Я. П. ПОНАРИН

АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ в ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКВА — 2004

1—7685.—Я. П. Понарин.

УДК 512.62:514.112
ББК 22.151.5
П56

Понарин Я. П.

П56 Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. — М.: МЦНМО, 2004. — 160 с.: ил. — ISBN 5-94057-152-2.

В книге в научно-популярной форме излагаются основы метода комплексных чисел в геометрии. Отдельные главы посвящены многоугольникам, прямой и окружности, линейным и круговым преобразованиям. Метод комплексных чисел иллюстрируется на решениях более 60 задач элементарного характера. Для самостоятельного решения предлагается более 200 задач, снабжённых ответами или указаниями.

Книга адресуется всем любителям геометрии, желающим самостоятельно овладеть методом комплексных чисел. Её можно использовать для проведения кружков и факультативных занятий в старших классах средней школы.

ББК 22.151.5

ISBN 5-94057-152-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*—7685.—Я. П. Понарин.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга, которую вы открыли, относится к жанру научно-популярной литературы. Она может служить учебным руководством для тех, кто намерен освоить один из алгебраических методов в геометрии — метод комплексных чисел.

Известно, сколь широко используются комплексные числа в математике и её приложениях. Особенно часто применяется функции комплексного переменного, в частности, аналитические функции. Их изучение интересно само по себе, кроме того, они используются в механике, аэро- и гидродинамике, в алгебраической и неевклидовых геометриях, теории чисел.

Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать и в более простых разделах математики — элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, аффинных и круговых преобразований, а также в электротехнике и в различных механических и физических задачах.

Названные выше разделы элементарной математики хорошо описываются с использованием комплексных чисел, однако в литературе это отражено мало. На русском языке фактически отсутствуют руководства по элементарной геометрии и примыкающей к ней теории преобразований, в которых использовался бы алгебраический аппарат комплексных чисел.

Автор попытался внести свой скромный вклад в устранение указанного пробела. Изложенный материал не требует глубоких специализированных знаний — от читателя требуется лишь владение элементарной алгеброй, геометрией и тригонометрией на уровне средней школы. Исключение из курса алгебры средней школы комплексных чисел нанесло ущерб этому курсу и создало трудности для их применения в геометрии. Однако это обстоятельство не является непреодолимым препятствием для работы с данной книгой. Достаточно ознакомиться с систематическим изложением этого раздела элементарной алгебры, например, по пособиям [1] или [3] и выполнить имеющиеся там упражнения.

Первые три главы книги можно с успехом использовать для кружков и факультативных занятий в старших классах, для подготовки учащихся к математическим олимпиадам, для внеклассного чтения учащихся. Они смогут увидеть известные им геометрические факты в новом свете и овладеть новыми понятиями.

Книга может служить хорошим пособием для спецкурсов и спецсеминаров при подготовке учителей математики в педагогических вузах. Её можно рекомендовать учителям математики для самообразования.

Заинтересованный читатель найдёт здесь многочисленные задачи с нестандартным содержанием, которые легко поддаются решению при помощи комплексных чисел. Это не может не заинтересовать широкий круг читателей, увлекающихся математикой, и поможет им овладеть методом комплексных чисел.

Метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи прямым вычислением по готовым формулам. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условием задачи и её требованием. В этом состоит необычайная простота этого метода по сравнению с векторным и координатным методами, методом геометрических преобразований, конструктивно-синтетическим методом, требующими от решающего порой немалой сообразительности и длительных поисков, хотя при этом готовое решение может быть очень коротким.

Автору нередко приходилось отвечать на странный вопрос: «Нужен ли в геометрии метод комплексных чисел? Вот эту задачу можно-де решить и без комплексных чисел так-то, а эту ещё и так, и этак». Конечно! Все задачи могут быть решены и без комплексных чисел. Но ведь в том-то и дело, что алгебра комплексных чисел представляет собой ещё один эффективный метод решения планиметрических задач. Вредного или лишнего здесь ничего не может быть. Речь может идти лишь о выборе метода, который более эффективен для данной задачи. Споры о преимуществах того или иного метода являются беспредметными, если рассматривать эти методы вообще, без применения к конкретной задаче.

В книге представлено довольно много задач для самостоятельного решения по имеющимся образцам. Нет нужды решать все задачи подряд. К задачам, вызвавшим трудности, лучше обратиться в другой раз, когда полученные навыки закрепятся.

Автор считает своим долгом почтить светлую память его безвременно ушедшего из жизни дорогого учителя Залмана Алтеровича Скопеца, по совету, при внимании и помощи которого была начата работа над этой книгой. В неё вошло множество составленных им задач, опубликованных ранее.

Апрель 2004 года. *Автор.*

Глава 1

ОСНОВЫ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел и действий над ними

1.1. Плоскость комплексных чисел. Зададим на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy. Тогда каждому комплексному числу z, представленному в алгебраической форме $z=x+iy$ (x, y — действительные числа; $i^2=-1$), можно однозначно поставить в соответствие точку M плоскости с координатами (x, y) (рис. 1): $z=x+iy \leftrightarrow M(x, y)$. Комплексное число z называют *комплексной координатой* соответствующей точки M и пишут: $M(z)$.

Следовательно, множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел. Эту плоскость называют *плоскостью комплексных чисел*. Начало O системы координат называют при этом начальной или нулевой точкой плоскости комплексных чисел.

При $y=0$ число z — действительное. Действительные числа изображаются точками оси Ox, поэтому она называется *действительной осью*. При $x=0$ число z — чисто мнимое: $z=iy$. Чисто мнимые числа изображаются точками на оси Oy, поэтому она называется *мнимой осью*. Нуль — одновременно действительное и чисто мнимое число.

Расстояние от начальной точки O до точки $M(z)$ называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$ или r:

$$|z|=r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Если φ — ориентированный угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, то по определению синуса и косинуса $\sin\varphi=y/r$, $\cos\varphi=x/r$, откуда $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и поэтому

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

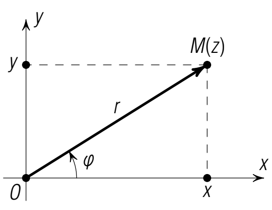

Рис. 1

Такое представление комплексного числа называется его *тригонометрической формой*. Угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\arg z$: $\varphi=\arg z$.

1.2. Операция перехода к сопряжённому числу. Если дано комплексное число $z=x+iy$, то комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется *комплексно сопряжённым* (или просто *сопряжённым*) этому числу z. Тогда, очевидно, и число z сопряжено числу $\bar{z}$. Точки $M(z)$ и $M_1(\bar{z})$ симметричны относительно оси Ox (рис. 2).

