$

где B — постоянная Керра для данного вещества; λ — длина волны света; E — модуль напряженности внешнего однородного электрического поля. Для большинства веществ $n_e > n_o$ (что соответствует анизотропии положительного кристалла).

В искусственно анизотропной среде при распространении монохроматического света в направлении, перпендикулярном к силовым линиям электрического поля, на пути длиной d между необыкновенной и обыкновенной волнами возникает оптическая разность хода

$$\Delta = (n_e - n_o)d = V\lambda dE^2, \quad (12.3)$$

которая соответствует разности фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi VdE^2.$$

Благодаря квадратичной зависимости (т.е. $\Delta \sim E^2$ и $\Delta\varphi \sim E^2$) величины Δ и $\Delta\varphi$ не зависят от направления электрического поля, т.е. изменение направления поля на противоположное не приводит к изменению оптической разности хода и разности фаз между необыкновенной и обыкновенной волнами.

Важно отметить малую инерционность эффекта Керра: при включении электрического поля анизотропия вещества проявляется уже через промежуток времени порядка 10^{-12} с. Подавая на обкладки конденсатора переменное напряжение, можно использовать ячейку Керра для прерывания (модуляции) оптического пучка вплоть до частот порядка 10^9 П.

Помимо квадратичного электрооптического эффекта Керра под действием внешнего электрического поля может наблюдаться линейный электрооптический эффект Пожкельса. *Эффектом Пожкельса* называется возникновение двойного лучепреломления в кристаллах, не обладающих центром симметрии и помещенных в постоянное или переменное электрическое поле, причем эффект линейно зависит от напряженности E электрического поля.

Эффект Фарадея (продольный) — магнитооптический эффект, проявляющийся в том, что при распространении плоскополяризованного света через вещество, помещенное в постоянное продольное магнитное поле, наблюдается поворот плоскости поляризации.

В области не очень сильных магнитных полей угол поворота ψ плоскости поляризации можно определить как

$$\psi = VdH, \quad (12.4)$$

где V — постоянная Верде, или постоянная магнитного вращения для данного вещества, которая зависит от длины волны; d — длина хода волны в оптически анизотропной среде; H — модуль напряженности магнитного поля в направлении распространения света.

Важной особенностью эффекта Фарадея является малая инерционность вследствие малого времени установления наведенной анизотропии (менее 10^{-9} с), что позволяет использовать этот эффект для высокочастотной модуляции света.

Провести существенное различие между естественным и магнитным вращением плоскости поляризации позволяет важная особенность эффекта Фарадея — невязанность (т.е. нарушение принципа обратимости).

Так, в среде с наведенной за счет эффекта Фарадея оптической активностью угол поворота плоскости поляризации можно увеличить за счет многократных прохождений плоскополяризованного света через слой вещества.

В то же время, если плоскополяризованный свет проходит дважды (в прямом и обратном направлениях) в средах с естественной оптической активностью, исходная поляризация света восстанавливается (т.е. суммарный угол поворота плоскости поляризации $\phi = 0$).

Для оптически активных веществ, помещенных в магнитное поле, может наблюдаться суперпозиция двух явлений — естественного вращения и магнитного вращения плоскости поляризации.

Существующие современные приборы (поляриметры) обладают очень высокой чувствительностью (измерение углов поворота плоскости поляризации в оптической области спектра порядка 10^{-6} – 10^{-7} градусов). Это позволяет детектировать чрезвычайно малые (порядка 10^{-12}) различия показателей преломления среды для волн, поляризованных по правому кругу и левому кругу.

Примеры решения задач

Задача 12.1. Ячейку Керра поместили между двумя скрещенными поляризаторами ($P_1 \perp P_2$) так, что направление силовых линий электрического поля в плоском конденсаторе составило угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов. Длина пластин (обкладок) конденсатора $l = 100$ мм, а пространство между ними заполнено нитробензолом (постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$ см/ V^2). Через систему проходит монохроматический свет. Определить число прерываний света в 1 с, если на обкладки конденсатора подать синусоидальное напряжение частотой $\nu = 10$ МГц, амплитудное значение модуля напряженности электрического поля $E_0 = 50$ кВ/см.

Решение. Ячейка Керра представляет собой помещенный в кювету с нитробензолом плоский конденсатор, на пластины которого подано переменное напряжение. Для наблюдения электрооптического эффекта Керра ячейка помещена между поляризаторами P_1 и P_2 , плоскости поляризации которых взаимноперпендикулярны (т.е. P_1 и P_2 скрещены, рис. 12.1).

При подаче синусоидального напряжения, которое изменяется с частотой $\nu = 10$ МГц, между пластинами конденсатора возникает синусоидальное электрическое поле. Под воздействием этого электрического поля молекулы нитробензола поляризуются и ориентируются вдоль силовых линий поля, обеспечивая проявление искусственно вызванных

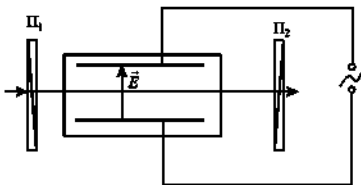


Рис. 12.1

анизотропных свойств этого вещества. В оптическом отношении ячейка Керра станет подобна одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению силовых линий поля и составляющей угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов Π_1 и Π_2 (по условию задачи).

Если пропустить теперь через ячейку Керра плоскополяризованный свет, который получен после прохождения естественного монохроматического света через поляризатор Π_1 , то амплитуды когерентных обыкновенной и необыкновенной волн будут одинаковыми, и в этом случае результат их дальнейшей интерференции будет выглядеть наиболее отчетливым.

Вычислим по формуле (12.3) максимальную оптическую разность хода необыкновенной и обыкновенной волн после прохождения слоя нитробензола толщиной d , численно равной длине пластин:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = B\lambda d E_0^2.$$

В общем случае интенсивность I линейно поляризованного света на выходе из поляризатора Π_2 будет зависеть от величины угла между плоскостями поляризации поляризаторов и от оптической разности хода между необыкновенной и обыкновенной волнами.

Свет через поляризатор Π_2 , скрещенный с поляризатором Π_1 , проходить не будет (т.е. будет наблюдаться прерывание света) (см. решение задачи 11, а) при условии, если разность хода $\Delta = m\lambda$, где λ — длина волны.

Следовательно, прерыванию света соответствует условие

$$B\lambda d E_0^2 = m\lambda,$$

где m — число прерываний за время, в течение которого модуль напряженности поля E возрастает от нуля до E_0 (т.е. $0 < t \leq T/4$).

Тогда за четверть периода число прерываний света $m = BdE_0^2$, при подстановке числовых значений из условия задачи получим $m = 5$ (так как берется целая часть).

За каждую четверть периода число прерываний равно m . Кроме того, прерывание будет происходить при $E = 0$, т.е. в моменты времени $t = 0$ и $t = T/2$. Таким образом, за период полное число прерываний $z = 4m + 2$, т.е. $z = 22$ (эти моменты отмечены на рис. 12.2 точками). Число прерываний света за 1 с вычислим по формуле

$$N = z\nu = (4BdE_0^2 + 2)\nu.$$

Подставив числовые значения, получим $N = 2,2 \cdot 10^8$ Пц.

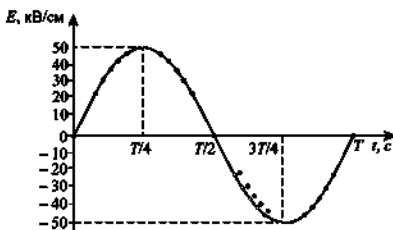


Рис. 12.2

З а м е ч а н и е. Следует особо отметить, что в случае, когда число m является строго целым без округления, окончательное число прерываний за период вычисляется по формуле $z = 4m$, так как некоторый момент прерывания принадлежит как к первой, так и ко второй четверти периода (т.е. на графике две точки для каждой четверти периода сливаются).

Задача 12.2. Ячейку Керра — конденсатор с исследуемой жидкостью — поместили между поляризаторами, плоскости поляризации которых параллельны ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$) и составляют угол $\beta = 45^\circ$ с направлением силовых линий электрического поля конденсатора (рис. 12.3). Длина хода волны в ячейке Керра (длина пластин конденсатора) d . Найти значение постоянной Керра для данной жидкости, если минимальное значение модуля напряженности электрического поля, при котором система не пропускает монохроматический свет, равно E .

Р е ш е н и е. Под действием электрического поля исследуемая жидкость в ячейке Керра становится оптически анизотропной и при про-

хождении линейно поляризованного (в плоскости пропускания поляризатора Π_1) монохроматического света в жидкости наблюдается явление двойного лучепреломления.

Вычислим по формуле (12.3) оптическую разность хода обыкновенной и необыкновенной волн после прохождения слоя исследуемой жидкости толщиной d :

$$\Delta = (n_e - n_o)d = B\lambda d E^2.$$

В данной задаче плоскости поляризации поляризаторов параллельны, поэтому, чтобы система (рис. 12.3) не пропускала монохроматический свет, после выхода из ячейки Керра свет должен иметь линейную поляризацию, ортогональную исходной.

Для того чтобы система (рис. 12.3) не пропускала свет, минимальная оптическая разность Δ хода волн должна быть равна $\lambda/2$, т.е.

$$B\lambda d E^2 = \lambda/2.$$

Следовательно, постоянная Керра исследуемой жидкости

$$B = \frac{1}{2\lambda d E^2}.$$

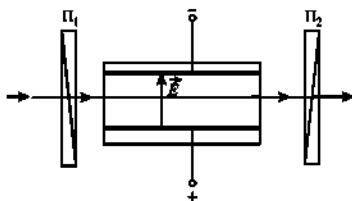


Рис. 12.3

Задача 12.3. Некоторое вещество поместили в продольное однородное магнитное поле, модуль напряженности которого равен H . Найти разность показателей преломления для право- и левополяризованных по кругу волн при распространении в веществе монохроматической плоскополяризованной волны с круговой частотой ω . Постоянная Верде вещества равна V .

Решение. Согласно гипотезе Френеля плоскополяризованную волну (световой вектор \vec{E}_0) можно представить как суперпозицию двух волн круговой поляризации с одинаковыми амплитудой и частотой, но поляризованными по правому кругу и левому кругу (соответственно векторов \vec{E}_+ и \vec{E}_-). Тогда вращение векторов \vec{E}_+ и \vec{E}_- с одинаковой скоростью соответствует колебанию результирующего светового вектора \vec{E}_0 исходной плоскополяризованной волны (см. рис. 12.4, а).

Пусть теперь такая волна распространяется в среде, в которой создано магнитное поле (рис. 12.4, б). Вектор напряженности внешнего магнитного поля \vec{H} направлен перпендикулярно к плоскости чертежа (от нас).

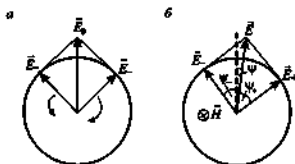


Рис. 12.4

Волны, поляризованные по правому кругу и левому кругу (соответственно \vec{E}_+ и \vec{E}_-), распространяются в оптически анизотропной среде с разными фазовыми скоростями (т.е. $V_+ \neq V_-$).

За время t при прохождении вещества, в котором посредством воздействия магнитного поля создана искусственная анизотропия, вектор \vec{E}_+ повернется по ходу часовой стрелки на угол

$$\psi_+ = \omega(t - Vd/V_+) = \omega(t - Vdn_+/c),$$

где V — постоянная Верде; d — толщина слоя анизотропного вещества (т.е. геометрическая длина хода волны в веществе); n_+ — показатель преломления вещества при распространении волны с правой круговой поляризацией (\vec{E}_+) со скоростью V_+ ; c — скорость распространения света в вакууме.

Аналогично за это же время вектор \vec{E}_- повернется против хода часовой стрелки на угол

$$\psi_- = \omega(t - Vd/V_-) = \omega(t - Vdn_-/c),$$

где n_- — соответствующий показатель преломления вещества при распространении волны с левой круговой поляризацией (\vec{E}_-) со скоростью V_- .

Если бы углы поворота были одинаковыми, то ориентация светового вектора \vec{E}_0 в пространстве не изменилась бы.

Будем считать, что $n_+ < n_-$, т.е. $V_+ > V_-$. Тогда полный угол поворота вектора \vec{E}_+ будет больше, чем вектора \vec{E}_- , и результирующий вектор \vec{E} повернется на угол

$$\psi = (\psi_+ - \psi_-)/2 = d\omega(n_- - n_+)/2c.$$

Результирующий вектор \vec{E} определяет новое положение плоскости поляризации монохроматической световой волны, т.е. световой вектор \vec{E} волны после прохождения слоя анизотропного вещества повернут на угол ψ относительно исходного положения \vec{E}_0 .

В то же время магнитооптический эффект Фарадея показывает, что угол ψ поворота плоскости поляризации волны можно определить по формуле (12.4). Поэтому для определения разности показателей преломления Δn для право- и левополяризованных по кругу волн справедливо соотношение

$$VdH = d\omega(n_- - n_+)/2c.$$

Следовательно, $\Delta n = 2cVH/\omega$.

Задача 12.4. Монохроматический плоскополяризованный свет проходит через трубку длиной d , наполненную оптически активным (правовращающим положительным) веществом. Трубка находится в продольном однородном магнитном поле, модуль напряженности которого H . Постоянная вращения этого вещества α , постоянная Верде V . Найти угол ψ , на который повернется плоскость поляризации при прохождении слоя этого вещества N раз.

Решение. Схема для наблюдения явления поворота плоскости поляризации представлена на рис. 12.5. Здесь Π_1 — поляризатор, с помощью которого получен плоскополяризованный свет, падающий на кювету с веществом, Π_2 — поляризатор (анализатор), плоскость поляризации которого изначально выставлена ортогонально плоскости поляризации поляризатора Π_1 , что позволяет в отсутствие кюветы на выходе из Π_2 иметь интенсивность $I = 0$.

При пропускании плоскополяризованного света через кювету с оптически активным веществом плоскость поляризации поворачивается

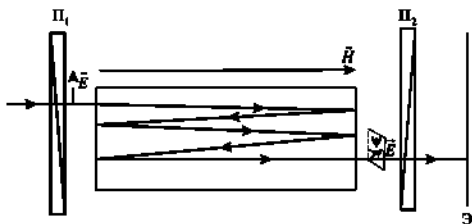


Рис. 12.5

на некоторый угол ψ . Вследствие этого поляризатор Π_2 пропускает излучение некоторой интенсивности. Если повернуть плоскость поляризации поляризатора Π_2 на тот же угол ψ , то на выходе из Π_2 (согласно закону Малюса) опять интенсивность $I = 0$.

Найдем угол поворота плоскости поляризации при прохождении через трубку, заполненную правовращающим положительным веществом как результат суперпозиции двух вращений — естественного и магнитного.

Оптически активное правовращающее вещество поворачивает плоскость поляризации падающего на него света, согласно формуле (12.1), на угол $\psi_1 = \alpha d$ по ходу часовой стрелки (если смотреть навстречу световому лучу). При изменении направления распространения света на противоположное естественное вращение сохраняется. Так как естественное вращение плоскости поляризации существенно зависит от направления распространения света в оптически активном веществе, т.е. после прохождения плоскополяризованного света через него вторично (или любое четное число раз с использованием отражения от зеркал (см. рис. 12.5)), положение плоскости поляризации будет восстанавливаться до исходного (т.е. поворота плоскости поляризации наблюдаться не будет и $\psi_1 = 0$). А при прохождении любое нечетное число раз слоя оптически активного вещества угол поворота плоскости поляризации монохроматического плоскополяризованного света составит $\psi_1 = \alpha d$.

Угол поворота ψ_2 плоскости поляризации в случае магнитного вращение (магнитооптический эффект Фарадея) при однократном прохождении слоя вещества толщиной d определяется формулой (12.4).

Направление поворота плоскости поляризации зависит от направления распространения света по отношению к направлению силовых

линий магнитного поля (т.е. \vec{H}). Так, для веществ, которые называют положительными, при совпадении направления распространения света и направления вектора напряженности \vec{H} магнитного поля поворот плоскости поляризации происходит по ходу часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего в направлении магнитного поля). При изменении направления распространения света после отражения от зеркала (см. рис. 12.5) направления распространения света и магнитного поля становятся противоположными. Но поворот плоскости поляризации по-прежнему происходит по ходу часовой стрелки (т.е. в том же направлении, что и при прохождении света в первоначальном направлении). Эта особенность позволяет увеличивать угол поворота плоскости поляризации за счет N -кратного прохождения света в оптически активном веществе до $\psi_2 = VdNH$.

Будем смотреть навстречу вышедшему из поляризатора Π_2 узкому световому пучку (т.е. в противоположном направлении магнитного поля), условно договоримся направление поворота плоскости поляризации по ходу часовой стрелки считать положительным. Результирующий угол поворота ψ монохроматического плоскополяризованного света при N -кратном прохождении оптически активного правовращающего вещества равен:

$$\psi = \alpha d - VdNH \quad (N = 1, 3, 5, \dots),$$

$$\psi = -VdNH \quad (N = 2, 4, 6, \dots).$$

Задача 12.5. Естественный монохроматический свет падает на систему двух скрещенных поляризаторов ($\Pi_1 \perp \Pi_2$), между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Найти минимальную толщину d_{\min} пластинки, при которой эта система будет пропускать часть η светового потока, если постоянная вращения кварца α .

Решение. Естественный свет после прохождения через поляризатор Π_1 становится плоскополяризованным. При этом ориентация светового вектора \vec{E} задается положением плоскости поляризации поляризатора Π_1 .