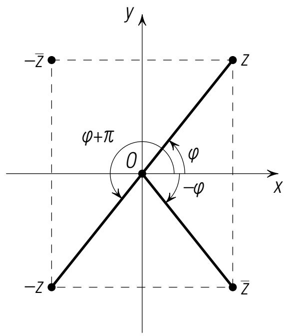

Рис. 2

Из равенства $z=\bar{z}$ следует $y=0$ и обратно. Это значит, что *числа, равные своим сопряжённым, являются действительными.* Точки с комплексными координатами z и $-z$ симметричны относительно начала координат O. Значит, точки с комплексными координатами z и $-\bar{z}$ симметричны относительно оси Oy. Из равенства $z=-\bar{z}$ вытекает $x=0$ и обратно. Поэтому *условие $z=-\bar{z}$ является критерием принадлежности числа к чисто мнимым.* Для любого числа z очевидно

$$|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|.$$

Сумма и произведение двух сопряжённых комплексных чисел являются действительными числами: $z+\bar{z}=2x$, $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.

Число, сопряжённое с суммой, произведением или же частным комплексных чисел, есть соответственно сумма, произведение или частное чисел, сопряжённых с данными комплексными числами:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2, \quad \overline{z_1:z_2}=\bar{z}_1:\bar{z}_2.$$

Эти равенства можно легко проверить, пользуясь формулами для операций над комплексными числами в алгебраической форме. Для примера покажем истинность последнего равенства. Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тогда $\bar{z}_1=x_1-iy_1$, $\bar{z}_2=x_2-iy_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$. Согласно этой же формуле

$$\bar{z}_1:\bar{z}_2=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{(-y_1)x_2-x_1(-y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\overline{z_1:z_2}.$$

В дальнейшем операция перехода к сопряжённому числу («операция черта») будет часто использоваться.

1.3. Векторная интерпретация комплексных чисел, их сложения и вычитания. Каждой точке $M(z)$ плоскости комплексных чисел взаимно однозначно соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в нулевой точке O. Поскольку сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами, выполняются по тем же формулам, что сложение

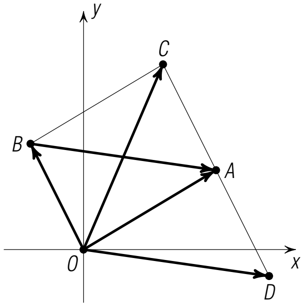

Рис. 3

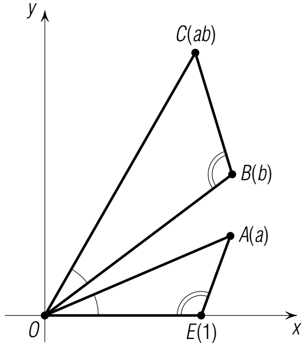

Рис. 4

и вычитание соответствующих им комплексных чисел, то сложению и вычитанию комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, однозначно отвечает сложение и вычитание соответствующих им векторов. Именно, если a и b — комплексные координаты точек A и B, то число $c=a+b$ является координатой точки C такой, что $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (рис. 3). Комплексному числу $d=a-b$ соответствует такая точка D, что $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

1.4. Геометрический смысл умножения комплексных чисел. Умножение двух комплексных чисел $a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ и $b=|b|(\cos\beta+i\sin\beta)$ выполняется по формуле

$$ab=|a|\cdot|b|(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)),$$

т. е. $|ab|=|a|\cdot|b|$ и $\arg(ab)=\arg a+\arg b$. Геометрически это означает, что точка $C(ab)$ является образом точки $A(a)$ при композиции поворота с центром O на угол $\beta=\arg b$ и гомотетии с центром O и коэффициентом $k=|b|$ (рис. 4). Поскольку $ba=ab$, точка $C(ab)$ будет также образом точки $B(b)$ при композиции поворота с центром O на угол $\alpha=\arg a$ и гомотетии с центром O и коэффициентом $|a|$.

Для построения точки C удобно привлечь точку $E(1)$. Имеем: $\dfrac{|ab|}{|a|}=\dfrac{|b|}{1}$ и ориентированные углы EOA и BOC равны α; следовательно, треугольники EOA и BOC подобны, что позволяет построить точку $C(ab)$ по точкам $A(a)$, $B(b)$ и $E(1)$.

Если комплексное число a постоянное, а комплексное число z переменное, то формулой

$$z'=az \tag{1.1}$$

записывается коммутативная композиция поворота на угол $\alpha=\arg a$ и гомотетии с коэффициентом $|a|$ с общим центром O. Такое преобразование называется *гомотетическим поворотом*.

В частности, если число a действительное ($a=\overline{a}$), то $z'=az$ есть *гомотетия* с центром O и коэффициентом a. Если же число a не является действительным и $|a|=1$, то $z'=az$ есть *поворот* с центром O на угол $\alpha=\arg a$. Например, поворот $\mathrm{R}_O^{90^\circ}$ представляется формулой $z'=iz$, а поворот $\mathrm{R}_O^{-90^\circ}$ — формулой $z'=-iz$.

1.5. Деление отрезка в данном отношении. Если точка C лежит на прямой AB и $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ $(\lambda\neq-1)$, то говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении λ $(\lambda=\overline{\lambda})$.

Найдём комплексную координату точки C, если точки A и B имеют комплексные координаты a и b. Равенство $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ эквивалентно равенству $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$. Переходя к комплексным числам, получаем: $c-a=\lambda(b-c)$, откуда

$$c=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda},\quad \lambda=\overline{\lambda}. \tag{1.2}$$

При $\lambda=1$ точка C — середина отрезка AB и тогда

$$c=\frac{1}{2}(a+b).$$

Если обозначить $\frac{1}{1+\lambda}=\alpha$ и $\frac{\lambda}{1+\lambda}=\beta$, то равенство (1.2) примет вид

$$c=\alpha a+\beta b,\quad \alpha+\beta=1,\quad \alpha=\overline{\alpha},\quad \beta=\overline{\beta}. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что условия (1.3) являются достаточными для того, чтобы точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ лежали на одной прямой.

Задачи

1.1. Докажите, что для любых двух комплексных чисел a и b имеют место неравенства:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,\quad |a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

При каких условиях выполняются равенства?

1.2. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют условию $a+c=b+d$.

1.3. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки, делящие отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в одном и том же отношении, служат вершинами параллелограмма.

1.4. Противоположные стороны AB и DC четырёхугольника $ABCD$ разделены точками M и N в отношении λ, считая от вершин A и D. Докажите, что отрезок MN делит среднюю линию четырёхугольника в том же отношении λ, и сам делится средней линией пополам.

1.5. Дан положительно ориентированный квадрат $ABCD$ и комплексные координаты a и b его вершин A и B. Найдите комплексные координаты вершин C и D (при произвольном выборе нулевой точки O).

1.6. Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата a вершины A. Найдите комплексную координату вершины B при положительной и отрицательной ориентациях треугольника ABC, если за начальную точку принята 1) вершина C, 2) центр треугольника ABC, 3) основание A_1 высоты AA_1.

1.7. Сторона AC треугольника ABC была повёрнута вокруг точки A на угол $+90^\circ$ и заняла положение AC_1. Сторона BC была повёрнута вокруг точки B на угол -90° и заняла положение BC_2. Докажите, что положение середины отрезка C_1C_2 не зависит от положения вершины C.

1.8. Точка B_1 — образ точки $B(b)$ при повороте около точки $A(a)$ на угол φ. Докажите, что $b_1=a+\sigma(b-a)$, где $\sigma=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

1.9. Даны точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Постройте точку $D(d)$, если $a+bi=c+di$.

§ 2. Формулы длины отрезка и скалярного произведения векторов

2.1. Расстояние между двумя точками $A(a)$ и $B(b)$ равно $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{OD}|=|a-b|$ (см. рис. 3):

$$AB=|a-b|. \tag{2.1}$$

Так как $|z|^2=z\bar{z}$, то

$$AB^2=(a-b)(\bar{a}-\bar{b}). \tag{2.2}$$

Уравнение $z\bar{z}=r^2$ определяет окружность с центром O радиуса r. Окружность с центром $A(a)$ радиуса R имеет уравнение

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=R^2. \tag{2.3}$$

2.2. Скалярное произведение векторов. Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через комплексные координаты a и b точек A и B. Пусть $a=x_1+iy_1$, $b=x_2+iy_2$. Тогда

$$a\bar{b}+\bar{a}b=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(a\bar{b}+\bar{a}b). \tag{2.4}$$

Пусть теперь даны четыре произвольные точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ своими комплексными координатами. Представим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ так:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Пользуясь формулой (2.4), находим:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(b\overline{d}+\overline{b}d-b\overline{c}-\overline{b}c-a\overline{d}-\overline{a}d+a\overline{c}+\overline{a}c)=$$
$$=\frac{1}{2}((a-b)(\overline{c}-\overline{d})+(\overline{a}-\overline{b})(c-d)).$$

Таким образом, имеем:

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(a-b)(\overline{c}-\overline{d})+(\overline{a}-\overline{b})(c-d). \tag{2.5}$$

2.3. Примеры решения задач. Решим несколько задач с использованием полученных формул.

Задача 1. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB. Доказать, что расстояние CD выражается формулой

$$CD^2=R^2+AC^2+BC^2-AB^2,$$

где R — радиус описанной окружности.

■ Если за нулевую точку плоскости принять центр O описанной около треугольника ABC окружности, то эта окружность будет иметь уравнение $z\overline{z}=R^2$ (рис. 5). Четырёхугольник $OADB$ — ромб, следовательно, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, а значит, $d=a+b$. Находим:

$$CD^2=(d-c)(\overline{d}-\overline{c})=(a+b-c)(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})=$$
$$=3R^2+(a\overline{b}+\overline{a}b)-(a\overline{c}+\overline{a}c)-(b\overline{c}+\overline{b}c).$$

Этому же выражению равна правая часть доказываемого равенства:

$$R^2+AC^2+BC^2-AB^2=R^2+(a-c)(\overline{a}-\overline{c})+$$
$$+(b-c)(\overline{b}-\overline{c})-(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=$$
$$=3R^2-(a\overline{c}+\overline{a}c)-(b\overline{c}+\overline{b}c)+(a\overline{b}+\overline{a}b).$$ ■

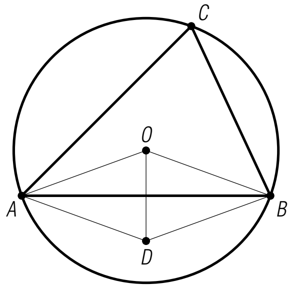

Рис. 5

Задача 2. Точка M — середина дуги AB окружности. Доказать, что для произвольной точки N этой окружности имеет место равенство

$$|AM^2-MN^2|=AN\cdot BN.$$

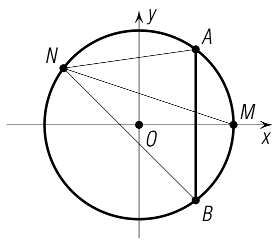

Рис. 6

■ Примем центр O данной окружности за начальную точку. Пусть точкам M, A, B, N соответствуют комплексные числа 1, a, b, n (рис. 6). Тогда уравнение окружности имеет вид $z\bar{z}=1$, и поэтому $a=\bar{b}$, $b=\bar{a}$. Находим:

$$AN\cdot BN=|a-n|\cdot|b-n|=|(a-n)(\bar{a}-n)|=$$
$$=|a\bar{a}-na-n\bar{a}+n^2|=|1+n^2-n(a+\bar{a})|.$$

Так как $AM^2=(a-1)(\bar{a}-1)$ и $MN^2=(n-1)(\bar{n}-1)$, то $|AM^2-MN^2|=$ $=|n+\bar{n}-(a+\bar{a})|$. Умножив это равенство на $|n|=1$, получим: $|AM^2-MN^2|=|n^2+1-n(a+\bar{a})|=AN\cdot BN$. ■

З а д а ч а 3. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Доказать, что

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2.$$

■ Условимся обозначать комплексные координаты точек соответствующими малыми буквами. Так как $m=\frac{1}{2}(a+c)$ и $n=\frac{1}{2}(b+d)$,

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=$$
$$=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})+(b-c)(\bar{b}-\bar{c})+(c-d)(\bar{c}-\bar{d})+(d-a)(\bar{d}-\bar{a})=$$
$$=2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})-(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a),$$

$$AC^2+BD^2+4MN^2=(a-c)(\bar{a}-\bar{c})+(b-d)(\bar{b}-\bar{d})+4(m-n)(\bar{m}-\bar{n})=$$
$$=(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})-(a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{d}+\bar{b}d)+(a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d})=$$
$$=2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})-(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a).$$ ■

Задачи

1.10. Средняя линия четырёхугольника делит его на два четырёхугольника. Докажите, что середины диагоналей этих двух четырёхугольников являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой

1.11. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

1.12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

1.13. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырёхугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.

1.14. Если в плоскости параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M, что $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$, то этот параллелограмм является прямоугольником. Докажите.