Плоскополяризованный свет падает на кварцевую пластинку, вырезанную перпендикулярно к оптической оси. В дальнейшем свет распространяется вдоль оптической оси в одноосном кристалле кварца, не испытывая двойного лучепреломления. Кристаллы кварца являются оптически активными, поэтому кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси, вращает, согласно формуле (12.1), плоскость поляризации так, что после прохождения через нее свет оста-

ется плоскополяризованным, но при этом плоскость поляризации повернута относительно первоначального направления на угол ψ и, следовательно, составляет угол $\theta = \pi/2 - \psi$ с плоскостью поляризации поляризатора Π_2 .

Если обозначить I_0 интенсивность естественного монохроматического света, то после прохождения первого поляризатора Π_1 интенсивность света уже плоскополяризованного $I_1 = I_0/2$.

После прохождения вдоль оптической оси кварцевой пластинки толщиной d интенсивность света не изменяется. Тогда на второй поляризатор Π_2 , плоскость поляризации которого ортогональна плоскости поляризации поляризатора Π_1 , падает плоскополяризованный свет, плоскость поляризации которого повернута относительно начального положения на угол $\psi = \alpha d$. Согласно закону Малюса на выходе из поляризатора Π_2 интенсивность света

$$I_2 = I_1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \psi.$$

При этом пропущенная часть светового потока

$$\eta = I_2/I_0 = \frac{1}{2} \sin^2 \psi = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha d),$$

причем $\eta < \frac{1}{2}$.

Минимальная толщина d_{\min} пластинки, обеспечивающая данное условие, должна соответствовать минимальному значению ψ_{\min} , т.е. должно выполняться условие $\psi_{\min} < \pi/2$. Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha d_{\min}).$$

Вследствие этого минимальная толщина кварцевой пластинки, вырезанной перпендикулярно к оптической оси,

$$d_{\min} = \frac{1}{\alpha} \arcsin \sqrt{2\eta}.$$

Следует отметить, что кроме d_{\min} существует еще набор возможных значений толщины пластинки, при которых оптическая система, описанная в условии задачи, будет пропускать часть светового потока. Это такие значения d , для которых угол поворота плоскости поляризации соответствует значениям $\psi = \psi_{\min} + m\pi$, а также $\psi = \pi(m+1) - \psi_{\min}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Эти условия можно пояснить с помощью рис. 12.6, а, б, где

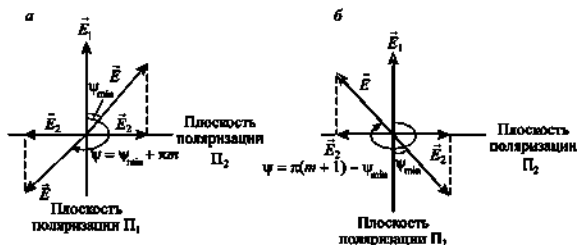


Рис. 12.6

\vec{E}_1 — световой вектор плоскополяризованной волны в плоскости поляризации поляризатора Π_1 , \vec{E} — световой вектор, который соответствует повороту плоскости поляризации на угол ψ при распространении волны вдоль оптической оси кварцевой пластинки; \vec{E}_2 — компонента вектора \vec{E} , которую пропускает поляризатор Π_2 . Так как $|\vec{E}_2| = |\vec{E} \sin \psi|$, то интенсивность на выходе из поляризатора Π_2 во всех случаях одинакова и равна

$$I_2 = I_1 \sin^2 \psi = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \psi.$$

Задача 12.6. Монохроматический плоскополяризованный свет ($\lambda = 589$ нм) проходит вдоль оси цилиндрической кюветы, которая заполнена раствором фруктозы в воде с концентрацией $C = 500$ г/л. При наблюдении сбоку видна система винтообразных темных полос (опыт Умова), причем расстояние между соседними темными полосами вдоль оси $d = 39$ см. Объяснить возникновение полос и определить удельное вращение $[\alpha]$ фруктозы.

Решение. Наблюдатель, смотрящий на кювету сбоку, видит свет, рассеянный молекулами раствора. Индикатриса рассеяния показывает распределение относительной интенсивности рассеянного света по различным направлениям (рис. 12.7).

Интенсивность рассеяния плоскополяризованного света в направлении колебаний электрического вектора \vec{E} световой волны равна нулю, поэтому в направлении, ортогональном направлению распространения света, наблюдатель видит последовательность коротких темных полос.

Если кювета заполнена оптически активным раствором фруктозы в воде, то при распространении монохроматического плоскополяризо-

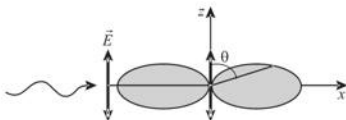


Рис. 12.7

ванного света вдоль оси цилиндрической кюветы световой вектор \vec{E} будет иметь различную пространственную ориентацию. Вследствие этого темные полосы, которые наблюдаются в направлении, совпадающем с ориентацией вектора \vec{E} , будут поворачиваться, как бы образуя систему винтообразных темных полос.

Соседние темные полосы расположены друг от друга на расстоянии d , на котором вектор \vec{E} поворачивается на угол $\psi = 180^\circ$.

Угол поворота плоскости поляризации определяется второй из формул (12.2), т.е. $\psi = [\alpha]Cd$.

Таким образом, удельное вращение фруктозы для данного монохроматического света $[\alpha] = \frac{\psi}{Cd} = 0,92 \text{ град / (кг} \cdot \text{м}^{-2})$. (При прохождении раствора фруктозы плоскость поляризации поворачивается влево.)

Задача 12.7. Трубка с бензолом длиной $d = 26$ см находится в продольном магнитном поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами P_1 и P_2 . Угол между плоскостями поляризации поляризаторов $\beta = 45^\circ$. Найти минимальное значение модуля напряженности магнитного поля H_{\min} , при котором естественный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм будет проходить через эту систему только в одном направлении (оптический вентиль). Постоянная Верде для бензола $V = 4,3 \cdot 10^{-2}$ угл.град/А.

Решение. Оптический вентиль – устройство, позволяющее свету выйти из источника, но не позволяющее ему вернуться в источник после отражения. Такой вентиль необходим для защиты лазера, когда свет, выходящий из него в волокна оптической связи, отражается от стыков или обрывов волокон и вызывает нестабильность источника и износ оптической части. Принцип построения такого вентиля: коллимированное монохроматическое излучение от источника после прохождения через поляризатор P_1 линейно поляризовано. Магнитооптический элемент (элемент Фарадея) – трубка с бензолом, помещенная в продольное магнитное поле соленоида, – поворачивает плоскость поляризации по ходу часовой стрелки, согласно формуле (12.4), на угол ψ по отношению

к первоначальному положению плоскости поляризации, заданному поляризатором P_1 . Для того чтобы свет прошел далее через поляризатор P_2 без ослабления, плоскость поляризации света должна быть параллельна плоскости поляризации второго поляризатора, т.е. после прохождения трубки с бензолом плоскость поляризации должна повернуться на угол $\beta = 45^\circ$ относительно плоскости поляризации поляризатора P_1 . Поляризатор P_2 пропускает линейно поляризованное излучение в фокусирующий элемент и далее. Отраженный от различных поверхностей свет проходит еще раз через поляризатор P_2 и магнитооптический элемент. При этом плоскость поляризации получает дополнительный поворот на угол 45° против хода часовой стрелки. Следовательно, суммарный угол ψ поворота плоскости поляризации отраженного света, прошедшего дважды по трубке с бензолом, составит 90° с плоскостью поляризации поляризатора P_1 . В итоге, согласно закону Малюса, поляризатор P_1 не пропускает свет такой поляризации к источнику излучения.

Используя формулу (12.4), вышеуказанное условие и данные в условии задачи, находим минимальное значение модуля напряженности

$$\text{магнитного поля: } H_{\min} = \frac{\psi}{2Vd} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

Задача 12.8. Ячейку Керра поместили между двумя скрещенными поляризаторами ($P_1 \perp P_2$) так, что направление электрического поля \vec{E} в конденсаторе образует угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 100$ мм, конденсатор заполнен нитробензолом. Через систему проходит монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм. Постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-12}$ м/В². Определить минимальное значение модуля напряженности электрического поля E_{\min} в конденсаторе, при котором интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота поляризатора P_2 .

Решение. Независимость интенсивности света, прошедшего через систему, от поворота поляризатора P_2 означает, что ячейка Керра преобразовала плоскополяризованный свет в свет, поляризованный по кругу, т.е. действие ячейки Керра эквивалентно действию пластинки $\lambda/4$. Согласно формуле (12.3) минимальную оптическую разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами после прохождения слоя нитробензола толщиной d можно представить как $B\lambda d E_{\min}^2 = \lambda/4$. Отсюда минимальное значение модуля напряженности электрического поля, при котором интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота поляризатора P_2 , определяется как

$$E_{\min} = 1/\sqrt{4Bd}, \quad E_{\min} = 1,06 \text{ МВ/м.}$$

Задача 12.9. Плоскополяризованный немонахроматический свет проходит через оптическую систему, которая состоит из кварцевой пластинки толщиной $d = 1,0$ мм, вырезанной перпендикулярно к оптической оси OO' , и поляроида Π , плоскость поляризации которого составляет угол $\beta = 28^\circ$ с плоскостью поляризации падающего света. В интервале длин волн от $\lambda_1 = 500$ нм до $\lambda_2 = 650$ нм постоянная вращения кварца линейно изменяется от $\alpha_1 = 31$ град/мм до $\alpha_2 = 17$ град/мм. Определить, свет с какой длиной волны λ будет преобладать на выходе из поляроида.

Решение. Пусть I_0 — интенсивность отдельной компоненты плоскополяризованного света с длиной волны λ . По условию задачи направление светового вектора \vec{E} составляет угол β с плоскостью поляризации поляроида Π . В отсутствие кварцевой пластинки интенсивность плоскополяризованного света с данной длиной волны, которая прошла бы через поляроид, $I_\lambda = I_0 \cos^2 \beta$. При прохождении кварцевой пластинки толщиной d происходит поворот плоскости поляризации падающего света на угол ψ_λ , что существенно влияет на интенсивность проходящего через поляроид света. В случае учета только поляризационных эффектов интенсивность будет определяться соотношением $I_\lambda = I_0 \cos^2(\beta - \psi_\lambda)$.

Для немонахроматического излучения (интервал длин волн от $\lambda_1 = 500$ нм до $\lambda_2 = 650$ нм) интенсивность каждой монохроматической компоненты проходящего через поляроид света различна, так как угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой существенно зависит от длины волны. В указанном в условии задачи спектральном интервале $\Delta\lambda$ угол поворота плоскости поляризации линейно изменяется от ψ_1 до ψ_2 . Следовательно, компоненте с длиной волны λ соответствует угол поворота поляризации

$$\psi_\lambda = \psi_1 - k\Delta\lambda = \psi_1 - \frac{(\psi_1 - \psi_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}(\lambda - \lambda_1). \quad (12.5)$$

На выходе из поляроида Π будет преобладать свет с той длиной волны λ , которой соответствует максимальная интенсивность. Это возможно при условии $\cos^2(\beta - \psi_\lambda) = 1$, что эквивалентно условию $(\beta - \psi_\lambda) = 0$.

При подстановке формулы (12.5) в это условие получим, что длина волны, которая будет преобладать на выходе из поляроида, определяется выражением

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{(\psi_1 - \beta)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\psi_2 - \psi_1)}.$$

При подстановке числовых значений получим $\lambda = 521$ нм, что соответствует зеленому цвету.

Задачи для самостоятельного решения

1. Естественный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 650$ нм падает на систему из двух скрещенных поляризаторов ($P_1 \perp P_2$), между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Найти минимальную толщину d_{\min} пластинки, при которой эта система будет пропускать $\eta = 0,3$ светового потока. Постоянная вращения кварца для данной длины волны $\alpha = 17$ град/мм.

Ответ: $d_{\min} = \frac{1}{\alpha}(\eta \arcsin \sqrt{2}) = 3$ мм.

2. Плоскополяризованный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на кварцевую пластинку, вырезанную перпендикулярно к оптической оси. Определить толщину d кварцевой пластинки, при которой угол поворота плоскости поляризации света $\psi = 150^\circ$. Постоянная вращения кварца для данной длины волны $\alpha = 31$ град/мм.

Ответ: $d = 4,8$ мм.

3. Раствор сахара, налитый в трубку длиной $d = 16$ см, поворачивает плоскость поляризации плоскополяризованного монохроматического света с данной длиной волны $\lambda = 589$ нм на угол $\psi = 30^\circ$. Определить массовую концентрацию сахара в растворе. Для данной длины волны удельное вращение раствора сахара в воде $[\alpha] = 0,665$ град / (кг · м⁻²).

Ответ: $C = 0,28$ кг/л.

4. Пластинка из кварца толщиной $d_1 = 1,0$ мм, вырезанная перпендикулярно к оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света с длиной волны $\lambda = 589$ нм на угол $\psi_1 = 20^\circ$. Определить, при какой толщине d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя поляризаторами ($P_1 \parallel P_2$), свет с данной длиной волны не будет пропущен. Какой длины d трубку с водным раствором сахара концентрацией $C = 0,4$ кг/л надо поместить между поляризаторами вместо кварцевой пластинки для получения того же эффекта? Для данной длины волны удельное вращение раствора сахара в воде $[\alpha] = 0,665$ град / (кг · м⁻²).

Ответ: $d_2 = 4,5$ мм; $d = 0,38$ м.

5. Ячейку Керра помещают между двумя скрещенными поляризаторами ($P_1 \perp P_2$) так, что направление силовых линий электрического поля в конденсаторе образует угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 10$ см. Конденсатор заполнен нитробензолом (постоянная Керра $B = 2,2 \times 10^{-10}$ см/В²). Определить минимальное напряжение U_{\min} между обклад-

ками конденсатора, при которой система будет пропускать максимальную долю падающего на нее монохроматического света.

Отв е т: $U_{\text{min}} = 48$ кВ.

6. Ячейку Керра помещают между двумя скрещенными поляризаторами ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) так, что направление силовых линий электрического поля в конденсаторе образует угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов. Конденсатор заполнен нитробензолом (постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$ см/В²). Через систему проходит монохроматический свет. Определить, сколько затемнений ячейки произойдет за время, за которое модуль вектора напряженности электрического поля конденсатора возрастет от $E_1 = 0$ до $E_2 = 3,4 \cdot 10^6$ В/м.

Отв е т: 26 затемнений (с учетом затемнения при $E_1 = 0$).

7. Ячейку Керра помещают между двумя скрещенными поляризаторами ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) так, что направление силовых линий электрического поля в конденсаторе образует угол $\beta = 45^\circ$ с плоскостями поляризации поляризаторов. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 10$ см. Конденсатор заполнен нитробензолом (постоянная Керра $B = 2,2 \times 10^{-10}$ см/В²). Через систему проходит монохроматический свет. Определить число N прерываний света в 1 с, если к обкладкам конденсатора приложить синусоидальное напряжение с частотой $\nu = 50$ Гц и амплитудным значением модуля напряженности $E_0 = 3,38 \cdot 10^6$ В/м.

Отв е т: $N = 510$ раз.

8. Плоскополяризованный некогерентный свет проходит через оптическую систему, которая состоит из кварцевой пластинки толщиной $d = 1,0$ мм, вырезанной перпендикулярно к оптической оси OO' и поляризатора Π , плоскость поляризации которого составляет угол $\beta = 19^\circ$ с плоскостью поляризации падающего света. В интервале длин волн от $\lambda_1 = 500$ нм до $\lambda_2 = 650$ нм постоянная вращения кварца линейно изменяется от $\alpha_1 = 31$ град/мм до $\alpha_2 = 17$ град/мм. Определить, свет с какой длиной волны будет преобладать на выходе из поляризатора.

Отв е т: красный свет с длиной волны $\lambda = 629$ нм.

9. Имеется призма, вырезанная из кварца так, что оптическая ось OO' перпендикулярна к грани AB (рис. 12.8). Преломляющий угол призмы $\theta = 30^\circ$. Параллельный плоскополяризованный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 590$ нм падает на призму под таким углом, что свет в призме распространяется вдоль оптической оси, направление которой показано штриховкой. Если смотреть на призму через поляризатор Π , наблюдаются череду-

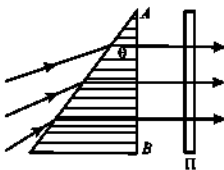


Рис. 12.8

ющиеся светлые и темные полосы, параллельные ребру A призмы. При этом расстояние между серединами светлых (или темных) полос $\Delta x = 15$ мм. Определить:

- а) постоянную вращения α кварца для данной длины волны;
- б) распределение интенсивности света $I(x)$ за поляризатором.

Отв е т: а) $\alpha \approx 21$ град/мм; б) $I(x) = I_0 \cos^2(\pi x / \Delta x)$, где I_0 – постоянная, соответствующая интенсивности света на входе; x – координата точки наблюдения.

10. Немонохроматический свет проходит через оптическую систему, состоящую из двух скрещенных поляризаторов ($P_1 \perp P_2$), между которыми расположена кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Определить минимальную толщину пластинки d_{\min} , при которой компонента с длиной волны $\lambda = 436$ нм будет полностью задерживаться оптической системой. Постоянная вращения кварца для данной длины волны $\alpha = 41,5$ град/мм.

Отв е т: $d_{\min} = 4,3$ мм.

13

ДИСПЕРСИЯ
И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Дисперсией света называется явление зависимости показателя преломления вещества от частоты или длины волны света.

Классическая теория дисперсии света разработана нидерландским физиком Х. Лоренцем после создания им электронной теории строения вещества. Согласно этой теории под действием электромагнитной волны, падающей на вещество, возникают вынужденные колебания электронов с частотой, совпадающей с частотой падающей волны. Ускоренно движущиеся при вынужденных колебаниях электроны излучают вторичные электромагнитные волны, имеющие ту же частоту, что и падающая волна. Эти вторичные волны интерферируют с падающей волной, и в веществе распространяется результирующая волна, направление которой совпадает с направлением падающей волны, а скорость распространения зависит от частоты. Соответственно относительная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления зависят от частоты *падающей электромагнитной волны*.

Пренебрегая затуханием вынужденных колебаний электронов и учитывая, что в веществе могут быть электроны, совершающие колебания с различными собственными частотами, Х. Лоренц получил формулу для диэлектрической проницаемости вещества [11]:

$$\epsilon = 1 + \sum_k \frac{n_k e^2 / m \epsilon_0}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \quad (13.1)$$

где n_k — концентрация электронов с собственной циклической частотой колебаний ω_{0k} ; e , m — соответственно заряд и масса электрона; ϵ_0 — электриче-

ская постоянная; ω — циклическая частота падающей электромагнитной волны.

Показатель преломления

$$n = n(\omega) = \sqrt{\epsilon}. \quad (13.2)$$

При очень низких частотах ($\omega \ll \omega_{0k}$) диэлектрическая проницаемость и показатель преломления практически не зависят от частоты волны.

Экспериментально обнаружено, что при увеличении частоты падающей на вещество электромагнитной волны показатель преломления сначала растет (нормальная дисперсия), проходит через максимум, затем в диапазоне частот, которые наиболее сильно поглощаются веществом, резко уменьшается (аномальная дисперсия) (рис. 13.1), а при больших частотах вновь наблюдается нормальная дисперсия.

Во многих случаях явление дисперсии количественно характеризуют величиной дисперсии $D(\lambda) = \frac{dn}{d\lambda}$. На рис. 13.2 показан график зависимости показателя преломления от длины волны при нормальной дисперсии, т.е. в области частот вдали от частот, которые поглощаются веществом.

При нормальной дисперсии $D(\lambda) = \frac{dn}{d\lambda} < 0$, а для аномальной дисперсии $D(\lambda) = \frac{dn}{d\lambda} > 0$.

Как уже отмечалось (см. гл. 1), строго монохроматическая волна, т.е. волна с одной длиной волны или частотой, является чисто теоретической моделью. Скорость такой монохроматической волны называют *фазовой*, так как это скорость распространения волновой поверхности,

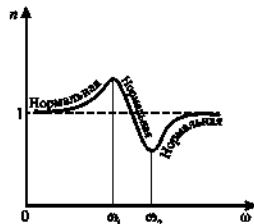


Рис. 13.1

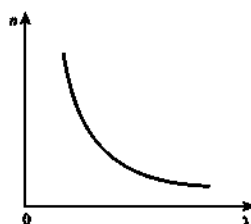


Рис. 13.2

или поверхности одинаковой фазы. Согласно разложению Фурье любую реальную волну можно представить как совокупность монохроматических волн с различными амплитудами и частотами в некотором интервале частот $\Delta\omega$.

Совокупность волн, мало отличающихся друг от друга по частотам, называют *волновым пакетом*. Такой волновой пакет представляет собой световой импульс с четко выраженным максимумом интенсивности.

В вакууме все монохроматические волны, входящие в волновой пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью, равной скорости света,

$$c = V = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (13.3)$$

С этой же скоростью в вакууме распространяется и весь волновой пакет.

В среде скорости монохроматических составляющих волнового пакета, имеющих разные частоты, согласно формуле (13.3), различны, поэтому происходит изменение формы волнового пакета: как правило, импульс размывается. *Групповой скоростью* называется скорость максимума интенсивности волнового пакета. Групповая скорость определяется по формуле

$$U = \frac{d\omega}{dk}, \quad (13.4)$$

так как $\omega = Vk$. Дифференцируя это соотношение, получаем:

$$\frac{d\omega}{dk} = V + k \frac{dV}{dk}.$$

Тогда при учете $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ получаем соотношение между групповой и фазовой скоростями (формула Рэлея):

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (13.5)$$

Это соотношение показывает, что в области нормальной дисперсии групповая скорость меньше фазовой ($U < V$), а при отсутствии дисперсии эти скорости равны ($U = V$).

В области аномальной дисперсии поглощение энергии электромагнитных волн велико, поэтому понятие групповой скорости утрачивает

смысл (согласно формуле (13.5) в этом случае групповая скорость больше фазовой).

Эксперименты показывают, что при прохождении света через однородное вещество интенсивность света уменьшается, т.е. происходит потеря части энергии электромагнитной волны.

Количественно потерю энергии света в однородном веществе, или поглощение света (абсорбцию), можно описать энергетически, не вникая в механизм взаимодействия плоской электромагнитной волны и однородного вещества и используя экспоненциальный закон Бутера

$$I = I_0 e^{-\alpha_\lambda x}, \quad (13.6)$$

где I — интенсивность волны, прошедшей толщину x поглощающего слоя вещества; I_0 — интенсивность падающей плоской световой волны; α_λ — коэффициент (показатель) поглощения, который зависит как от природы вещества, агрегатного состояния, температуры, так и от длины волны λ (т.е. коэффициент спектрального поглощения имеет селективный характер).

Коэффициент поглощения α_λ численно равен величине $1/x$, где x — толщина поглощающего слоя, при прохождении которой интенсивность волны с длиной волны λ убывает в $e = 2,71$ раза, т.е. коэффициент поглощения имеет размерность $1/m$.

Закон Бутера сформулирован для интенсивности плоской волны. В задаче, рассматривающей сферические волны (например, когда точечный источник света S находится в центре однородного поглощающего сферического слоя), аналогичное соотношение может быть записано для величины светового потока как функции радиуса-вектора r , проведенного от источника, в пределах телесного угла Ω :

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\alpha_\lambda r}, \quad (13.7)$$

где Φ_0 — световой поток на границе поглощающего слоя.

Справедливость соотношения (13.7) будет показана в задаче 13.15.

При описании явления абсорбции света растворами поглощающего вещества в прозрачном растворителе используют закон Бутера — Ламберта — Бера

$$I = I_0 e^{-A_\lambda c x}, \quad (13.8)$$

где I — интенсивность света, прошедшего толщину x поглощающего слоя раствора; I_0 — интенсивность падающего света; A_λ — молекулярный коэффициент поглощения раствора единичной концентрации (характеристика молекул поглощающего вещества; зависит от длины волны

света, природы растворителя, но не зависит от концентрации поглощающих молекул для растворов малых концентраций); C – концентрация растворенного вещества.

Для оценки ослабления энергии оптического излучения в слоях различных веществ используют понятие *оптической плотности*. Она характеризует пропускание отдельного оптического элемента:

$$D = \lg(1/\tau), \quad (13.9)$$

где $\tau = I/I_0$ – коэффициент пропускания поглощающего слоя вещества (раствора).

В случае, когда оптические элементы расположены последовательно друг за другом, оптическая плотность системы равна сумме оптических плотностей элементов.

Интенсивность световой волны может уменьшаться и за счет других процессов, особенно таких, как рассеяние и отражение на границе раздела сред.

В случае наличия оптической неоднородности ослабление интенсивности света можно учесть, используя коэффициент отражения ρ и коэффициент ослабления (коэффициент экстинкции) μ , который можно представить как сумму коэффициента истинного поглощения α_λ и коэффициента α' , связанного с энергетическими потерями за счет других процессов, особенно за счет рассеяния (т.е. $\mu = \alpha_\lambda + \alpha'$).

Примеры решения задач

Задача 13.1. Свободный электрон находится в поле монохроматической световой волны с циклической частотой $\omega = 3,14 \cdot 10^{15}$ рад/с. Интенсивность световой волны $I = 150$ Вт/м². Найти:

а) амплитуду колебаний электрона и амплитудное значение V_0 его скорости;

б) отношение амплитудных значений сил $\frac{F_{\text{м0}}}{F_{\text{э0}}}$, действующих на

электрон со стороны магнитного и электрического полей электромагнитной волны. Для упрощения решения в уравнении движения электрона можно не учитывать действие магнитной составляющей поля (как будет видно из расчета, оно пренебрежимо мало).

Решение. а) Колебания электрона возникают под действием электрического поля электромагнитной волны. Пусть $E = E_0 \cos \omega t$, m и e – соответственно масса и заряд электрона. Поскольку по условию электрон свободный, можно пренебречь воздействием на него каких-либо сил

по сравнению с силой, действующей со стороны электрического поля электромагнитной волны. Тогда по второму закону Ньютона

$$ma(t) = m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_z = eE = eE_0 \cos \omega t,$$

где $a(t) = \frac{d^2 r}{dt^2}$ — ускорение электрона; r — отклонение электрона от положения равновесия, зависящее от времени.

Скорость электрона

$$V(t) = \frac{dr}{dt} = \int a(t) dt = \int \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t \cdot dt = -\frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t.$$

Следовательно, амплитудное значение модуля скорости

$$V_0 = \frac{e}{m\omega} E_0.$$

Отклонение электрона от положения равновесия

$$r = \int V(t) dt = -\int \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t \cdot dt = -\frac{e}{m\omega^2} E_0 \cos \omega t,$$

амплитуда колебаний $r_0 = \frac{e}{m\omega^2} E_0$.

Для определения амплитудного значения напряженности электрического поля E_0 воспользуемся выражениями, полученными в п. б) задачи 1.2, заменив обозначения $H_x = H_x$ и $E_x = E_0$. Тогда

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 H_0}{2}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0.$$

$$\text{Отсюда } I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}, \quad E_0 = \sqrt{2I \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}.$$

Выполним расчеты, используя $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6}$ Гн/м:

$$E_0 = \sqrt{2 \cdot 150 \sqrt{\frac{1,257 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}}}} = \sqrt{300 \cdot 37,69} \approx 106 \text{ В/м},$$

$$\tau_0 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,86 \cdot 10^{30}} \cdot 106 = 1,89 \cdot 10^{-18} \text{ м},$$

$$V_0 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3,14 \cdot 10^{15}} \cdot 106 \approx 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 5,93 \text{ мм/с}.$$

б) Сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, $\vec{F}_M = e[\vec{V} \times \vec{B}]$, где \vec{B} – индукция магнитного поля. Поскольку колебания электрона происходят вдоль направления колебаний вектора напряженности электрического поля волны, то в любой момент времени скорость электрона $\vec{V} \perp \vec{B}$ и $F_M = eVB \sin 90^\circ = eVB$.

Поскольку в электромагнитной волне колебания векторов электрического и магнитного полей синфазны, то можно записать:

$$B = B_0 \cos \omega t = \mu_0 H_0 \cos \omega t.$$

Тогда

$$F_M = eVB = -eV_0 \sin \omega t \cdot \mu_0 H_0 \cos \omega t = -eV_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 \frac{\sin 2\omega t}{2}.$$

Амплитудное значение этой силы

$$F_{M0} = eV_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{E_0}{2} = eV_0 \frac{E_0}{2c}.$$

Отношение амплитудных значений сил

$$\frac{F_{M0}}{F_{e0}} = \frac{eV_0 E_0}{eE_0 \cdot 2c} = \frac{V_0}{2c}, \quad \frac{F_{M0}}{F_{e0}} = \frac{5,9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 0,98 \cdot 10^{-11},$$

т.е. силой, действующей на электроны со стороны магнитного поля электромагнитной волны, можно пренебречь по сравнению с силой, действующей со стороны электрического поля, что соответствует данному в условии указанию, что колебания электронов вещества происходят под действием электрической составляющей электромагнитной волны.

Задача 13.2. Плоская электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме n_0 . Пренебрегая взаимодействием волны и ионов плазмы, найти зависимость от частоты:

а) диэлектрической проницаемости плазмы;

б) фазовой скорости электромагнитной волны в плазме.

Решение. а) Используем формулу (13.1). Согласно условию электроны в плазме свободны, т.е. не взаимодействуют с ионами, а потому не имеют собственной частоты колебаний. Соответственно получим:

$$\epsilon = 1 + \frac{n_0 e^2 / (m \epsilon_0)}{0 - \omega^2} = 1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}.$$

Отношение $\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}$ обозначают ω_p^2 и называют *собственной частотой колебаний плазмы* или *плазменной частотой*, потому что это отношение зависит только от концентрации свободных электронов в плазме $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} = f(n_0)$ (остальные величины — константы). Данная величина является характеристикой плазмы. Тогда $\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$.

б) Фазовая скорость связана с абсолютным показателем преломления вещества соотношением $n = \frac{c}{V}$, где c — скорость света в вакууме.

Используем формулу (13.2):

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}},$$

где n_0 — концентрация свободных электронов в графите.

$$V = \frac{c}{n} = c / \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}}.$$

Задача 13.3. Для достаточно жестких (большой энергии) рентгеновских лучей электроны вещества можно считать свободными. Это объясняется тем, что энергия связи электронов на внешних электронных оболочках атомов много меньше энергии фотонов рентгеновского диапазона и под действием рентгеновского излучения внешние электроны освобождаются из атомов. Найти показатель преломления графита ($^{12}_6\text{C}$) для рентгеновских лучей с длиной волны в вакууме $\lambda = 50$ нм, если плотность графита $\rho = 2100$ кг/м³. Пояснить физический смысл полученной величины.

Решение. Для определения показателя преломления применим формулу (13.2). Согласно условию электроны в графите можно считать

свободными, поэтому используем формулу, полученную в задаче 13.2:

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}}.$$

Выразим циклическую частоту ω через длину волны: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$, где c – скорость света в вакууме. Тогда

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2 \lambda^2}{m \epsilon_0 (2\pi c)^2}}.$$

Считая графит состоящим только из атомов углерода, найдем концентрацию электронов в графите, используя заданную в условии плотность графита.

Концентрация атомов в графите

$$n_{\text{ат}} = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m_{\text{гп}} N_A}{M V} = \frac{\rho N_A}{M},$$

где N – число атомов в объеме V ; N_A – число Авогадро; $m_{\text{гп}} = \rho \cdot V$ – масса графита; M – атомная масса углерода (по условию $M = 12 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

Концентрация электронов

$$n_0 = \frac{Nz}{V} = \frac{\rho N_A z}{M},$$

где z – зарядовое число ($z = 6$).

Вычислим значение дроби:

$$\begin{aligned} \frac{n_0 e^2 \lambda^2}{m \epsilon_0 (2\pi c)^2} &= \frac{\rho N_A z e^2 \lambda^2}{M m \epsilon_0 (2\pi c)^2} = \\ &= \frac{2100 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 6 (1,6 \cdot 10^{-19})^2 (50 \cdot 10^{-12})^2}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (6,28 \cdot 3 \cdot 10^8)^2} \approx 6,74 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$n = \sqrt{1 - 6,74 \cdot 10^{-8}} = \sqrt{0,9999999326} = 0,9999999663 \approx 1,0.$$

Для объяснения полученного значения показателя преломления рассмотрим, от чего зависит подкоренное выражение в соотношении

$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}}$. Величина $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}$ зависит только от концентрации свободных электронов в веществе, а согласно сделанному расчету

$$\frac{n_0 e^2 \lambda^2}{m \epsilon_0 (2\pi c)^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 6,74 \cdot 10^{-8},$$

т.е. $\omega_p^2 \ll \omega^2$, поэтому показатель преломления $n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} \ll 1$.

Задача 13.4. В соответствии с формулой, полученной в задаче 13.2, диэлектрическая проницаемость вещества $\epsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ может быть меньше единицы ($\epsilon < 1$) или отрицательной ($\epsilon < 0$). При каких условиях можно использовать эту формулу? Каковы особенности распространения света при таких значениях диэлектрической проницаемости?

Решение. Приведенная формула получена в задаче 13.2 и использована в задаче 13.3 при условии, что можно пренебречь частотой собственных колебаний электронов в веществе. Эту формулу можно использовать и при рассмотрении распространения света в разреженной плазме, ионосфере (часть атмосферы с малой плотностью и достаточно высокой ионизацией воздуха), а также при такой высокой частоте распространяющихся электромагнитных волн, что по сравнению с ней собственной частотой колебаний электронов вещества можно пренебречь.

Как уже отмечалось, плазменная частота $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}$ зависит только от концентрации свободных электронов n_0 , так как все остальные величины, входящие в формулу, являются константами. Тогда $\epsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0 \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1$ при $\omega_p^2 < \omega^2$. В этом случае показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon} < 1$. Следовательно, фазовая скорость света в веществе больше скорости света в вакууме ($V = \frac{c}{n} > c$). Как это возможно?

Как указывалось в начале этой главы, согласно теории Х. Лоренца в результате вынужденных колебаний электронов под действием падающей электромагнитной волны в веществе возникают вторичные волны, интерферирующие с падающей волной. Следовательно, в веществе распространяется результирующая волна, которая по фазе может опережать

падающую световую волну, т.е. в данном случае фазовая скорость — это скорость максимума распространяющейся результирующей волны.

Значение диэлектрической проницаемости отрицательно ($\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0$) при $\omega_p^2 > \omega^2$. В этом случае действительного значения показателя преломления не существует, так как $n = \sqrt{\epsilon}$, т.е. амплитуда световой волны экспоненциально спадает по мере проникновения в такую среду и при любых углах падения наблюдается полное отражение света в первую среду.