1.15. Точка M лежит на прямой, содержащей гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC. Докажите, что

$$MA^2\cdot BC^2+MB^2\cdot AC^2=MC^2\cdot AB^2.$$

1.16. Точки A и B симметричны относительно центра некоторой окружности. Докажите, что для любой точки M этой окружности значение суммы MA^2+MB^2 постоянно.

§ 3. Параллельность, коллинеарность, перпендикулярность

3.1. Коллинеарность векторов. На плоскости комплексных чисел даны точки $A(a)$ и $B(b)$, отличные от начала координат O. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда $\arg a = \arg b$, т. е. при $\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = 0$. Очевидно также, что эти векторы противоположно направлены в том и только в том случае, если $\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = \pm\pi$. Но комплексные числа с аргументами 0, π, $-\pi$ являются *действительными*.

Итак, для того, чтобы точки $A(a)$ и $B(b)$ были коллинеарны с начальной точкой O, необходимо и достаточно, чтобы частное $\frac{a}{b}$ было действительным числом. Значит, равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}, \quad \text{или} \quad a\overline{b} = \overline{a}b \tag{3.1}$$

есть *критерий коллинеарности точек O, A, B*. Заметим также, что он верен в случае, когда $a=0$ или когда $b=0$.

Так как число $\frac{a}{b} = k$ $(k \neq 0)$ действительное, критерий (3.1) эквивалентен такому:

$$a = kb, \quad k \neq 0, \quad k = \overline{k}. \tag{3.2}$$

Возьмём теперь точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда точки, определяемые комплексными числами $a-b$ и $c-d$, коллинеарны с нулевой точкой O. На основании (3.1) имеем:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(\overline{c}-\overline{d}) = (\overline{a}-\overline{b})(c-d). \tag{3.3}$$

В частности, если точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\overline{z}=1$, то $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c}\frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$, и поэтому (3.3) принимает вид

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad ab = cd. \tag{3.4}$$

Равенство (3.3) можно записать в таком виде:

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

Следовательно, *отрезки AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{c-d}$ является действительным.*

3.2. Коллинеарность трёх точек. В § 1 был получен критерий (1.3) коллинеарности трёх точек. Рассмотрим теперь другие критерии принадлежности трёх точек одной прямой.

Коллинеарность точек A, B, C определяется коллинеарностью векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Равенство (3.3) в этом примет вид

$$(a-b)(\overline{a}-\overline{c})=(\overline{a}-\overline{b})(a-c). \tag{3.5}$$

Это — *критерий принадлежности точек A, B, C одной прямой*. Его можно представить в симметричном виде:

$$a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})=0, \tag{3.6}$$

или же так:

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.7}$$

Если точки A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z}=1$, то $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$ и $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$. Поэтому каждое из соотношений (3.5), (3.6), (3.7) преобразуется после сокращения на $a-b$ в такое:

$$c+ab\overline{c}=a+b. \tag{3.8}$$

Точки A и B зафиксируем, а точку C будем считать переменной, переобозначив её координату через z. Тогда каждое из полученных соотношений (3.5)—(3.8) будет уравнением прямой AB. Итак, уравнения

$$(\overline{a}-\overline{b})z+(b-a)\overline{z}+a\overline{b}-b\overline{a}=0, \tag{3.9}$$

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{3.10}$$

являются уравнениями прямой, проходящей через точки $A(a)$ и $B(b)$. Прямая OA имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\overline{a}z=a\overline{z}. \tag{3.11}$$

Уравнение

$$z+ab\overline{z}=a+b \tag{3.12}$$

определяет прямую, содержащую хорду AB единичной окружности.

3.3. Перпендикулярность отрезков (векторов). Заметим сначала, что $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \arg a - \arg b = \arg \dfrac{a}{b} = \pm \dfrac{\pi}{2}$. Комплексные числа с аргументами $\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$ являются чисто мнимыми. Поэтому (п. 1.2) имеет место такой критерий:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = -\frac{\overline{a}}{\overline{b}},$$

или

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad \Leftrightarrow \quad a\overline{b} + \overline{a}b = 0. \tag{3.13}$$

Отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы точек с комплексными координатами $a-b$ и $c-d$ перпендикулярны. В силу (3.13) имеем:

$$AB \perp CD \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(\overline{c}-\overline{d}) + (\overline{a}-\overline{b})(c-d) = 0. \tag{3.14}$$

Критерий (3.14) непосредственно следует из формулы (2.5).

Если точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\overline{z} = 1$, то зависимость (3.14) упрощается:

$$AB \perp CD \quad \Leftrightarrow \quad ab + cd = 0. \tag{3.15}$$

Равенство (3.14) можно представить в виде:

$$\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

А это означает, что *отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\dfrac{a-b}{c-d}$ является чисто мнимым.*

Прямую, не содержащую начальную точку O, можно задать одной точкой $P(p)$, являющейся ортогональной проекцией на прямую точки O. Произвольная точка $M(z)$ этой прямой характеризуется условием $OP \perp MP$, которое даёт уравнение данной прямой:

$$p(\overline{p} - \overline{z}) + \overline{p}(p - z) = 0,$$

или

$$\overline{p}z + p\overline{z} = 2p\overline{p}. \tag{3.16}$$

Его можно рассматривать как уравнение касательной к окружности $z\overline{z} = |p|^2$ в точке $P(p)$. В частности, если $|p| = 1$, то оно принимает вид:

$$\overline{p}z + p\overline{z} = 2. \tag{3.17}$$

Это — частный случай уравнения (3.12) при $a = b = p$.

2—7685.—Я. П. Понарин.

Задачи

1.17. Для того, чтобы (различные) точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие отличные от нуля действительные числа α, β, γ, что

$$\begin{cases} \alpha a+\beta b+\gamma c=0, \\ \alpha+\beta+\gamma=0. \end{cases}$$

Докажите.

1.18. Докажите, что если диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до любой стороны четырёхугольника равно половине длины соответствующей противоположной стороны.

1.19. Докажите, что диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

1.20. Докажите, что диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны, тогда и только тогда, когда сумма квадратов его противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности.

1.21. Докажите, что если средние линии четырёхугольника равны, то его диагонали перпендикулярны, и обратно.

1.22. Докажите, что если соответственные стороны двух одинаково ориентированных квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то

$$AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2.$$

1.23. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведена медиана к катету, а к ней — перпендикуляр из вершины прямого угла. Найдите отношение, в котором этот перпендикуляр делит гипотенузу.

1.24. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая t пересекает прямые AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1 соответственно;

$$\overrightarrow{AB_1}=\alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AD_1}=\beta\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AC_1}=\gamma\overrightarrow{AC}.$$

Вычислите γ, если даны α и β.