Задача 13.5. Как установлено на практике, часть атмосферы на высоте 60—10 000 км над поверхностью Земли, называемая ионосферой, играет существенную роль в процессе распространения радиоволн. Название *ионосфера* используется потому, что плотность воздуха на таких высотах очень мала, а кроме того, воздух в значительной степени ионизирован под действием солнечного и космического излучений. Поэтому в ионосфере концентрация свободных электронов высокая ($n_0 > 10^5 \text{ см}^{-3}$). Какие волны будут полностью отражаться при концентрации свободных электронов в ионосфере: $n_0 = 4,00 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$; $n_0 = 9,00 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$? Волны каких частот могут проходить через ионосферу?

Решение. Используем данные, полученные в решении задачи 13.4. Показатель преломления зависит от соотношения ω_p^2 и ω^2 . Предельное значение частоты волны, для которой будет наблюдаться полное отражение, определяется соотношением $\omega = \omega_p = e \sqrt{\frac{n_0}{m \epsilon_0}}$. Найдем частоты, соответствующие заданным значениям концентрации свободных электронов:

$$\omega_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{4,00 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 0,356 \cdot 10^7 \text{ рад/с,}$$

$$\omega_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{9,00 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 0,534 \cdot 10^8 \text{ рад/с.}$$

Первой частоте соответствует длина волны $\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\omega_1} \approx 529 \text{ м}$, а второй — $\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\omega_2} \approx 35,3 \text{ м}$. На практике наиболее интенсивное отражение радиоволн наблюдается для волн с длинами волн $\lambda > 10 \text{ м}$. При одно-

кратном отражении такие радиоволны могут перекрывать расстояние вдоль поверхности Земли до 4000 км.

Волны частотами $\omega > \omega_p$ будут проходить через атмосферу, но то, каковы значения этих частот, зависит от концентрации свободных электронов, которая на практике является функцией многих факторов: высоты над поверхностью Земли, интенсивности солнечного излучения и т.п.

Задача 13.6. Волновой пакет представляет собой суперпозицию двух гармонических волн: $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$ и $E_2 = E_0 \cos(\omega' t - k'x)$. Найти групповую скорость U этого пакета, распространяющегося в вакууме, при условии, что частоты волн и волновые числа различаются на малую величину, т.е. $\omega' \approx \omega$ и $k' \approx k$.

Решение. Результирующая напряженность электрического поля волнового пакета $E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega' t - k'x)$, или

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{(\omega' - \omega)t}{2} - \frac{(k' - k)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega' + \omega)t}{2} - \frac{(k' + k)x}{2}\right).$$

По условию различие частот и волновых чисел волн мало, поэтому запишем: $\omega' - \omega = d\omega$, $k' - k = dk$. Тогда $\frac{\omega' + \omega}{2} \approx \omega$ и $\frac{(k' + k)}{2} \approx k$. С учетом этих выражений

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos(\omega t - kx).$$

Полученное соотношение соответствует гармоническому колебанию с частотой ω и волновым числом k , «амплитуда» которого изменяется во времени и пространстве по закону $2E_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)$. Это соотношение достигает максимальных значений при $\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x = m\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ и координата максимума $x = -2m\pi + \frac{d\omega}{dk}t$.

Групповая скорость характеризует скорость перемещения максимума интенсивности волнового пакета и в данном случае $U = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(V\lambda) = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} = V = c = \text{const}$. Таким образом, в отсутствие дис-

персии $\left(\frac{dV}{d\lambda} = 0\right)$ при распространении волнового пакета в вакууме групповая скорость равна фазовой скорости.

Задача 13.7. Для различных длин волн монохроматического света $\lambda_1 = 509$ нм, $\lambda_2 = 534$ нм и $\lambda_3 = 574$ нм показатели преломления сероуглерода равны соответственно $n_1 = 1,647$, $n_2 = 1,640$ и $n_3 = 1,630$. Найти:

а) фазовую скорость для второй длины волны λ_2 ;

б) групповую скорость волнового пакета с максимумом вблизи длины волны λ_2 .

Решение. а) Фазовую скорость можно определить из соотношения (1.7):

$$V_2 = \frac{c}{n_2}, \quad V_2 = \frac{3,0 \cdot 10^8}{1,64} \approx 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

б) Для нахождения групповой скорости используем соотношение (13.5). Преобразуем его с учетом $V = \frac{c}{n}$:

$$U = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Для расчета дисперсии показателя преломления $\frac{dn}{d\lambda}$ необходимо знать функциональную зависимость показателя преломления от длины волны $n = f(\lambda)$. Поскольку эта функция не задана, найдем дисперсию показателя преломления как среднее изменение показателя преломления на единицу длины волны. Для этого сравним изменения показателя преломления для заданных диапазонов длин волн:

$$\frac{\Delta n_{21}}{\Delta \lambda_{21}} = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \frac{\Delta n_{32}}{\Delta \lambda_{32}} = \frac{n_3 - n_2}{\lambda_3 - \lambda_2}, \quad \frac{\Delta n_{21}}{\Delta \lambda_{21}} = \frac{-0,007}{25 \cdot 10^{-9}} = -2,8 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1},$$

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta \lambda_{32}} = \frac{-0,01}{40 \cdot 10^{-9}} = -2,5 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}.$$

Эти величины отрицательные, что характеризует нормальную дисперсию, и различаются на достаточно малую величину $\left(\frac{\Delta n_{21}}{\Delta \lambda_{21}} - \frac{\Delta n_{32}}{\Delta \lambda_{32}}\right)$: $\frac{\Delta n_{21}}{\Delta \lambda_{21}} = 1 - \frac{\Delta n_{32} \Delta \lambda_{21}}{\Delta \lambda_{32} \Delta n_{21}} \approx 0,107$. Поэтому используем среднее значение дисперсии:

$$\left(\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}\right) = \left(\frac{\Delta n_{21}}{\Delta \lambda_{21}} + \frac{\Delta n_{32}}{\Delta \lambda_{32}}\right); 2 = 2,65 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}.$$

Найдем групповую скорость:

$$U = \frac{c}{n_2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{n_2} \left(\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}\right)\right), \quad U \approx 1,99 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 13.8. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии, если фазовая скорость V задана следующими выражениями:

а) $V = \text{const}$ – скорость распространения звуковых волн в воздухе;

б) $V = a\sqrt{\lambda}$ – гравитационные волны на поверхности воды ($a = \text{const}$; λ – длина волны);

в) $V = a/\sqrt{\lambda}$ – капиллярные волны ($a = \text{const}$; λ – длина волны);

г) $V = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ – электромагнитные волны в ионосфере (c – скорость света в вакууме; $b = \text{const}$; λ – длина волны);

д) $V = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}$ – электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с $\varepsilon = f(\omega)$ и $\mu = f(\omega)$ (c – скорость света в вакууме; α – геометрический фактор волновода).

Решение. а) Согласно формуле (13.4) групповая скорость $U = \frac{d\omega}{dk}$.

Выразим циклическую частоту, используя соотношение (13.3): $\omega = Vk$.

Поскольку $V = \text{const}$, то в данном случае $U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(Vk) = V = \text{const}$.

б) По условию $V = a\sqrt{\lambda}$, или $V = a\sqrt{\frac{2\pi}{k}}$. Для определения групповой скорости выразим циклическую частоту:

$$\omega = Vk = ka\sqrt{\lambda} = ka\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = a\sqrt{2\pi k}.$$

Тогда

$$U = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \frac{V}{2},$$

т.е. групповая скорость гравитационных волн в 2 раза меньше их фазовой скорости.

в) *Капиллярными* называются волны, распространяющиеся по поверхности жидкости. По условию $V = a/\sqrt{\lambda} = \frac{a\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}$. Выразим циклическую частоту:

$$\omega = Vk = \frac{ka\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} k^{3/2}.$$

Тогда

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{2} \sqrt{k} = \frac{3V}{2} > V.$$

В данном случае групповая скорость, т.е. скорость распространения максимума волнового пакета капиллярных волн, больше их фазовой скорости.

г) Преобразуем заданную в условии фазовую скорость:

$$V = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} = \sqrt{c^2 + b^2\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2}.$$

Найдем циклическую частоту:

$$\omega = Vk = k\sqrt{c^2 + b^2\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2} = \sqrt{k^2c^2 + b^2(2\pi)^2}$$

и групповую скорость

$$\begin{aligned} U = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{(k^2c^2 + b^2(2\pi)^2)^{-1/2} 2kc^2}{2} = \frac{kc^2}{\sqrt{k^2c^2 + b^2(2\pi)^2}} = \\ &= \frac{kc^2}{k\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{b^2\lambda^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

д) В этом случае:

$$\begin{aligned} \omega = Vk &= \frac{ck\omega}{\sqrt{\epsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}}, \quad \left(\frac{1}{ck}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}, \\ \omega &= \frac{\sqrt{c^2k^2 + c^2\alpha^2}}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{2kc^2}{2\sqrt{c^2k^2 + c^2\alpha^2}} - \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{c^2k^2 + c^2\alpha^2} \frac{d(\epsilon\mu)}{(\epsilon\mu)^{3/2}} \frac{d\omega}{d\omega} \frac{d\omega}{dk}$$

Выполним преобразование:

$$\frac{d\omega}{dk} \left(1 + \sqrt{c^2k^2 + c^2\alpha^2} \frac{d(\epsilon\mu)}{2(\epsilon\mu)^{3/2}} \frac{d\omega}{d\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{kc^2}{\sqrt{c^2k^2 + c^2\alpha^2}}$$

Упростим последнюю формулу, используя выражение для ω :

$$\frac{d\omega}{dk} \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon\mu} \frac{d(\epsilon\mu)}{d\omega} \right) = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{V}$$

Тогда

$$V = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{V \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon\mu} \frac{d(\epsilon\mu)}{d\omega} \right)}$$

Полученное выражение показывает, что при распространении электромагнитных волн в заданном волноводе групповая скорость не только зависит от циклической частоты волны, но и обусловлена зависимостью диэлектрической и магнитной проницаемостей среды от частоты.

Задача 13.9. Узкий пучок белого света падает под углом $\alpha = 30^\circ$ на призму с преломляющим углом $\varphi = 45^\circ$. Найти угол θ между крайними лучами спектра на выходе из призмы, если показатели преломления стекла призмы для крайних лучей видимого спектра равны $n_e = 1,62$, $n_p = 1,67$.

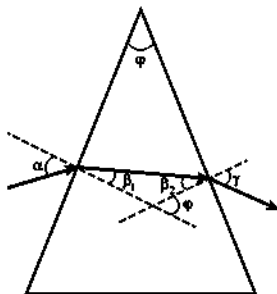


Рис. 13.3

Решение. Запишем закон преломления для падения луча на левую и правую грани призмы (рис. 13.3), считая показатель преломления воздуха $n_0 = 1$, и найдем угол преломления γ на выходе из призмы:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = n, \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$$

Отсюда $\sin \gamma = n \sin \beta_2$. Выразим угол β_2 через угол падения α и преломляющий угол призмы φ .

Рассмотрим треугольник, образованный преломленным лучом внутри призмы и перпендикулярами к ее граням. Преломляющий угол призмы φ равен внешнему углу этого треугольника как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Вместе с тем внешний угол этого треугольника равен сумме углов треугольника ($\beta_1 + \beta_2$). Следовательно, преломляющий угол призмы $\varphi = \beta_1 + \beta_2$. Тогда $\sin \beta_2 = \sin(\varphi - \beta_1) = \sin \varphi \cos \beta_1 - \cos \varphi \sin \beta_1$. Поскольку $\cos \beta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1}$, то, используя закон преломления, получим:

$$\cos \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}, \quad \sin \beta_2 = \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} - \cos \varphi \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Из закона преломления $\sin \gamma = n \sin \beta_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= n \sin \beta_2 = n \left(\sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} - \cos \varphi \frac{\sin \alpha}{n} \right) = \\ &= \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

Используя полученное выражение и подставляя показатели преломления для красного и фиолетового света, вычислим углы γ_k и γ_ϕ для крайних лучей видимого спектра: $\sin \gamma_k = 0,7359$, $\gamma_k \approx 47^\circ 23'$, $\sin \gamma_\phi = 0,7730$, $\gamma_\phi \approx 50^\circ 38'$. Следовательно, $\theta = \gamma_k - \gamma_\phi \approx 3^\circ$.

Задача 13.10. Луч белого света распространяется в стекле и падает под углом $\alpha = 41^\circ$ на границу стекло — воздух. Показатели преломления этого стекла для красного и фиолетового лучей — соответственно $n_k = 1,51$, $n_\phi = 1,53$. Каким будет угол φ между красным и фиолетовым лучами в результате преломления?

Решение. При распространении света из оптически более плотной среды (стекла) в воздух возможно явление полного внутреннего отражения. Предельный угол полного внутреннего отражения определяется соотношением $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n_{12}}$, где n_{12} — относительный показатель преломления оптически более плотной среды относительно менее плотной ($n_{12} \approx 1,00$).

Найдем предельные углы для красного и фиолетового лучей. Для красного луча $\sin \alpha_{0k} = \frac{1}{n_k}$, $\alpha_{0k} = \arcsin \frac{1}{1,51}$, $\alpha_{0k} = 41^\circ 28'$. Этот угол больше угла падения, поэтому красный луч в результате преломления выйдет

в воздух. По закону преломления $\sin \beta_x = n_x \sin \alpha$, тогда угол преломления для красного луча $\beta_x = \arcsin(1,51 \sin 41^\circ) = \arcsin 0,9907 = 82^\circ 12'$. Для фиолетового луча $\sin \alpha_{0\phi} = \frac{1}{n_\phi}$, $\alpha_{0\phi} = \arcsin \frac{1}{1,53} = 40^\circ 49'$. Этот угол меньше угла падения, поэтому фиолетовый луч полностью отразится в стекло и не выйдет в воздух. В результате преломления угол между красным и фиолетовым лучами $\varphi = (90^\circ - 41^\circ) + (90^\circ - 82^\circ 12') = 56^\circ 48'$.

Задача 13.11. На двояковыпуклую линзу, радиусы кривизны поверхностей которой $R_1 = R_2 = 40$ см, падает белый свет от точечного источника, расположенного на оптической оси линзы на расстоянии $a = 50$ см от нее. Перед линзой вплотную расположена диафрагма диаметром $d = 1$ см, ограничивающая поперечное сечение светового пучка. Показатели преломления для крайних волн спектра — $n_x = 1,74$ и $n_\phi = 1,80$. Какое распределение цвета в изображении источника можно наблюдать на экране, расположенном на расстоянии $b = 50$ см от линзы перпендикулярно к ее оптической оси?

Решение. Запишем выражение для фокусного расстояния линзы, находящейся в воздухе (см. формулу (7.6)):

$$f = \frac{R}{2(n-1)}.$$

Используем данные в условии величины и рассчитаем фокусное расстояние для красной и фиолетовой волн:

$$f_x = \frac{R}{2(n_x-1)}, f_x \approx 27 \text{ см}; f_\phi = \frac{R}{2(n_\phi-1)}, f_\phi \approx 25 \text{ см}.$$

Используя формулу (7.3) для линзы, находящейся в воздухе, найдем расстояние от линзы до изображений точечного источника для красной и фиолетовой волн:

$$b_x = \frac{af_x}{a-f_x}, b_x \approx 58,7 = 59 \text{ см}; b_\phi = \frac{af_\phi}{a-f_\phi}, b_\phi = 50 \text{ см}.$$

По условию расстояние до экрана $b = 50$ см. Следовательно, на экране вместо точечного изображения источника будет наблюдаться пятно с фиолетовым центром и красными краями. Если экран расположить на расстоянии от линзы $b = 59$ см, то будет наблюдаться пятно с красным центром и фиолетовыми краями. Такие явления лежат в основе наблюдаемых в оптических приборах хроматических aberrаций.

Диаметр пятна d_1 найдем из подобия треугольников AEB и CED (рис. 13.4):

$$d_1 = d \frac{b_k - b_0}{b_0}, \quad d_1 = 0,18 \text{ см.}$$

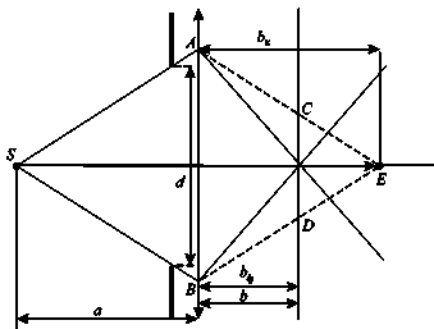


Рис. 13.4

Задача 13.12. Из одного и того же вещества изготовили две пластинки толщиной $d_1 = 3,8$ мм и $d_2 = 9,0$ мм соответственно. Поочередно помещая эти пластинки в пучок монохроматического света, падающий нормально к грани, определяли, что первая пластинка пропускает $\tau_1 = 84\%$ начальной интенсивности светового потока, а вторая — $\tau_2 = 70\%$. Пренебрегая вторичными отражениями, найти коэффициент поглощения α_λ этого вещества.

Решение. Запишем выражения для интенсивности света, прошедшего через первую и вторую пластинки, с учетом закона (13.6) и некоторого коэффициента отражения ρ , одинакового для обеих поверхностей пластинок:

$$I_1 = I_0(1-\rho)^2 e^{-\alpha_\lambda d_1} = \tau_1 I_0, \quad I_2 = I_0(1-\rho)^2 e^{-\alpha_\lambda d_2} = \tau_2 I_0,$$

где I_0 — начальная интенсивность падающего света.