1.25. Даны окружность с центром O и точка M. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной прямой OM, не зависит от выбора хорды.

1.26. Даны треугольник ABC и точка M. Через точку M проведены прямые, перпендикулярные к MA, MB, MC. Докажите, что точки их пересечения соответственно с прямыми BC, CA, AB коллинеарны.

§ 4. Комплексные координаты некоторых точек

Выведем формулы для координат точек, часто встречающихся в задачах.

4.1. Точка пересечения секущих к окружности. Найдём комплексную координату точки пересечения секущих AB и CD к окружности $z\bar{z}=1$, если точки A, B, C, D лежат на этой окружности. На основании (3.12) выполняется система

$$\begin{cases} z+ab\bar{z}=a+b, \\ z+cd\bar{z}=c+d, \end{cases}$$

из которой почленным вычитанием уравнений легко находим:

$$\bar{z}=\frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}. \tag{4.1}$$

В частности, если $AB\perp CD$, то в силу (3.15) $ab=-cd$ и результат (4.1) приводится к виду

$$\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

или

$$z=\frac{1}{2}(a+b+c+d). \tag{4.2}$$

При $AB\perp CD$ точка пересечения определяется только тремя точками A, B, C. Поэтому (4.2) целесообразно записать так:

$$z=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right). \tag{4.3}$$

4.2. Точка пересечения касательных к окружности. Найдём комплексную координату точки пересечения касательных к окружности $z\bar{z}=1$ в её точках $A(a)$ и $B(b)$. На основании (3.17) для искомой координаты z выполняется система

$$\begin{cases} \bar{a}z+a\bar{z}=2, \\ \bar{b}z+b\bar{z}=2, \end{cases}$$

из которой находим $z=\dfrac{2(a-b)}{a\bar{b}-\bar{a}b}$. Так как $\bar{a}=\dfrac{1}{a}$, $\bar{b}=\dfrac{1}{b}$, то получаем окончательно:

$$z=\frac{2ab}{a+b}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \tag{4.4}$$

2*—7685.—Я. П. Понарин.

4.3. Ортогональная проекция точки на прямую. Найдём координату ортогональной проекции точки $M(m)$ на прямую, заданную точками $A(a)$ и $B(b)$. Если z — искомая координата, то на основании (3.6) и (3.14) имеем:

$$\begin{cases} z(\overline{a}-\overline{b})+a(\overline{b}-\overline{z})+b(\overline{z}-\overline{a})=0, \\ (a-b)(\overline{m}-\overline{z})+(\overline{a}-\overline{b})(m-z)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z(\overline{a}-\overline{b})-\overline{z}(a-b)+a\overline{b}-\overline{a}b=0, \\ z(\overline{a}-\overline{b})+\overline{z}(a-b)-(a-b)\overline{m}-(\overline{a}-\overline{b})m=0, \end{cases}$$

откуда

$$z=\frac{a(\overline{m}-\overline{b})-b(\overline{m}-\overline{a})}{2(\overline{a}-\overline{b})}+\frac{m}{2}. \tag{4.5}$$

В случае, когда точки A и B принадлежат окружности $z\overline{z}=1$, формула (4.5) приводится к более простому виду:

$$z=\frac{1}{2}(a+b+m-ab\overline{m}). \tag{4.6}$$

Если $m=0$, то проекция $P(p)$ точки M на прямую AB находится по формуле:

$$p=\frac{\overline{a}b-a\overline{b}}{2(\overline{a}-\overline{b})}. \tag{4.7}$$

Вычислим координату основания перпендикуляра, опущенного из точки $M(m)$ на прямую $\overline{p}z+p\overline{z}=2p\overline{p}$. Если $N(z)$ — искомое основание, то $OP\|MN$, и поэтому

$$\begin{cases} (z-m)\overline{p}=(\overline{z}-\overline{m})p, \\ \overline{p}z+p\overline{z}=2p\overline{p}, \end{cases}$$

откуда

$$z=p+\frac{m}{2}-\frac{p\overline{m}}{2\overline{p}}. \tag{4.8}$$

4.4. Центроид и ортоцентр треугольника. Известно, что для центроида G (точки пересечения медиан) треугольника ABC и любой точки O верно равенство

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Поэтому комплексная координата g центроида G вычисляется по формуле

$$g=\frac{1}{3}(a+b+c). \tag{4.9}$$

Выразим комплексную координату h ортоцентра H (точки пересечения высот) треугольника ABC через координаты a, b, c его вершин. Пусть прямые AH, BH, CH пересекают описанную около треугольника окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Пусть эта окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$, тогда согласно (3.15) имеем:

$$a_1=-\frac{bc}{a},\quad b_1=-\frac{ca}{b},\quad c_1=-\frac{ab}{c}.$$

По формуле (4.1)

$$\bar{h}=\frac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1-bb_1}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

откуда

$$h=a+b+c. \tag{4.10}$$

В полученное выражение координаты вершин треугольника входят симметрично, поэтому третья высота треугольника проходит через точку пересечения первых двух. Подчеркнём, что равенство (4.10) имеет место лишь тогда, когда начальной точкой плоскости служит центр описанной окружности.

Задачи

1.27. Докажите, что во всяком треугольнике центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H лежат на одной прямой (*прямой Эйлера треугольника*), причём $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

1.28. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и относительно их середин, лежат на описанной около треугольника окружности.

1.29. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, H — его ортоцентр. Докажите, что

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MH}=\frac{1}{4}AB^2.$$

1.30. Докажите, что прямая, содержащая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанной около него окружности, проведённому в третью вершину.

1.31. Докажите, что расстояние между ортогональными проекциями точки окружности на два её заданных диаметра не зависит от положения точки на окружности.

1.32. В окружность вписан четырёхугольник. Касательные к окружности в концах одной диагонали пересекаются на другой диагонали, либо параллельны ей. Докажите, что касательные в концах второй диагонали пересекаются на первой диагонали, либо параллельны ей.

1.33. Докажите, что отрезок произвольной касательной к окружности, заключённый между двумя параллельными касательными к ней, виден из центра окружности под прямым углом.

1.34. В окружности проведены два перпендикулярных радиуса OA и OB. Прямые, соединяющие произвольную точку M окружности с точками A и B, пересекают прямые OB и OA соответственно в точках B_1 и A_1. Найдите β, если $\overrightarrow{OB_1}=\beta\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\overrightarrow{OA}$.

1.35. Докажите, что во всяком вписанном четырёхугольнике отрезки, соединяющие каждую вершину четырёхугольника с ортоцентром треугольника, образованного тремя другими вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.

1.36. Докажите, что в любом треугольнике ABC

$$OH^2=9R^2-(AB^2+BC^2+CA^2),$$

где O — центр описанной окружности, R — её радиус, H — ортоцентр треугольника.

1.37. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника до его вершины вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны.

1.38. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC лежат на одной окружности, равной данной.

1.39. Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек треугольника*).

1.40. Докажите, что если AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC и H — его ортоцентр, то

$$AA_1\cdot AH+BB_1\cdot BH=AB^2.$$

Найдите аналогичное равенство для тупоугольного треугольника.

§ 5. Решение задач методом комплексных чисел

Задача 1. В результате поворота на 90° вокруг точки O отрезок AB перешёл в отрезок A_1B_1. Доказать, что медиана OM треугольника OAB_1 перпендикулярна прямой A_1B (рис. 7).

■ Пусть координаты O, A, B равны, соответственно, 0, 1, b. Тогда точки A_1 и B_1 будут иметь координаты $a_1=i$ и $b_1=bi$ (п. 1.4), а середина M отрезка AB_1 — координату $m=\frac{1}{2}(1+bi)$. Находим:

$$\frac{a_1-b}{m-0}=\frac{i-b}{\frac{1}{2}(1+bi)}=\frac{2i(i-b)}{(i-b)}=2i.$$

Это число чисто мнимое. На основании критерия перпендикулярности (п. 3.3) прямые OM и A_1B перпендикулярны. ■

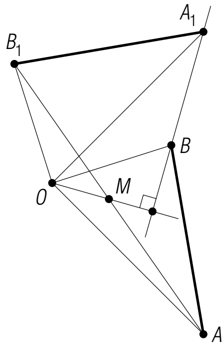

Рис. 7

Задача 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат вне треугольника (рис. 8). Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра Q квадрата, если длины катетов BC и AC равны, соответственно, a и b.

■ Примем точку C за начальную, а прямые CA и CB за действительную и мнимую оси. Тогда точки A и B будут иметь соответственно комплексные координаты b и ai, причём $b=\overline{b}$ и $a=\overline{a}$. При повороте на 90° вектор $\overrightarrow{QB}$ переходит в вектор $\overrightarrow{QA}$. Поэтому имеем равенство $(ai-q)i=b-q$, где q — координата точки Q. Отсюда $q=\dfrac{a+b}{1-i}$. Находим:

$$CQ^2=q\overline{q}=\frac{a+b}{1-i}\cdot\frac{a+b}{1+i}=\frac{1}{2}(a+b)^2,$$

$$CQ=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$ ■

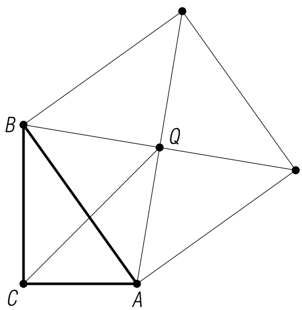

Рис. 8

Задача 3. Из основания высоты треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.

■ Пусть дан треугольник ABC (рис. 9), причём описанная около него окружность имеет уравнение $z\overline{z}=1$. Если CD — высота треугольника, то $d=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{ab}{c}\right)$. Комплексные координаты оснований M и N перпендикуляров, опущенных из точки D на AC и BC соответственно, равны $m=(a+c+d-ac\overline{d})/2$ и $n=(b+c+d-bc\overline{d})/2$. Находим:

$$m-n=\frac{1}{2}(a-b+c\overline{d}(b-a))=$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)(1-c\overline{d})=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}.$$

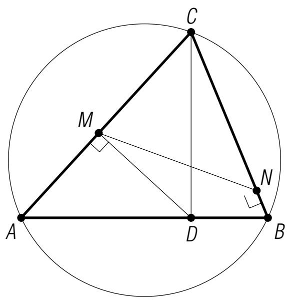

Рис. 9

Так как $|a|=|b|=1$, то $|m-n|=|(a-b)\times$ $\times(b-c)(c-a)|/4$. Это выражение симметрично относительно a, b, c, т. е. расстояние MN не зависит выбора высоты треугольника. ■

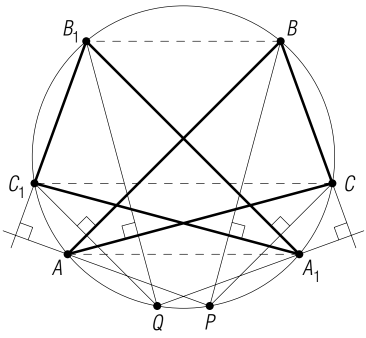

Рис. 10

Задача 4. В окружность вписаны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ так, что $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на прямые, содержащие соответственные стороны другого, пересекаются в одной точке, лежащей на данной окружности. Доказать, что прямая, соединяющая две точки пересечения указанных перпендикуляров, параллельна прямой AA_1 (рис. 10).

■ Полагаем, что данная окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$. Согласно условию задачи и критерию (3.4) $aa_1=bb_1=cc_1$. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Тогда $a_2=-b_1c_1/a$, $b_2=-a_1c_1/b$, $c_2=-a_1b_1/c$. Поскольку $b_1/a=a_1/b$ и $c_1/b=b_1/c$, то $a_2=b_2=c_2=p$, причём $p\bar{p}=1$. Аналогично, перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB, пересекаются в одной точке Q, причём $q=-bc/a_1=-ac/b_1=-ab/c_1$, $q\bar{q}=1$. Но $pq=$ $=\dfrac{aa_1bb_1}{cc_1}$, а $bb_1=cc_1$, следовательно, $pq=aa_1$. Значит, $PQ\|AA_1$. ■

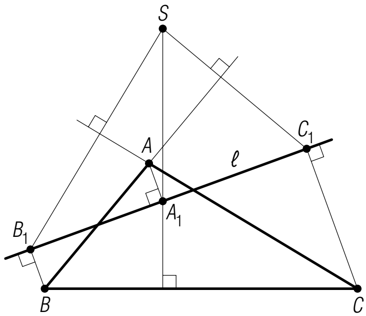

Рис. 11

Задача 5. Точки A_1, B_1, C_1 являются ортогональными проекциями вершин A, B, C треугольника на некоторую прямую l. Доказать, что прямые, проходящие через точки A_1, B_1, C_1 перпендикулярно BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке, называемой *ортополюсом* прямой l (рис. 11).