Найдем отношение $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{\alpha_\lambda(d_2-d_1)}$, исключив при этом неизвестные значения ρ и I_0 .

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\alpha_\lambda (d_2 - d_1) = \ln \frac{\tau_1}{\tau_2},$$

откуда находим:

$$\alpha_\lambda = \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{d_2 - d_1}, \quad \alpha_\lambda = 0,35 \text{ см}^{-1}.$$

Задача 13.13. Плоская монохроматическая волна падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной L . Показатель поглощения вещества пластинки линейно изменяется вдоль нормали к ее поверхности от значения $\alpha_{1\lambda}$ до значения $\alpha_{2\lambda}$. Коэффициент отражения от каждой поверхности пластинки равен ρ . Определить коэффициент пропускания τ пластинки.

Решение. Коэффициент пропускания пластинки τ определим как отношение интенсивности I света, прошедшего через систему, к интенсивности I_0 падающего света, т.е. $\tau = \frac{I}{I_0}$.

Рассмотрим прохождение через пластинку плоской монохроматической волны (пренебрегая многократными отражениями на ее границах). Выберем ось Ox с началом $x = 0$ на первой грани пластинки (рис. 13.5), тогда при линейной зависимости коэффициента поглощения α_λ от x можно записать: $\alpha_\lambda(x) = a + bx$.

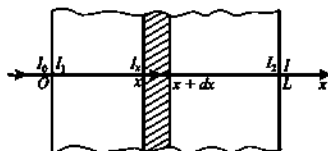


Рис. 13.5

Найдем из граничных условий значения коэффициентов a и b . Так, при $x=0$ коэффициент поглощения $\alpha_{1x} = a$, при $x=L$ коэффициент поглощения $\alpha_{2x} = \alpha_{1x} + bL$, отсюда $b = \frac{\alpha_{2x} - \alpha_{1x}}{L}$.

При прохождении плоского слоя вещества малой толщины dx интенсивность света уменьшится так, что ее убыль можно представить в виде $dI = -I_x \alpha_x(x) dx$. Сначала разделим переменные:

$$\frac{dI}{I_x} = -\left(\alpha_{1x} + \frac{\alpha_{2x} - \alpha_{1x}}{L} x\right) dx.$$

Затем проинтегрируем полученное выражение с учетом того, что интенсивность света, вышедшего в пластинку, $I_1 = I_0(1-\rho)$, а после прохождения слоя толщиной L и перед падением на вторую грань пластинки интенсивность равна I_2 :

$$\int_{I_1}^{I_2} \frac{dI}{I_x} = -\int_0^L \left(\alpha_{1x} + \frac{\alpha_{2x} - \alpha_{1x}}{L} x\right) dx.$$

Далее находим:

$$\ln \frac{I_2}{I_1} = \ln \frac{I_2}{I_0(1-\rho)} = -\left(\alpha_{1x} L + \left(\frac{\alpha_{2x} - \alpha_{1x}}{L}\right) \frac{L^2}{2}\right) = -\frac{\alpha_{2x} + \alpha_{1x}}{2} L.$$

Следовательно, интенсивность света после прохождения слоя толщиной L определяется выражением $I_2 = (1-\rho) I_0 e^{-\frac{(\alpha_{1x} + \alpha_{2x})L}{2}}$.

С учетом отражения на второй грани пластинки интенсивность выходящего света $I = I_2(1-\rho) = I_0(1-\rho)^2 e^{-\frac{(\alpha_{1x} + \alpha_{2x})L}{2}}$. Следовательно, коэффициент пропускания пластинки $\tau = \frac{I}{I_0} = (1-\rho)^2 e^{-\frac{(\alpha_{1x} + \alpha_{2x})L}{2}}$.

Отметим, что можно ввести понятие *среднего коэффициента поглощения* $\langle \alpha_x \rangle$, значение которого при линейной зависимости коэффициента поглощения α_x от x , как видно из полученного выражения, соответствует $\frac{1}{2}(\alpha_{1x} + \alpha_{2x})$.

Для более точного расчета интенсивности I света, прошедшего через пластинку, необходимо учитывать еще и возможные многократные отражения от ее граней. Часть интенсивности волны после прохождения

слоя толщиной L , первый раз отражаясь от второй грани пластинки, распространяется в пластинке и опять частично отражается от первой грани. Распространяясь далее в пластинке, такая волна на второй грани испытывает еще раз отражение. При дальнейшем распространении волна может испытывать отражения от граней пластины.

Рассчитаем интенсивность света, прошедшего через пластинку после двукратного отражения (без учета поглощения): $I' = (1 - \rho)^2 \rho^2 I_0$. Волна, которая испытывает четырехкратное отражение, выйдет из пластинки с интенсивностью $I'' = (1 - \rho)^2 \rho^4 I_0$. Затем учтем также вклады от шести-, восьми-, и т.д. отражений в результирующую интенсивность выходящей волны:

$$I^* = (1 - \rho)^2 \rho^2 I_0 + (1 - \rho)^2 \rho^4 I_0 + (1 - \rho)^2 \rho^6 I_0 + (1 - \rho)^2 \rho^8 I_0 + \dots = \\ = (1 - \rho)^2 I_0 (\rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \rho^8 + \dots).$$

Учтем, что сумма геометрической прогрессии

$$(\rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \rho^8 + \dots) = \frac{1}{(1 - \rho^2)},$$

поэтому результирующая интенсивность прошедшей волны (без учета поглощения) определяется выражением

$$I^* = \frac{I_0 (1 - \rho)}{(1 + \rho)}.$$

Если сравнить полученный результат с выражением $I = I_0 (1 - \rho)^2$ для интенсивности прошедшей волны без учета многократных отражений, то можно показать, что

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\rho(\rho - 1)}{(1 - \rho)^2} \approx \rho^2.$$

Как правило, эта величина невелика ($\approx 0,25\%$), поэтому обычно многократными отражениями пренебрегают.

Задача 13.14. Монохроматический свет нормально падает на стопку из N одинаковых плоскопараллельных стеклянных пластинок каждая толщиной l . Коэффициент отражения на каждой грани пластинок ρ . Отношение интенсивности света, прошедшего через эту стопку пластинок, к интенсивности падающего света τ . Определить показатель (коэффициент) поглощения стекла α для данной монохроматической световой волны.

Решение. В условии этой задачи описан обычный метод измерения коэффициента поглощения монохроматического света.

Сначала определим значение интенсивности света I_1 , прошедшего через первую пластинку, с учетом поглощения стекла и отражения на поверхностях (без учета многократных отражений). Для этого выделим в пластинке элементарно тонкий слой от x до $x + dx$, в пределах которого для данного монохроматического света коэффициент поглощения равен α (см. рис. 13.5).

Убывь dI интенсивности света, прошедшего через слой dx , запишем в виде $-dI = \alpha I_x dx$, где I_x — интенсивность света, входящего в этот слой. Разделя переменные и интегрируя это выражение по x в пределах от $x = 0$ до $x = l$ и по I в пределах от $I_0(1 - \rho)$ до I , получим:

$$\ln \frac{I}{I_0(1 - \rho)} = -\alpha l.$$

Следовательно, после прохождения слоя интенсивность света вещества $I = I_0(1 - \rho)e^{-\alpha l}$. После прохождения второй поверхности этой пластинки интенсивность светового пучка (с учетом отражения на второй грани) $I_1 = I_0(1 - \rho)^2 e^{-\alpha l}$.

Проведем аналогичные рассуждения для определения интенсивности монохроматического света при прохождении через стопку из N пластинок. Получим выражения, соответствующие интенсивности при прохождении каждой из них:

$$I_2 = I_1(1 - \rho)^2 e^{-\alpha l}, \quad I_3 = I_2(1 - \rho)^2 e^{-\alpha l}, \quad I_4 = I_3(1 - \rho)^2 e^{-\alpha l}, \quad \dots,$$

$$I_N = I_{N-1}(1 - \rho)^2 e^{-\alpha l} = I_0(1 - \rho)^{2N} e^{-\alpha Nl}.$$

Для значения коэффициента пропускания стопки пластинок получаем $\tau = \frac{I_N}{I_0} = (1 - \rho)^{2N} e^{-\alpha Nl}$. Следовательно, показатель поглощения стекла для данной монохроматической волны

$$\alpha = \frac{1}{Nl} \ln \frac{(1 - \rho)^{2N}}{\tau}.$$

Задача 13.15. Точечный монохроматический источник света, испускающий световой поток Φ_0 , находится в центре сферического слоя однородного вещества, внутренний и внешний радиусы поверхностей которого равны соответственно a и b . Коэффициент поглощения слоя α_x , коэффициент отражения каждой поверхности слоя ρ . Пренебрегая

вторичными отражениями, найти интенсивность света на выходе из этого слоя вещества.

Решение. Точечный источник света S находится в центре однородного поглощающего сферического слоя, и это условие позволяет утверждать, что распределение интенсивности волны в пространстве является сферически симметричным.

Внутри однородного вещества выберем тонкий сферический слой, внутренний радиус которого равен r , внешний — $r + dr$ (рис. 13.6). Обозначим интенсивность света I_r непосредственно у внутренней границы слоя.

Выделим в этом поглощающем слое элемент в виде элементарного цилиндрика с поперечным сечением площадью ds и длиной dr , при прохождении которого убыль dI интенсивности света запишем в виде $-dI = \alpha_\lambda I_r dr$. Тогда убыль светового потока в этом элементе представим как $-d\Phi_r = -dI ds = \alpha_\lambda I_r dr ds$. Проинтегрируем данное выражение и рассчитаем убыль светового потока $d\Phi$ в тонком сферическом слое толщиной dr . Запишем: $-d\Phi = \alpha_\lambda \Phi_r dr$, где $\Phi_r = I_r 4\pi r^2$ — световой поток, входящий в этот слой.

Разделяя переменные, интегрируем данное выражение по r в пределах от a до b и по Φ в пределах от $\Phi_1 = \Phi_0(1-\rho)$ до Φ_2 . Получим выражение $\Phi_2 = \Phi_0(1-\rho)e^{-\alpha_\lambda(b-a)}$, которое находится в соответствии с зависимостью (13.7).

С учетом отражения на внешней сферической поверхности слоя получим вышедший из слоя световой поток

$$\Phi = \Phi_2(1-\rho) = \Phi_0(1-\rho)^2 e^{-\alpha_\lambda(b-a)}.$$

Известно, что полный поток энергии сквозь поверхность

$$\Phi = \iint_S \vec{S} \cdot \vec{ds},$$

где \vec{S} — вектор Умова, среднее по времени значение которого называют интенсивностью волны и обозначают I .

Следовательно, интенсивность света на выходе из сферического слоя, радиус внешней поверхности которого b , определяется выражением

$$I = \Phi_0(1-\rho)^2 e^{-\alpha_\lambda(b-a)} / 4\pi b^2.$$

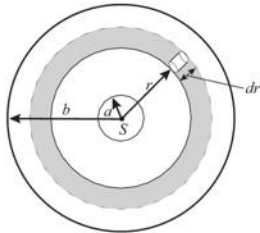


Рис. 13.6

Задача 13.16. Естественный квазимонохроматический свет падает на систему из двух поляризаторов Π_1 и Π_2 , которые расположены так, что угол между плоскостями пропускания поляризаторов $\alpha = 60^\circ$. При прохождении света каждого из поляризаторов потери на отражение, поглощение и рассеяние света составляют $\mu = 5,0\%$.

Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении:

- а) через поляризатор Π_1 ;
- б) через оба поляризатора.

Решение. а) Естественный квазимонохроматический свет падает нормально на грань поляризатора Π_1 (рис. 13.7). Вследствие явления двойного лучепреломления образуются две световые волны (луча): обыкновенная (o) и необыкновенная (e), которые одинаковы по интенсивности и линейно поляризованы.

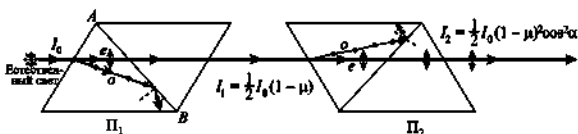


Рис. 13.7

Плоскость колебаний светового вектора \vec{E}_0 перпендикулярна к плоскости чертежа, но из-за полного отражения от границы AB обыкновенная волна попадает на зачерненную поверхность поляризатора Π_1 и полностью поглощается. Необыкновенная волна проходит через поляризатор Π_1 . При этом по условию задачи ее интенсивность уменьшается вследствие отражения на границе, поглощения и рассеяния в веществе поляризатора. Таким образом, интенсивность света I_1 , прошедшего через поляризатор Π_1 , $I_1 = I_0(1 - \mu)/2$, где I_0 — интенсивность естественного монохроматического света, падающего на поляризатор Π_1 ; μ — коэффициент потерь интенсивности света в поляризаторе. Рассчитаем уменьшение интенсивности света: $I_0/I_1 = 2/(1 - \mu) = 2,1$.

Таким образом, при прохождении одного поляризатора интенсивность I_0 падающего света уменьшается в 2,1 раза. Световой вектор \vec{E}_1 лежит в главной плоскости поляризатора Π_1 (т.е. в плоскости чертежа).

б) Затем плоскополяризованный в главной плоскости поляризатора Π_1 свет интенсивностью I_1 падает на поляризатор Π_2 . Интенсивность света I_2 , вышедшего из второго поляризатора, определяется законом

Малюса (с учетом потерь на отражение и поглощение): $I_2 = I_1(1-\mu)\cos^2 \alpha$, или $I_2 = (I_0(1-\mu)^2 \cos^2 \alpha)/2$, где α — угол между плоскостями пропускания поляризаторов.

Искомое уменьшение интенсивности света прохождение через оба поляризатора найдем как отношение интенсивностей I_0 и I_2 : $I_0/I_2 = 2/((1-\mu)^2 \cos^2 \alpha) = 8,9$ (с учетом округления).

Таким образом, после прохождения через два поляризатора интенсивность естественного монохроматического света уменьшится в 8,9 раза. Из поляризатора Π_2 свет выйдет плоскополяризованным, световой вектор \vec{E}_2 будет лежать в плоскости пропускания поляризатора Π_2 .

Задача 13.17. В растворе вещества в прозрачном растворителе с концентрацией C (в процентах) интенсивность монохроматического света при прохождении слоя толщиной $x_1 = x$ ослабляется в τ_1 раз. Пренебрегая отражением на границах слоев, определить, во сколько раз (τ_2) ослабляется интенсивность света в растворе с удвоенной концентрацией этого вещества при прохождении слоя толщиной $x_2 = 1,5x$. Найти молекулярный коэффициент поглощения A_λ раствора единичной концентрации.

Решение. Согласно закону Бугера — Ламберта — Бера запишем соотношения, которые определяют ослабление интенсивности света при прохождении соответственно первого и второго раствора:

$$I_1 = I_0 e^{-A_\lambda C x}, \quad I_2 = I_0 e^{-A_\lambda 2C 1,5x}.$$

По условию задачи коэффициент пропускания первого раствора τ_1 равен отношению интенсивности света I_1 , прошедшего через первый раствор, к интенсивности падающего света I_0 , т.е. $\tau_1 = I_1/I_0 = e^{-A_\lambda C x}$. Тогда коэффициент пропускания второго раствора $\tau_2 = I_2/I_0 = e^{-A_\lambda 2C 1,5x}$.

Прологарифмируем выражения для τ_1 и τ_2 и запишем отношение $\ln \tau_2 / \ln \tau_1$. Получим $\ln \tau_2 = 3 \ln \tau_1$. Следовательно, $\tau_2 = (\tau_1)^3$.

Определим из выражения $\ln(1/\tau_1) = A_\lambda C x$ молекулярный коэффициент поглощения раствора единичной концентрации: $A_\lambda = \frac{\ln(1/\tau_1)}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В вакууме распространяется монохроматическая световая волна с длиной волны $\lambda = 600$ нм и интенсивностью $I = 375$ Вт/м². Найти:

а) амплитуду колебаний r_0 свободного электрона, находящегося в поле этой волны, если в первом приближении действием на него магнитной компонентой волны можно пренебречь;

б) максимальную скорость (V_0) колебаний электрона;

в) отношение амплитудных значений сил, действующих на электрон со стороны магнитной и электрической компонент световой волны (V), если не пренебрегать действием на электрон магнитного поля волны.

Ответ: а) $\lambda_0 = 2,99 \cdot 10^{-12}$ м; б) $V_0 = 9,33 \cdot 10^{-3}$ м/с = 9,41 мм/с; в) $\frac{F_{\text{маг}}}{F_{\text{эб}}} \approx 1,57 \cdot 10^{-11}$.

2. Показатель преломления n ионосферы для радиоволн с частотой $\nu = 10$ МГц равен 0,90. Найти:

а) концентрацию свободных электронов в ионосфере (n_0);

б) фазовую скорость (V);

в) групповую скорость (U) этих волн.

Ответ: а) $n_0 \approx 2,4 \cdot 10^{11}$ м⁻³; б) $V = \frac{c}{n} \approx 3,3 \cdot 10^8$ м/с; в) $U = \frac{c^2}{V} \approx 2,7 \times 10^8$ м/с.

3. Найти групповую скорость (U) рентгеновского излучения в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения при падении рентгеновского излучения из воздуха на поверхность среды равен θ_0 . В этой среде частотой собственных колебаний электронов по сравнению с частотой рентгеновского излучения можно пренебречь. Показатель преломления воздуха $n_a = 1,0$.

Ответ: $U = c \sin \theta_0$.

4. Вычислить групповую скорость (U):

а) упругих поперечных волн в стержне, фазовая скорость которых

$$V = \frac{a}{\lambda} \quad (a = \text{const});$$

б) электромагнитных волн в разряженной плазме, фазовая скорость

которых $V = \frac{c}{\sqrt{1 + A/\omega^2}} \quad (A = \text{const})$.

Ответ: а) $U = \frac{2a}{\lambda} = 2V$; б) $U = c\sqrt{1 + A/\omega^2} = \frac{c^2}{V}$.

5. Получить соотношение групповой и фазовой скоростей света в среде, если фазовую скорость света в этой среде можно представить функцией:

а) $V = a\omega^q$, где $a = \text{const}$, $q = \text{const} < 1$;

б) $V = \beta\lambda^p$, где $\beta = \text{const}$, $p = \text{const} < 1$.

в) Получить соотношение групповой и фазовой скоростей света в среде (U) при $q = -1$ и $p = -1$.

Ответ: а) $U = \frac{V}{1-q}$; б) $U = (1-p)V$; в) $U = \frac{V}{2}$, $U = 2V$.

6. Измерение дисперсии показателя преломления оптического стекла дало $n_1 = 1,528$ для длины волны $\lambda_1 = 434$ нм и $n_2 = 1,523$ для длины волны $\lambda_2 = 486$ нм. Вычислить отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны $\lambda_1 = 434$ нм.

Ответ: $\frac{U_1}{V_1} = 1 - \frac{\lambda_1}{V_1} \frac{dV}{d\lambda} = 1 + \frac{\lambda_1}{n_1} \frac{dn}{d\lambda} = 1 + \frac{\lambda_1 (n_2 - n_1)}{n_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}$, $\frac{U_1}{V_1} = 0,973$.

7. В определенном интервале длин волн зависимость показателя преломления паров йода от длины волны представляет собой следующую функцию: $n(\lambda) = \sqrt{a + b\lambda^{-2} + f\lambda^2}$, где a, b, f — положительные константы. Найти:

- а) групповую скорость волн (U) в этой среде;
 б) длину волны, при которой показатель преломления имеет минимальное значение.
 в) Сравнить фазовую и групповые скорости при этой длине волны.

Ответ: а) $U = \frac{c}{n^3} (a + 2f\lambda^2)$; б) $\lambda = \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{4}}$; в) $U_\lambda = V_\lambda = \frac{c}{\sqrt{a + 2\sqrt{bf}}}$, так

как $\frac{dn}{d\lambda} = 0$ при $n = n_{\min}$.

8. Электромагнитная волна распространяется в плазме с концентрацией свободных электронов n_0 . Найти:

- а) зависимость $\omega(k)$, где k — волновое число, а собственной частотой колебаний по сравнению с частотой волны можно пренебречь;
 б) групповую скорость (U);
 в) фазовую скорость.
 г) Построить графики зависимостей $U(k)$ и $V(k)$.

Ответ: а) $\omega(k) = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} + k^2 c^2}$;

б) $U = \frac{d\omega}{dk} = kc^2 / \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} + k^2 c^2}$;

в) $V(k) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} + k^2 c^2}$; г) рис. 13.8.

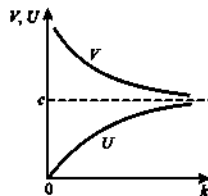


Рис. 13.8

9. Оценить плазменную частоту (см. решение задачи 13.2) (ω_p) при различной концентрации электронов:

а) в ионосфере при $n_0 \approx 10^{11} \text{ м}^{-3}$;

б) в установке по исследованию управляемой термоядерной реакции при $n_0 \approx 10^{21} \text{ м}^{-3}$;

в) в типичном металле при $n_0 \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

Ответ: а) $\omega_p \approx 2 \cdot 10^7 \text{ рад/с}$; б) $\omega_p \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ рад/с}$; в) $\omega_p \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$.

10. Концентрация свободных электронов в плазме $n_0 = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Найти длины электромагнитных волн в вакууме, которые не проникнут в плазму.

Ответ: $\lambda \geq 3,3 \text{ мм}$.

11. Непосредственно у поверхности поглощающего слоя жидкости интенсивность света I_0 для двух различных длин волн λ_1 и λ_2 . После прохождения поглощающего слоя толщиной d интенсивности связаны соотношением $I(\lambda_1) = 2I(\lambda_2)$. Определить, при какой толщине h слоя жидкости интенсивность света с длиной волны λ_1 превысит интенсивность света с длиной волны λ_2 в 10 раз.

Ответ: $h = d \ln 10 / \ln 2$.

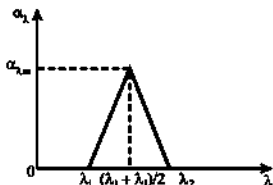


Рис. 13.9

12. График зависимости коэффициента поглощения избирательного фильтра представлен на рис. 13.9.

Записать аналитическое выражение:

а) для зависимости коэффициента поглощения от длины волны избирательного фильтра;

б) для зависимости интенсивности параллельного пучка света, падающего нормально на границу данного избирательно поглощающего фильтра, после прохождения слоя толщиной x .

Ответ: а)
$$\alpha_\lambda = \begin{cases} \alpha_m \left(1 - \frac{2|\Delta\lambda|}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) & \text{при } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2; \\ 0 & \text{при } \lambda < \lambda_1, \lambda > \lambda_2; \end{cases}$$

б)
$$\frac{J_x}{J_0} = \begin{cases} \exp \left(-\alpha_m \left(1 - \frac{2|\Delta\lambda|}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) x \right) & \text{при } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2; \\ 1 & \text{при } \lambda < \lambda_1, \lambda > \lambda_2. \end{cases}$$

13. Вычислить, на сколько процентов уменьшается интенсивность монохроматического света при нормальном падении на грань плоскопараллельной стеклянной пластинки толщиной $d = 4,0$ мм:

а) за счет только поглощения света, если коэффициент поглощения $\alpha_\lambda = 1,2 \text{ м}^{-1}$;

б) за счет только однократного отражения от каждой грани, если показатель преломления стекла $n = 1,5$.

в) Определить, во сколько раз уменьшение интенсивности только за счет отражения от граней пластинки превосходит уменьшение интенсивности света за счет поглощения в ней.

Ответ: а) на 0,48%; б) на 7,8%; в) в 16 раз.

14. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 10$ см нормально падает плоская монохроматическая волна интенсивностью $I_0 = 100 \text{ лм/м}^2$. Показатель преломления и коэффициент поглощения пластинки для данной длины волны – соответственно $n = 1,5$ и $\alpha_\lambda = 1,0 \text{ м}^{-1}$. Найти интенсивность I света, прошедшего через пластинку, с учетом многократных отражений.

Ответ: $I = 83 \text{ лм/м}^2$.

15. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 10$ см нормально падает плоская монохроматическая волна. Для данной длины волны коэффициент поглощения пластинки линейно изменяется от $\alpha_{\lambda_1} = 0,80 \text{ м}^{-1}$ у одной грани до $\alpha_{\lambda_2} = 1,2 \text{ м}^{-1}$ у другой. Определить ослабление интенсивности света (в процентах) за счет поглощения при прохождении через пластинку.

Ответ: $\frac{\Delta I}{I_0} = 10\%$.

16. Определить концентрацию C исследуемого раствора поглощающего вещества в прозрачном растворителе, если одинаковая интенсивность монохроматического света была зафиксирована как на глубине $d_1 = 8$ мм эталонного 3%-го раствора этого вещества, так и на глубине $d_2 = 24$ мм исследуемого $C\%$ -го раствора при одинаковых начальных условиях.

Ответ: $C = 1\%$.

17. Для излучения с длиной волны $\lambda = 770$ нм коэффициент поглощения воды $\alpha_\lambda = 0,0024 \text{ мм}^{-1}$. Определить среднюю глубину проникновения света в воде. (Средней глубиной проникновения света в вещество называют толщину слоя d , при прохождении которой интенсивность

монохроматического пучка света будет ослаблена в $e = 2,7$ раза (или на 37%) по сравнению с начальным значением.)

Ответ: $d = 42$ см.

18. Определить оптическую плотность D раствора, если его коэффициент пропускания $\tau = 30\%$.

Ответ: $D = 0,52$.

14

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Все тела излучают электромагнитные волны за счет внутренней энергии. Поскольку внутренняя энергия определяется температурой тела, то можно утверждать, что любые нагретые тела (имеющие ненулевую температуру) должны излучать. Это один из путей передачи энергии между телами, поскольку тела не только испускают энергию, но и поглощают ее.

Рассмотрим несколько нагретых до разной температуры тел, которые окружены идеально отражающей, не проницаемой для излучения оболочкой (это условие определяет замкнутость системы). Через некоторое время в такой системе установится термодинамическое равновесие, т.е. температура всех тел станет одинаковой. Данное тепловое равновесие достигается даже в том случае, когда тела находятся в вакууме. Тогда испускание и поглощение электромагнитных волн является единственным путем обмена энергией. При термодинамическом равновесии каждое из тел в любой момент времени излучает и поглощает одинаковое количество энергии. Это значит, что плотность энергии излучения в полости имеет определенное значение. Такое излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с телами, имеет непрерывный частотный спектр и называется *равновесным* или *тепловым излучением*.

Допустим, что в рассматриваемой системе одному из тел каким-либо образом сообщили некоторое количество теплоты, в результате чего его температура увеличилась и, следовательно, тело стало испускать энергии больше, чем поглощать, поскольку в начальный момент плотность энергии излучения в полости не изменяется. В результате излучения внутренняя энергия тела (а следовательно, и его температура) будет убывать, что приведет к уменьшению испуска-

емой энергии, в то время как плотность энергии излучения в полости будет возрастать. В результате будет возрастать поглощение энергии излучения другими телами в полости. Температура данного тела будет убывать, а температура остальных тел – возрастать, пока количество испущенной и количество поглощенной телами энергии не сравняются, т.е. система придет в новое состояние равновесия с новым равновесным значением температуры.

Таким образом, тепловое излучение также характеризует состояние термодинамического равновесия системы. В этом случае можно рассматривать температуру как характеристику не только тел, но и излучения в полости. За температуру излучения принимают температуру тела, которое находится в состоянии равновесия с излучением, т.е. испускаемая и поглощаемая телом энергии равны. Тепловое электромагнитное излучение изотропно, однородно и неполяризовано.

Испускательная способность тела M равна потоку энергии, который испускается единицей поверхности тела по всем направлениям: $M = d\Phi/dS$ (данное определение совпадает с определением энергетической светимости). Поглощательная способность является безразмерной величиной и определяется как отношение поглощенного потока $d\Phi'$ единицей поверхности тела к падающему на нее потоку $d\Phi$: $A_n = d\Phi'/d\Phi$.

Для характеристики распределения энергии теплового излучения по частотам (длинам волн) вводят спектральные плотности этих величин:

$$\begin{aligned}d\Phi_\nu &= M_\nu d\nu dS, \\d\Phi_\lambda &= M_\lambda d\lambda dS,\end{aligned}\tag{14.1}$$

где $d\Phi_\nu$ – спектральная плотность светового потока с площадки dS поверхности тела для интервала частот от ν до $\nu + d\nu$; M_ν – коэффициент, характеризующий испускательную способность тела для частоты ν ; $d\Phi_\lambda$ – спектральная плотность светового потока с площадки dS поверхности тела для интервала длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$; M_λ – коэффициент, характеризующий испускательную способность тела для длины волны λ .

Очевидно, что

$$\Phi = \int_0^\infty d\Phi_\nu d\nu = \int_0^\infty d\Phi_\lambda d\lambda.\tag{14.2}$$

Установим связь между величинами M_λ и M_ν . Выберем малый спектральный интервал $d\nu$. На шкале длин волн ему соответствует величина $d\lambda$. Световой поток, приходящийся на данный спектральный интервал, не должен зависеть от выбора переменной, описывающей этот

спектральный интервал, поэтому световые потоки $d\Phi_\nu$ и $d\Phi_\lambda$ должны быть равны. Тогда $M_\nu d\nu = M_\lambda d\lambda$.

Связь между величинами $d\nu$ и $d\lambda$ находится из формулы $\lambda = c/\nu$ простым дифференцированием:

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu. \quad (14.3)$$

Знак \leftarrow в выражении (14.3) показывает только то, что с увеличением длины волны частота уменьшается, и наоборот, поэтому в дальнейшем будем его опускать.

В результате связь между спектральными плотностями излучательной способности будет определяться следующим соотношением:

$$M_\nu = M_\lambda \frac{\lambda^2}{c} = M_\lambda \frac{c}{\nu^2}. \quad (14.4)$$

Следует подчеркнуть, что излучательная способность тела как характеристика его теплового излучения зависит и от температуры тела:

$$dM_\nu = M_{\nu,T} d\nu. \quad (14.5)$$

Полная излучательная способность тела во всем спектральном диапазоне его излучения определяется следующим образом:

$$M_T = \int_0^\infty M_{\nu,T} d\nu. \quad (14.6)$$

Поглощательная способность тела тоже зависит от частоты и температуры тела. Для тел, которые при любой температуре полностью поглощают все падающие на них излучения, поглощательная способность равна единице ($A_{\nu,T} = 1$). Такие тела называются *абсолютно черными*. В природе не существует тел, которые бы полностью соответствовали абсолютно черному телу. Однако ряд веществ (например, сажа, платиновая чернь) имеют поглощательную способность, близкую к единице в ограниченном спектральном диапазоне. Одна из моделей абсолютно черного тела — замкнутая полость с диффузно отражающими стенками, имеющая небольшое отверстие. Свет, попавший через отверстие в эту полость, поглощается стенками, отражается, рассеивается и снова падает на стенки. Назад через отверстие он может выйти только после многочисленных отражений, т.е. свет внутри полости практически полностью поглотится стенками и отверстие снаружи будет выглядеть черным. Таким образом, полость с поглощающими стенками и малым

отверстием для света, попадающего в отверстие, ведет себя как абсолютно черное тело по отношению к направленному на отверстие излучению.

Связь между поглощательной и испускательной способностями тел устанавливается *законом Кирхгофа*: отношение испускательной и поглощательной способностей тел не зависит от природы тела, а зависит только от частоты и температуры:

$$M_{\nu,T}/A_{\nu,T} = \epsilon_{\nu,T}, \quad (14.7)$$

где $\epsilon_{\nu,T}$ — универсальная функция частоты и температуры, которая является испускательной способностью абсолютно черного тела, поскольку для него $A_{\nu,T} = 1$.

Из выражения (14.4) следует, что $\epsilon_{\nu,T} = \epsilon_{\lambda,T} c/\nu^2$.

Закон Стефана — Больцмана устанавливает связь между температурой абсолютно черного тела и его интегральной испускательной способностью (энергетической светимостью тела):

$$\epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu,T} d\nu = \sigma T^4, \quad (14.8)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — постоянная Стефана — Больцмана.

Следует отметить, что абсолютно черное тело является ламбертовым источником.

Если излучающее тело не является абсолютно черным телом, а его коэффициент поглощения зависит только от температуры тела и не зависит от частоты, то такое тело называется «серое тело». Для «серого тела» вводят коэффициент излучения (или степень черноты) α , который показывает отношение энергии теплового излучения «серого тела» к излучению абсолютно черного тела при той же температуре. Тогда испускательную способность «серого тела» можно записать следующим образом: $\epsilon'_T = \alpha \sigma T^4$. Коэффициент излучения абсолютно черного тела $\alpha = 1$, а для «серого тела» $\alpha < 1$.

Для абсолютно черного тела длина волны λ_m , на которую приходится максимум испускательной способности при заданной температуре T , и сама температура T связаны соотношением, названным *формулой смещения Вина*:

$$T\lambda_m = b, \quad (14.9)$$

где $b = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$ — постоянная Вина.

Анализ выражения (14.9) показывает, что при увеличении температуры тела максимум испускательной способности смещается в коротковолновую область.

На основании представлений классической физики была получена формула, связывающая испускательную способность абсолютно черного тела и его температуру для длинноволновой области спектра (формула Рэлея – Джинса):

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \text{ или в шкале длин волн } \varepsilon_{\lambda,T} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT. \quad (14.10)$$

В коротковолновой области формула Рэлея – Джинса резко расходится с опытом, поскольку она предсказывает бесконечно большое возрастание испускательной способности абсолютно черного тела в коротковолновой области (ультрафиолетовая катастрофа). В действительности на опыте наблюдается резкий спад испускательной способности $\varepsilon_{\nu,T}$ при приближении к коротковолновой области спектра.

Исходя из представлений классической термодинамики и электромагнитной теории света немецким физиком В. Виноном была предложена формула, которая хорошо согласовывалась с экспериментом в коротковолновой области спектра:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{C_1}{\lambda^5} \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right), \quad (14.11)$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные.

Получить формулу для спектральной плотности излучения абсолютно черного тела удалось немецкому физика М. Планку. Он высказал предположение, что свет испускается не непрерывно, а отдельными порциями энергии (квантами), величина которых пропорциональна частоте:

$$W = h\nu = hc/\lambda, \quad (14.12)$$

где $h = 6,22 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

На основании этих представлений М. Планк получил следующее выражение для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (14.13)$$

$$\varepsilon_{\lambda, T} = \frac{2\pi^5 h c^2}{\lambda^3} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (14.14)$$

Выражения (14.13), (14.14) называют формулами Планка, причем при переходе от формулы (14.13) к формуле (14.14) и обратно необходимо воспользоваться соотношением (14.3) и рассуждениями, использованными при выводе соотношения (14.4).