■ Пусть описанной около треугольника ABC окружности соответствует уравнение $z\bar{z}=1$, а данной прямой l — уравнение $\bar{p}z+p\bar{z}=2p\bar{p}$. Тогда, согласно (4.8), $a_1=p+\dfrac{a}{2}-\dfrac{p\bar{a}}{2\bar{p}}$. Для того, чтобы точка с координатой z принадлежала перпендикуляру прямой BC, содержащему A_1, необходимо и достаточно, чтобы число

$$\frac{z-a_1}{b-c}=\frac{2\bar{p}z-2p\bar{p}-a\bar{p}+p\bar{a}}{2\bar{p}(b-c)}$$

было чисто мнимым. Проверка показывает, что оно является таковым, в частности, при

$$z = z_0 = \frac{1}{2}\left(a + b + c + 2p + \frac{abc\overline{p}}{p}\right). \tag{5.1}$$

В самом деле,

$$\frac{z_0 - a_1}{b - c} = \frac{(p + ab\overline{p})(p + ac\overline{p})}{2ap\overline{p}(b - c)} = -\frac{\overline{z}_0 - \overline{a}_1}{\overline{b} - \overline{c}}.$$

Следовательно, точка $S(z_0)$ принадлежит указанному перпендикуляру. Вследствие того, что в выражение (5.1) координаты a, b, c треугольника ABC входят симметрично, точка $S(z_0)$ также принадлежит и двум другим аналогичным перпендикулярам.

Приведённые рассуждения теряют силу, когда прямая l проходит через начало O. В этом случае зададим её точкой $M(m)$ описанной около треугольника ABC окружности. Тогда вторая общая точка прямой l и окружности имеет координату $-m$ и в силу (4.3) $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{m^2}{a}\right)$. Вместо (5.1) подвергаем той же проверке число

$$z = z_0 = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{abc}{m^2}\right), \tag{5.2}$$

и приходим к тому же выводу. ■

Задача 6. Из точки окружности опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны и диагонали вписанного в неё четырёхугольника. Доказать, что произведения длин перпендикуляров, опущенных на противоположные стороны, и произведение длин перпендикуляров, опущенных на диагонали, равны.

■ Пусть данная окружность имеет уравнение $z\overline{z} = 1$. Пусть A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 — ортогональные проекции точки $M(m)$ окружности соответственно на прямые AB, BC, CD, DA, AC, BD. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right), \quad c_0 = \frac{1}{2}\left(c + d + m - \frac{cd}{m}\right).$$

Находим:

$$MA_0^2 \cdot MC_0^2 = (m - a_0)(\overline{m} - \overline{a}_0)(m - c_0)(\overline{m} - \overline{c}) =$$

$$= \frac{(m-a)(m-b)}{2m} \cdot \frac{(a-m)(b-m)}{2abm} \cdot \frac{(m-c)(m-d)}{2m} \cdot \frac{(c-m)(d-m)}{2cdm} =$$

$$= \frac{((m-a)(m-b)(m-c)(m-d))^2}{16m^4abcd}.$$

Симметричность этого выражения относительно a, b, c, d говорит о том, что ему также равны произведения $MB_0^2 \cdot MD_0^2$ и $ME_0^2 \cdot MF_0^2$. ■

Задачи

1.41. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к ней в точке C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что точка D делит сторону AB в отношении, равном отношению квадратов прилежащих сторон треугольника.

1.42. Касательные в концах A и B диаметра окружности пересекаются с третьей касательной в точках C и D соответственно. Докажите, что произведение $AC\cdot BD$ не зависит от положения третьей касательной.

1.43. Докажите, что если CF — высота треугольника ABC, то основания перпендикуляров, опущенных из точки F на стороны AC и BC и на высоты AD и BE, коллинеарны.

1.44. Касательная в точке C к окружности пересекает в точке M прямую, содержащую диаметр AB этой окружности. Перпендикуляр к AB в точке M пересекает прямые AC и BC в точках D и E. Докажите, что точка M — середина отрезка DE.

1.45. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBPQ$ с центрами O_1 и O_2. Точки D и F — середины отрезков MP и NQ. Докажите, что треугольники ABD и O_1O_2F прямоугольные и равнобедренные.

1.46. Боковые стороны BC и AD трапеции $ABCD$ после поворота на 90° вокруг своих середин заняли положения B_1C_1 и A_1D_1. Докажите, что $A_1B_1=C_1D_1$.

1.47. На сторонах четырёхугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны и перпендикулярны.

1.48. Через ортоцентр треугольника проведена произвольная прямая. Докажите, что прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника окружности.

§ 6. Классические теоремы элементарной геометрии

6.1. Теорема Ньютона. *В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.*

■ Пусть данная окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$. Далее, пусть $A_0B_0C_0D_0$ — данный четырёхугольник и A, B, C, D — точки касания его сторон A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0, D_0A_0 с окружностью (рис. 12). Пусть M и N — середины диагоналей A_0C_0 и B_0D_0 соответственно. Тогда согласно (4.4) точки A_0, B_0, C_0, D_0 будут иметь, соответственно, координаты

$$a_0=\frac{2ad}{a+d},\quad b_0=\frac{2ab}{a+b},\quad c_0=\frac{2bc}{b+c},\quad d_0=\frac{2cd}{c+d}.$$

Поэтому

$$m=\frac{1}{2}(a_0+c_0)=\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c},\quad n=\frac{1}{2}(b_0+d_0)=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}.$$

Тогда $\dfrac{m}{n}=\dfrac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}$. Поскольку $\overline{a}=$ $=\dfrac{1}{a}$, $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$, $\overline{c}=\dfrac{1}{c}$, $\overline{d}=\dfrac{1}{d}$, очевидно, что $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\overline{m}}{\overline{n}}$. На основании (3.1) точки O, M, N коллинеарны. ■

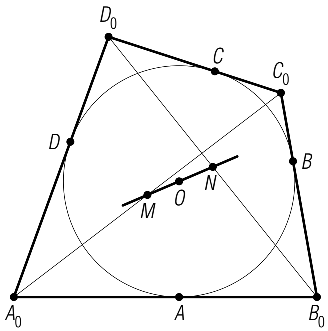

Рис. 12

6.2. Теорема Гаусса. *Если некоторая прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC, CA, AB треугольника ABC, в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны* (рис. 13).