Из формул (14.13) и (14.14) можно получить формулы Рэлея – Джинса и Вина, осуществив соответствующий предельный переход: для формулы Рэлея – Джинса положить $hc/(\lambda kT) \ll 1$, а для формулы Вина – $hc/(\lambda kT) \gg 1$. Закон смещения Вина можно получить из формулы (14.14), найдя экстремум данной функции. Закон Стефана – Больцмана также можно получить, проинтегрировав формулу (14.14) по всему спектру. При этом получится выражение для постоянной Стефана – Больцмана σ через величины h и c . Читатель может провести эти математические выкладки самостоятельно.

Высказанное М. Планком как гипотеза предположение о квантовой природе света нашло подтверждение при объяснении закономерностей фотоэффекта. *Внешним фотоэффектом* или *фотоэлектронной эмиссией* называется выбрасывание электронов веществом под воздействием падающего на его поверхность излучения. Для изучения явления внешнего фотоэффекта используют установку, схема которой приведена на рис. 14.1. Установка содержит: вакуумный фотоэлемент, включающий К – фотокатод и А – анод; μA – микроамперметр; V – вольтметр, e – источник тока; $Kл$ – ключ, позволяющий менять полярность источника тока. Изменяя сопротивление реостата, можно изменять напряжение, которое прикладывается к электродам фотоэлемента, а с помощью ключа $Kл$ можно изменять полярность подаваемого напряжения. В результате можно измерить зависимость фототока от величины и полярности приложенного напряжения. Такая зависимость имеет характерный вид (рис. 14.2) при постоянной интенсивности падающего на электрод К (катод) излучения. Из этой зависимости видно, что существует фототок насыщения $I_{н.}$, т.е. предельное значение фототока, не меняющееся при дальнейшем росте напряжения. Существование фототока насыщения означает, что, начиная с некоторого напряжения, все электроны, выбитые светом из металла, достигают анода А. В то же время при приложении некоторого отрицательного напряжения U_0 (называемого запирающим напряжением) фототок прекращается, поскольку создается поле, не пропускающее электроны к аноду (поскольку в этом случае $\Phi_A < \Phi_K$ и между электродами создается поле, которое тормозит выле-

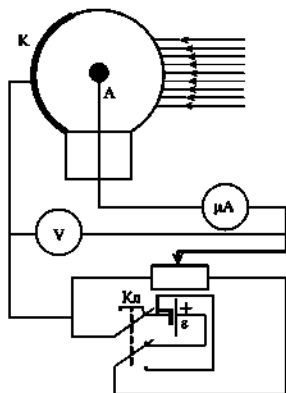


Рис. 14.1

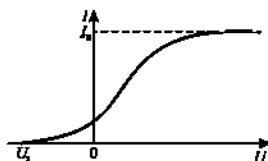


Рис. 14.2

тепшие из металла электроны, и при некотором его значении электроны вообще не достигают анода).

В результате анализа вольт-амперных характеристик, измеренных при различных интенсивностях падающего излучения для различных веществ, А.Г. Столетовым были сформулированы три закона *фотоэффекта*.

1. Сила тока насыщения прямо пропорциональна интенсивности светового излучения, падающего на поверхность фотокатода.

2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности.

3. Если частота света меньше некоторой определенной для данного вещества минимальной частоты ν_0 , называемой *красной границей фотоэффекта*, то энергии фотона становится недостаточно для того, чтобы «выбить» электрон из металла, и фотоэффект не происходит.

Объяснить второй и третий законы фотоэффекта с точки зрения классических волновых представлений о природе света не представляется возможным. В 1905 г. А. Эйнштейн объяснил экспериментальные закономерности фотоэффекта на основе гипотезы световых квантов (фотонов), энергия которых определяется соотношением $W = h\nu$. При поглощении фотона металлом его энергия может передаваться только

одному электрону, и если эта энергия достаточна для того, чтобы освободить электрон от удерживающих его связей, то он может выйти за пределы поверхности металла.

Однако не каждый поглощенный фотон приводит к освобождению электрона. Эффективность «выбивания» электронов характеризуется квантовым выходом – величиной, равной отношению числа фотоэлектронов к числу падающих фотонов, которая, как правило, всегда меньше единицы. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта является выражением закона сохранения энергии:

$$h\nu = W_m + A_{\text{вых}}, \quad (14.15)$$

где $h\nu$ – энергия фотона; W_m – максимально возможная кинетическая энергия выбитого электрона; $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона из металла.

Работа выхода – это минимальная работа, которую необходимо затратить, чтобы «вырвать» электрон с поверхности металла. Значения величины работы выхода для различных металлов приводятся в справочниках.

Из уравнения Эйнштейна следует, что существует минимальное значение частоты света, при котором возможен фотоэффект (красная граница фотоэффекта). Она определяется работой выхода:

$$\nu_k = A_{\text{вых}}/h. \quad (14.16)$$

Граничная частота ν_k соответствует нулю кинетической энергии фотоэлектронов, при которой электрон покидает металл с нулевой скоростью.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов W_m измеряется на опыте по *задерживающему напряжению* U_s , которое необходимо приложить между фотокатодом и анодом для полного прекращения тока:

$$W_m = eU_s, \quad (14.17)$$

где e – заряд электрона.

При взаимодействии с веществом свет, кроме всего прочего, оказывает еще и механическое действие. В частности, он оказывает давление на вещество. Впервые гипотезу о существовании светового давления высказал в XVII в. немецкий астроном И. Кеплер для объяснения отклонения хвостов комет, пролетающих около Солнца. Позднее английский физик Дж. Максвелл показал, что электромагнитные волны должны оказывать давление на вещество. Качественно данное явление можно пояснить следующим образом. Пусть на поверхность тела падает нормально плоская электромагнитная волна. Под действием электри-

ческой составляющей волны (вектор \vec{E}) на заряд q , расположенный на поверхности тела, действует сила Кулона $\vec{F}_K = q\vec{E}$ (рис. 14.3). В результате положительный заряд смещается в направлении вектора \vec{E} , а отрицательный — в противоположном направлении. Следовательно, в проводящих телах возникает поверхностный ток, связанный с перемещениями свободных зарядов (ток проводимости), а в диэлектриках происходит поляризация и связанный с ней поверхностный ток смещения. Под действием магнитной компоненты электромагнитной волны (вектор \vec{B}) на движущиеся заряды начинает действовать сила Лоренца ($\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$), причем направление этой силы совпадает с направлением распространения света (рис. 14.3). Действие силы Лоренца на поверхностные заряды тела и воспринимается как световое давление на тело.

Найдем величину светового давления (для простоты здесь и далее будем рассматривать только случай нормального падения света). Для этого рассмотрим слой среды толщиной dz и площадью dS . Выберем систему координат так, чтобы ось x совпадала с направлением вектора \vec{E} , ось y — с направлением вектора \vec{B} , а ось z — с направлением распространения волны (рис. 14.4).

Будем считать, что среда является слабопроводящей и для нее $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ и удельная проводимость равна σ . Под действием электрической компоненты электромагнитной волны в данном слое возникает ток плот-

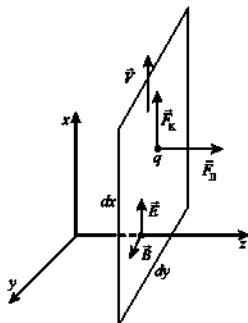


Рис. 14.3

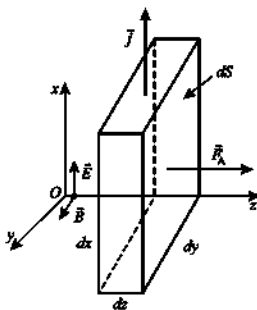


Рис. 14.4

ностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, причем направление вектора \vec{j} будет совпадать с осью x . В выделенном слое будет протекать ток, равный по величине $di = j dy dz$. На элемент данного тока длиной dx будет действовать сила Ампера, равная по модулю

$$F_A = di dx B \quad (14.18)$$

и направленная вдоль оси z .

Согласно второму закону Ньютона площадке тела площадью $dS = dx dy$ за время dt сообщается импульс

$$dK = F_n dt = \sigma E B dx dy dz dt. \quad (14.19)$$

Вместе с тем за время dt поглотится энергия dW электромагнитной волны, которая пойдет на нагревание тела. Согласно закону Джоуля — Ленца:

$$dW = dQ = di dU dt = j dy dz \cdot E dx \cdot dt = dy dz dx \cdot \sigma E^2 dt. \quad (14.20)$$

С учетом соотношения амплитуд электрического и магнитного полей плоской гармонической волны получим:

$$dK/dW = B/E = 1/c, \quad (14.21)$$

где c — скорость света в вакууме.

Модуль импульса, соответствующий единице объема, связан с объемной плотностью энергии единицы объема следующим соотношением: $k_w = w/c$, причем направление импульса волны совпадает с направлением распространения света.

Определим величину давления p , действующего на полностью поглощающую поверхность тела. По определению $p = dF/dS$. Пусть объемная плотность энергии падающей волны равна w и площадка, которая полностью поглощает падающее на нее излучение, расположена перпендикулярно к падающей волне. Рассмотрим цилиндр длиной $l = c dt$ и с площадью основания dS . За время dt вся заключенная в этом цилиндре энергия $W = w dV$ дойдет до поверхности и полностью поглотится. Следовательно, импульс, который волна передаст площадке за это время, $dK = w/c(dV) = w/c(dS c dt) = w dS dt$. Исходя из второго закона Ньютона, имеем: $dK = F dt = p dS dt = w dS dt$. Окончательно $p = w$. Таким образом, давление света в случае полностью поглощающей площадки численно равно объемной плотности энергии электромагнитной волны.

В случае полностью отражающей площадки волна после отражения изменит свое направление на противоположное, следовательно, импульс

волны останется по модулю таким же, но изменит направление на противоположное. Значит, при отражении волны изменение импульса $\Delta \vec{K} = d\vec{K}_2 - d\vec{K}_1 = -2d\vec{K}_1$, где $d\vec{K}_1$ — импульс волны. Следовательно, величина давления будет равна $p = 2w$, т.е. в 2 раза больше, чем при полностью поглощающей площадке.

Если площадка имеет коэффициент отражения $\rho < 1$, а часть энергии падающей волны α поглощается (причем в силу закона сохранения энергии $\alpha + \rho < 1$), то величина давления

$$p = \rho 2w + \alpha w = (\alpha + 2\rho)w. \quad (14.22)$$

З а м е ч а н и е. В случае выполнения строгого неравенства $\alpha + \rho < 1$, $1 - (\alpha + \rho)$ часть света проходит через вещество.

Установим связь между освещенностью поверхности E_s и объемной плотностью энергии волны. По определению освещенность — это плотность потока энергии, падающего за единицу времени на поверхность единичной площади. Энергию волны, которая за время Δt падает нормально на маленькую площадку dS , ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, $\Delta W = wcdS\Delta t$, где c — скорость электромагнитной волны в вакууме. Таким образом, освещенность

$$E_s = \frac{\Delta W}{dS\Delta t} = wc. \quad (14.23)$$

Тогда при нормальном падении световой волны на площадку с коэффициентом отражения ρ давление света будет определяться соотношением

$$p = (\alpha + 2\rho) \frac{E_s}{c}. \quad (14.24)$$

С точки зрения квантовой теории давление света можно рассматривать как процесс передачи импульса от фотона к отражающей или поглощающей площадке.

Найдем величину импульса фотона. Пусть поток монохроматического света частотой ν и объемной плотностью энергии w падает нормально на площадку dS . За время dt на нее попадут фотоны, которые заключены в цилиндре длиной cdt и площадью основания dS . Заключенная в объеме этого цилиндра энергия $W = wdScdt$. Тогда полное количество фотонов, падающих на площадку за время dt ,

$$N = W / (h\nu) = wdScdt / (h\nu). \quad (14.25)$$

Пусть p_ϕ — импульс одного фотона, тогда импульс, который будет передан площадке за время dt , $dK = p_\phi N = p_\phi w dS dt / (hv)$. В то же время $dK = F dt = p dS dt$, откуда $p_\phi = p h v / (c w)$. Подставив величину давления на поглощающую поверхность $p = w$, получим величину импульса фотона: $p_\phi = h v / c$.

Примеры решения задач

Задача 14.1. Имеются две сферические оболочки (рис. 14.5) с малыми отверстиями одинаковых диаметров $d = 1,0$ см и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Расстояние между отверстиями $h = 10$ см. В полости 1 поддерживается постоянная температура $T_1 = 400$ К. Вычислить температуру, установившуюся в полости 2. Теплопроводностью стенок оболочек пренебречь.

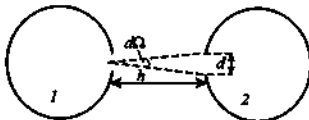


Рис. 14.5

Решение. Поскольку наружные поверхности оболочек абсолютно отражающие, то они не поглощают падающее на них излучение и с учетом пренебрежения теплопроводностью не нагреваются, т.е. не излучают. Вследствие этого обмен энергией между оболочками будет осуществляться за счет поглощения и испускания через малые отверстия. Полость с малым отверстием можно считать абсолютно черным телом. Соответственно для данного тела справедливы все законы излучения абсолютно черного тела. Температуру полости 2 можно найти из условия баланса энергетических потоков: поток энергии, излучаемый отверстием полости 1 и падающий на отверстие полости 2, должен равняться потоку энергии, испускаемому из отверстия полости 2 во всех направлениях: $\Phi_{e12} = \Phi_{e2\infty}$. Найдем Φ_{e12} . Исходя из закона Стефана — Больцмана, светимость отверстия полости 1 как абсолютно черного тела $M_1 = \sigma T_1^4$. Таким образом, испускаемый отверстием полости 1 в телесный угол 2π поток энергии $\Phi_{e1\infty} = M_1 S = M_1 \pi d_1^2 / 4$, поскольку отверстие полости является ламбертовым источником, для которого, согласно формуле (2.6), $M = \pi L$, причем яркость L — величина постоянная. Тогда найдем

поток энергии, падающий на отверстие полости 2, с учетом того, что это отверстие является ламбертовым источником:

$$\Phi_{e12} = Id\Omega = LSd\Omega = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{\pi d^2}{4} d\Omega,$$

где $d\Omega = \frac{\pi d^2}{4h^2}$ — телесный угол, под которым отверстие полости 2 видно из отверстия полости 1. Этот поток энергии должен равняться потоку, испускаемому в телесный угол 2π из отверстия полости 2.

$$\Phi_{e2\infty} = \frac{\pi d^2}{4} \sigma T_2^4.$$

Тогда

$$\sigma T_1^4 \frac{d^2}{4} \frac{\pi d^2}{4h^2} = \frac{\pi d^2}{4} \sigma T_2^4,$$

откуда

$$T_2 = T_1 \sqrt[4]{\frac{d^2}{4h^2}}, \quad T_2 = 90 \text{ К.}$$

Задача 14.2. Диаметр вольфрамовой спирали лампочки накаливания $d = 0,30$ мм, длина спирали $l = 50$ мм. При включении лампочки в цепь напряжением $U = 220$ В через лампочку течет ток $I = 0,15$ А. Определить температуру спирали лампочки. Считать, что при установлении теплового равновесия все выделяющееся в нити количество теплоты теряется в результате лучистого испускания. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела считать для этой температуры $\alpha = 0,31$.

Решение. При установлении теплового равновесия вся мощность, которая выделяется в спирали при протекании по ней электрического тока ($P = UI$), испускается в виде лучистой энергии: $P_{\text{исп}} = \alpha \epsilon_T S$, где ϵ_T — испускательная способность абсолютно черного тела; S — площадь испускающей поверхности спирали. Поскольку спираль лампы выполнена в виде тонкого и длинного цилиндра ($d \ll l$), то площадью испускающей поверхности можно считать только боковую поверхность цилиндра, т.е. $S = \pi dl$. Тогда $P_{\text{исп}} = \alpha \pi dl \epsilon_T = \pi dl \alpha \sigma T^4$, откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\pi dl \alpha \sigma}}.$$

Подставив численные значения, получим $T \approx 2600$ К.

Задача 14.3. Какую мощность надо подводить к зачерненному металлическому шарик радиусом $r = 2,0$ см, чтобы поддерживать его температуру выше температуры окружающей среды на 40 °С? Температура окружающей среды 27 °С. Считать, что выделяемое количество теплоты теряется только вследствие излучения, а температура окружающей среды остается неизменной.

Решение. Поскольку шарик зачерненный, то его можно считать абсолютно черным телом. Как и любое нагретое тело, шарик будет терять энергию вследствие излучения. Температура окружающей среды отлична от 0 К, следовательно, эта среда заполнена равновесным излучением, которое и поглощается шариком, причем шарик будет поглощать все излучение, которое падает на него. А поскольку по условию задачи температура шарика выше, чем температура окружающей среды, то для поддержания постоянной температуры шарика необходимо сообщить ему дополнительную энергию. Составим уравнение теплового баланса: $P_{\text{наг}} = P_{\text{изл}} + P$, где $P_{\text{изл}}$ — мощность излучения шарика; $P_{\text{изл}}$ — мощность излучения, поглощаемого шариком; P — мощность, которую необходимо подводить к шарик для поддержания его температуры. Исходя из закона Стефана — Больцмана и считая шарик абсолютно черным телом, можно записать: $P_{\text{изл}} = S\sigma T^4$, где $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности шарика; T — его температура. Для того чтобы найти мощность, поглощаемую шариком, мысленно его окружим бесконечно тонкой оболочкой радиусом r , которая имеет температуру окружающей среды T_0 . Такая оболочка находится в тепловом равновесии с окружающей средой, т.е. с точки зрения шарика для него не будет разницы в процессе теплообмена: окружен он такой оболочкой или просто средой, если их температуры одинаковы. Мощность излучения оболочки, направленного в сторону шарика, $P_{\text{об}} = S\sigma T_0^4$, где T_0 — температура окружающей среды. Поскольку шарик является абсолютно черным телом, то $P_{\text{полн}} = P_{\text{об}} = S\sigma T_0^4$. Тогда $P = S\sigma(T^4 - T_0^4)$, $P = 1,5$ Вт.

Задача 14.4. Медный шарик диаметром d поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика T_0 . Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти зависимость температуры шарика от времени.

Решение. По условию задачи шарик можно считать абсолютно черным телом. Шарик, как и любое нагретое тело, будет терять энергию вследствие испускания. Поскольку температура стенок сосуда поддерживается близкой к абсолютному нулю, то можно считать, что стенки сосуда поглощают всю падающую на них энергию, но при этом ничего не испускают. Энергия, которую шарик теряет в единицу времени след-

ствие излучения, $dW = S \epsilon_T dt = \pi d^2 \cdot \sigma T^4 dt$. Энергия на излучение шарика берется из его внутренней энергии, так как при изменении температуры шарика на величину dT его внутренняя энергия изменяется на величину $cm dT$, где c – удельная теплоемкость шарика; $m = \pi \rho d^3 / 6$ – его масса; ρ – плотность меди (здесь предполагается, что выполняется условие квазистационарности, т.е. процессы теплопроводности в шарике протекают быстрее, чем происходит значительное изменение его температуры, тогда температуру во всех точках шарика можно считать одинаковой). Таким образом, можно записать: $\pi d^2 \cdot \sigma T^4 dt + c \pi \rho d^3 / (6 dT) = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{6\sigma}{c\rho d} \cdot dt = -\frac{dT}{T^4}, \quad \int_0^t \frac{6\sigma}{c\rho d} \cdot dt = -\int_{T_0}^T \frac{dT}{T^4}.$$

После интегрирования получим:

$$\frac{6\sigma}{c\rho d} t = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} \right),$$

откуда

$$T = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{18\sigma}{c\rho d} t - \frac{1}{T_0^3}}}.$$

Задача 14.5. Поток энергии Φ_e , излучаемый точечным изотропным источником света, равен 600 Вт. На расстоянии $r = 1,0$ м от источника света перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 2,0$ см. Считая, что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, определить силу F светового давления на зеркальце.

Решение. Точечный источник является изотропным, следовательно, сила света этого источника $I = \Phi_e / (4\pi)$. Падающий на зеркальце поток $\Phi = I d\Omega = I \pi d^2 / (4r^2)$ (так как $r \gg d$), тогда, согласно формуле (2.7), освещенность плоского круглого зеркальца $E_e = 4\Phi / \pi d^2 = \Phi_e / (4\pi r^2)$. Поскольку площадка зеркальная, то она отражает весь свет, который на нее падает, т.е. $\rho = 1$. Площадка размещена перпендикулярно падающей волне, поэтому давление света на зеркальце $p = 2E_e / c$, откуда сила давления

$$F = pS = \frac{\pi E d^2}{c} = \frac{\Phi_e d^2}{8r^2 c}$$

Подставив численные значения, получим:

$$F = \frac{600 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ Н}$$

Задача 14.6 Давление p монохроматического света ($\lambda = 600 \text{ нм}$) на черную поверхность, расположенную перпендикулярно к падающим лучам, равно $0,10 \text{ мкПа}$. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1,0 \text{ с}$ на поверхность площадью $S = 1,0 \text{ см}^2$.

Решение. Число фотонов, падающих на поверхность площадки, можно найти несколькими способами. Рассмотрим энергетический способ. Давление света для черной (полностью поглощающей) площадки связано с объемной плотностью энергии следующим соотношением: $p = w$. Тогда число падающих фотонов найдем исходя из формулы (14.25):

$$N = wS\Delta t / (h\nu) = pS\Delta t / h$$

Второй способ — динамический: $p = F/S$, $F = dK/\Delta t$, где dK — импульс, который фотоны передают поверхности за время Δt : $dK = Np_\phi$; p_ϕ — импульс фотона: $p_\phi = h/\lambda$. Окончательно получим $p = Nh/(S\lambda\Delta t)$, и число фотонов $N = pS\Delta t\lambda/h$, что совпадает с вышеполученным результатом.

Подставив численные значения, будем иметь:

$$N = 1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 600 \cdot 10^{-6} / (6,62 \cdot 10^{-34}) = 9,1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$$

Задача 14.7. Найти световое давление p на стенки электрической 100-ваттной лампочки. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5 \text{ см}$. Стенки лампочки отражают 4% и пропускают 60% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение и размеры спирали лампочки намного меньше радиуса колбы. Спираль находится в центре колбы.

Решение. Поскольку размеры спирали лампочки намного меньше радиуса колбы и спираль излучает свет во все стороны, то ее можно считать точечным изотропным источником, который находится в центре. Тогда освещенность стенок колбы $E_e = \Phi_e / (4\pi r^2)$, где Φ_e — поток энергии, испускаемый спиралью в телесный угол 4π . Давление света на стенки колбы будет определяться формулой (14.24), где $\rho = 0,04$

и $\alpha = (1 - 0,6) - \rho = 0,36$ — коэффициенты отражения и поглощения соответственно. Тогда $p = (2\rho + \alpha)\Phi_s / (4\pi r^2)$. Подставив численные значения, получим $p = 4,7$ мкПа.

Задача 14.8. Определить давление p солнечного излучения на зачерненную пластинку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли относительно Солнца. Считать Солнце абсолютно черным телом с температурой 5800 К. Диаметр солнечного диска виден с поверхности Земли под углом $\theta = 0,53^\circ$.

Решение. Для нахождения давления света, согласно формуле (14.24), необходимо знать освещенность зачерненной пластинки. По условию задачи Солнце является абсолютно черным телом, которое видно с Земли под малым углом, поэтому его можно считать точечным изотропным источником света. Следовательно, освещенность пластинки $E_e = \Phi_s / (4\pi R^2)$ (см. предыдущую задачу), где Φ_s — поток энергии, испускаемый Солнцем; R — расстояние от Земли до Солнца.

Найдем поток энергии, испускаемый Солнцем во всех направлениях, считая Солнце абсолютно черным телом. Согласно закону Стефана — Больцмана $\Phi_s = \sigma T^4 S$, где S — площадь поверхности Солнца. Ее можно найти по формуле $S = \pi d^2$, где d — диаметр Солнца. Диаметр d можно найти, исходя из видимых размеров Солнца, по формуле $d = \theta R$, поскольку угловые размеры Солнца малы. Тогда освещенность пластинки $E_e = \sigma T^4 \pi \theta^2 R^2 / (4\pi R^2) = \sigma T^4 \theta^2 / 4$. Давление света на зачерненную пластинку $p = \sigma T^4 \theta^2 / (4c)$. Подставив численные значения, получим:

$$p = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 (0,53\pi / 180)^2}{4 \cdot 3 \cdot 10^8} = 4,6 \text{ мкПа.}$$

Задача 14.9. До какого максимального потенциала зарядится удаленный от других тел медный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 140$ нм, если $\lambda_c = 282$ нм — красная граница фотоэффекта для меди?

Решение. При облучении медного шарика светом с длиной волны $\lambda = 140$ нм наблюдается внешний фотоэффект ($\lambda < \lambda_c$). При этом шарик, теряя электроны, заряжается положительно. Заряжаться шарик будет до тех пор, пока максимальная кинетическая энергия (W_m) выбитого электрона будет больше, чем потенциальная энергия взаимодействия выбитого электрона с положительно заряженным шариком ($e\varphi$). В том случае, когда эти энергии сравниваются, все выбитые электроны будут

возвращаться назад и заряд шарика и его потенциал больше изменяться не будут.

Из уравнения для фотоэффекта следует:

$$\frac{hc}{\lambda} = W_{\text{из}} + A_{\text{вых}} = W_{\text{из}} + \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}}$$

Потенциал шарика найдем из закона сохранения энергии $W_{\text{из}} = e\phi$.
Получим:

$$\phi = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}} \right) \approx 4,46 \text{ В.}$$

Задача 14.10. Световая монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 140 \text{ нм}$ и интенсивностью $I = 10 \text{ Вт/см}^2$ нормально падает на медный фотокатод электровакуумного фотоэлемента площадью $S = 1,0 \text{ см}^2$ ($\lambda_{\text{кр}} = 282 \text{ нм}$ — красная граница фотоэффекта для меди). Найти максимально возможную силу фототока, если квантовый выход фотоэффекта $Y = 1,0 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Длина волны падающего света меньше красной границы фотоэффекта для меди, значит, фотоэффект будет иметь место. Найдем количество фотонов, падающих на фотокатод за время dt . За это время принесенная волной на фотокатод энергия $dW = ISdt$, тогда за время dt на фотокатод упадет $N = dW\lambda/(hc)$ фотонов. Количество электронов, которые за время dt покинут фотокатод, $N_e = YN = YIS\lambda dt/(hc)$. Поскольку необходимо найти максимально возможную силу фототока, будем считать, что все электроны, «выбитые» с катода, долетают до анода и участвуют в формировании фототока. По определению $i = dq/dt = eN_e/dt$. Тогда $i = eYIS\lambda/(hc)$. Подставив численные значения, получим $i = 1,1 \text{ мА}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить установившуюся температуру T зачерненного металлического шарика, расположенного вне земной атмосферы на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли относительно Солнца. Считать Солнце абсолютно черным телом с температурой $T_0 = 5800 \text{ К}$. Диаметр солнечного диска виден с поверхности Земли под углом $\theta = 0,53^\circ$.

Ответ: $T = T_0 \sqrt{\theta}/2$, $T = 278 \text{ К}$.

2. Поверхность металла (работа выхода $A_{\text{вых}} = 4,0$ эВ) облучается излучением с длиной волны $\lambda = 250$ нм. Найти максимальный импульс вылетающих из металла электронов.

Ответ: $p = \sqrt{2m_e hc/\lambda - 2m_e A}$, $p = 5,3 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

3. Найти ускорение a , которое приобретает спутник массой $m = 10$ кг, имеющий зеркальный солнечный парус площадью $S = 50$ м². Парус ориентирован перпендикулярно солнечным лучам. Спутник находится на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли относительно Солнца. Считать Солнце абсолютно черным телом с температурой $T_0 = 5800$ К. Диаметр солнечного диска виден с Земли под углом $\theta = 0,53^\circ$.

Ответ: $a = S\sigma T^4 \theta^2 / (4mc)$, $a = 2,3 \cdot 10^{-5}$ м/с².

4. С поверхности радиатора площадью $S = 20$ см² при температуре $T = 400$ К за время $t = 60$ с излучается энергия $W = 90$ Дж. Определить коэффициент теплового излучения α материала радиатора.

Ответ: $\alpha = W / (\sigma T^4 S t)$, $\alpha = 0,52$.

5. Температуру абсолютно черного тела уменьшили в 2 раза. При этом длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности, увеличилась на $\Delta\lambda = 400,0$ нм. Определить начальную (T_1) и конечную (T_2) температуру тела.

Ответ: $T_1 = b/\Delta\lambda$, $T_1 = 7250$ К; $T_2 = b/2\Delta\lambda$, $T_2 = 3625$ К.

6. Определить световое давление p на металлическую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,80$ при падении на нее под углом $\theta = 30^\circ$ световой волны интенсивностью $I = 10$ кВт/см².

Ответ: $p = 2\rho I \cos\theta/c$, $p = 4,6 \cdot 10^{-4}$ Па.

7. Монохроматическая волна с частотой ν падает на медный электрод фотоэлемента ($A_{\text{вых}} = 5,0$ эВ). При некотором минимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок прекращается. Изменив частоту света в 2 раза, установили, что для прекращения фототока достаточно увеличить задерживающую разность потенциалов в 3 раза. Чему равна частота ν_0 падающего света?

Ответ: $\nu_0 = 2A_{\text{вых}}/h$, $\nu_0 = 1,2 \cdot 10^{15}$ Гц.

8. На одну из пластин плоского конденсатора емкостью $C = 1,0$ мкФ падает плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 140$ нм. Работа выхода электрона с поверхности пластины $A_{\text{вых}} = 2,0$ эВ. До какого максимального заряда q зарядится конденсатор?

Ответ: $q = (hc/\lambda - A_{\text{вых}})C/e$, $q = 6,8$ мкКл.

9. С какого максимального расстояния L будет заметна красная лампочка на вершине трубы (длина волны света $\lambda = 650$ нм, испускаемый

лампочкой поток энергии $\Phi_e = 1,0$ Вт)? Пороговую чувствительность глаза n принять равной 50 фотонов в 1 с. Диаметр зрачка $d = 0,50$ см. Поглощением и рассеянием фотонов на пути от источника до глаза можно пренебречь.

Ответ: $L = \sqrt{\frac{d^2 \Phi_e \lambda}{16nhc}}$, $L = 3,2 \cdot 10^2$ км.

10. Какую скорость (V) приобретет маленькое плоское зеркальце массой $m = 0,10$ г, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити в вакууме, если в него попадет короткий световой импульс лазера с энергией $W = 10$ Дж. Коэффициент отражения $\rho = 0,9$, а остальная часть излучения поглощается зеркальцем. Луч лазера падает нормально на зеркальце.

Ответ: $V = (\rho + 1)W / (mc)$, $V = 6,3 \cdot 10^{-4}$ м/с.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахманов, С.А.* Физическая оптика / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. М., 2004.
2. *Бори, М.* Основы оптики / М. Бори. М., 1973.
3. *Бутиков, Е.И.* Оптика / Е.И. Бутиков. СПб., 2003.
4. *Быков, А.В.* Оптика. Методика решения задач / А.В. Быков, И.В. Митин, А.М. Салецкий. М., 2010.
5. *Джеррард, А.* Введение в матричную оптику / А. Джеррард, М.Дж. Берч. М., 1978.
6. *Ильичева, Е.Н.* Методика решения задач оптики / Е.Н. Ильичева. М., 1981.
7. *Иродов, И.Е.* Волновые процессы. Основные законы / И.Е. Иродов. М., 2002.
8. *Иродов, И.Е.* Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. М., 1988.
9. *Калитеевский, Н.И.* Волновая оптика / Н.И. Калитеевский. М., 1995.
10. *Клищенко, А.П.* Оптика / А.П. Клищенко. Минск, 2001.
11. *Ландсберг, Г.С.* Оптика / Г.С. Ландсберг. М., 2006.
12. *Маскевич, А.А.* Оптика / А.А. Маскевич. Гродно, 2010.
13. *Матвеев, А.Н.* Оптика / А.Н. Матвеев. М., 1985.
14. *Саржевский, А.М.* Оптика / А.М. Саржевский. Минск, 1984, 1986. Т. 1, 2.
15. Сборник задач по общему курсу физики. Оптика / под ред. Д.В. Сивухина. М., 1977.
16. *Сивухин, Д.В.* Общий курс физики. Оптика / Д.В. Сивухин. М., 1980.
17. *Хяусс, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хяусс. М., 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Свойства электромагнитных волн	7
2. Фотометрия	27
3. Интерференция света	52
4. Дифракция Френеля на круговом препятствии ..	89
5. Дифракция Френеля на полуплоскости	105
6. Дифракция Фраунгофера	117
7. Геометрическая оптика	133
8. Дифракционная теория оптических и спектральных приборов	184
9. Поляризация электромагнитных волн	198
10. Распространение света в анизотропной среде. Двойное лучепреломление	220
11. Интерференция поляризованных волн при прохождении через кристаллы	242
12. Оптическая активность и наведенная анизотропия	263
13. Дисперсия и поглощение света	282
14. Тепловое излучение. Квантовая природа света ...	313
Рекомендуемая литература	333

Оптика. Решение задач: учебное пособие / Л. И. Бузов [и др.];
О-62 под общ. ред. Л. И. Бузова. — Минск : Вышэйшая школа, 2018. —
334 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2981-4.

Подробно, доступно изложено решение задач по основным разделам курса классической оптики. В ряде задач проведено дополнительное исследование полученных решений. Для лучшего понимания и усвоения материала каждая глава содержит отдельные элементы теории, необходимые для решения приведенных задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Для студентов всех специальностей, изучающих курс классической общей физики, преподавателей учреждений высшего образования и средних специальных учебных заведений, учителей средних общеобразовательных школ.

УДК 535(075.8)
ББК 22.34я73

Учебное издание

Буров Леонид Иванович
Горбачев Александр Сергеевич
Капудяк Ирина Александровна
Кеябровская Наталия Геннадьевна
Медведь Ирина Николаевна

ОПТИКА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Редактор *Т.К. Хваль*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.К. Хваль*
Компьютерная верстка *М.В. Горещкой*

Подписано в печать 24.05.2018. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Вернитура «Ньютоны». Офсетная печать. Усл. печ. л. 19,53. Уч.-изд. л. 18,6.
Тираж 400 экз. Заказ 2095.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Таваян, 11, 222310, Могилёво.