Пользуясь (3.6), запишем условия коллинеарности троек точек A, B_1, C; C, A_1, B; B, C_1, A; A_1, B_1, C_1:

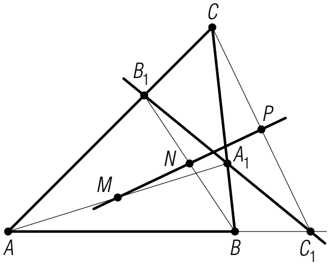

Рис. 13

$$\left.\begin{aligned} &a(\overline{b}_1-\overline{c})+b_1(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b}_1)=0,\\ &c(\overline{a}_1-\overline{b})+a_1(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a}_1)=0,\\ &b(\overline{c}_1-\overline{a})+c_1(\overline{a}-\overline{b})+a(\overline{b}-\overline{c}_1)=0,\\ &a_1(\overline{b}_1-\overline{c}_1)+b_1(\overline{c}_1-\overline{a}_1)+\\ &\qquad\qquad +c_1(\overline{a}_1-\overline{b}_1)=0. \end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

Если M, N, P — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, то предстоит показать, что

$$m(\overline{n}-\overline{p})+n(\overline{p}-\overline{m})+p(\overline{m}-\overline{n})=0, \qquad (6.2)$$

Так как $m=\dfrac{1}{2}(a+a_1)$, $n=\dfrac{1}{2}(b+b_1)$, $p=\dfrac{1}{2}(c+c_1)$, то доказываемое равенство (6.2) эквивалентно такому:

$$(a+a_1)(\overline{b}+\overline{b}_1-\overline{c}-\overline{c}_1)+(b+b_1)(\overline{c}+\overline{c}_1-\overline{a}-\overline{a}_1)+(c+c_1)(\overline{a}+\overline{a}_1-\overline{b}-\overline{b}_1)=0,$$

или, после перемножения,

$$\begin{aligned} &a(\overline{b}_1-\overline{c})+a(\overline{b}-\overline{c}_1)+a_1(\overline{b}_1-\overline{c}_1)+a_1(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}_1-\overline{a})+b(\overline{c}-\overline{a}_1)+\\ &+b_1(\overline{c}_1-\overline{a}_1)+b_1(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}_1-\overline{b})+c(\overline{a}-\overline{b}_1)+c_1(\overline{a}_1-\overline{b}_1)+c_1(\overline{a}-\overline{b})=0. \quad (6.3)\end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что (6.3) получается при почленном сложении равенств (6.1). ■

Прямые AB, BC, CA, A_1B_1 равноправны. Фигура, являющаяся их объединением, называется *полным четырёхсторонником,* а отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — его диагоналями. Доказанную теорему можно сформулировать так: *середины диагоналей полного четырёхсторонника лежат*

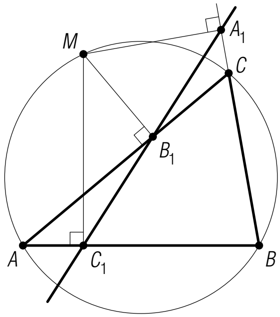

Рис. 14

на одной прямой. Она называется *прямой Гаусса* полного четырёхсторонника.

6.3. Теорема Симсона. *Ортогональные проекции точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны.*

■ Примем центр O окружности за начало, а её радиус — за 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки M окружности на прямые BC, CA, AB, содержащие стороны вписанного треугольника ABC (рис. 14). Согласно (4.3), $a_1 = \frac{1}{2}\left(b+c+m-\frac{bc}{m}\right)$, $b_1 = \frac{1}{2}\left(a+c+m-\frac{ac}{m}\right)$, $c_1 = \frac{1}{2}\left(a+b+m-\frac{ab}{m}\right)$. Находим:

$$\frac{a_1-c_1}{b_1-c_1} = \left(c-a+\frac{ab-bc}{m}\right):\left(c-b+\frac{ab-ac}{m}\right) = \frac{(c-a)(m-b)}{(c-b)(m-a)} = \frac{\overline{a}_1-\overline{c}_1}{\overline{b}_1-\overline{c}_1}.$$

На основании (3.5) точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Содержащая их прямая называется *прямой Симсона* точки M относительно вписанного треугольника ABC. ■

Справедливо также обратное утверждение: *если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на прямые, содержащие стороны треугольника, коллинеарны, то эта точка принадлежит окружности, описанной около треугольника.*

■ По формуле (4.6) $a_1 = \frac{1}{2}(b+c+m-bc\overline{m})$, $b_1 = \frac{1}{2}(a+c+m-ac\overline{m})$, $c_1 = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\overline{m})$. Так как точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны, число $\frac{a_1-c_1}{b_1-c_1} = \frac{(c-a)(1-b\overline{m})}{(c-b)(1-a\overline{m})}$ — действительное. Поэтому оно равно своему сопряжённому: $\frac{(c-a)(1-b\overline{m})}{(c-b)(1-a\overline{m})} = \frac{(\overline{c}-\overline{a})(1-\overline{b}m)}{(\overline{c}-\overline{b})(1-\overline{a}m)}$, отсюда

$$\frac{1-b\overline{m}}{1-a\overline{m}} = \frac{b(1-\overline{b}m)}{a(1-\overline{a}m)}, \quad \text{или} \quad \frac{1-b\overline{m}}{1-a\overline{m}} = \frac{b-m}{a-m}.$$

Из последнего равенства после упрощений получаем $m\overline{m}=1$, что означает принадлежность точки M окружности $z\overline{z}=1$, описанной около треугольника ABC. ■

6.4. Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.*

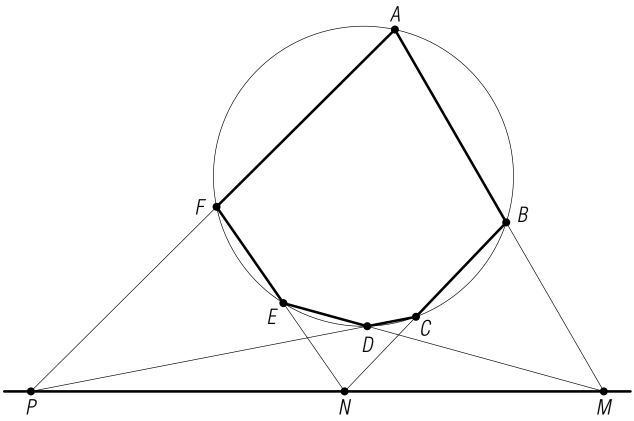

Рис. 15

■ Пусть в окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$ и $AB \cap DE = M$, $BC \cap EF = N$, $CD \cap FA = P$ (рис. 15). Принимаем центр окружности за начало, её радиус — за единицу длины. Тогда в силу (4.1) имеем:

$$\overline{m} = \frac{a+b-(d+e)}{ab-de}, \quad \overline{n} = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}, \quad \overline{p} = \frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}.$$

Вычисляем

$$\overline{m} - \overline{n} = \frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

и аналогично

$$\overline{n} - \overline{p} = \frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)}.$$

Тогда

$$\frac{\overline{m} - \overline{n}}{\overline{n} - \overline{p}} = \frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

Поскольку числа $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$, $\overline{f}$ равны, соответственно, $1/a$, $1/b$, $1/c$, $1/d$, $1/e$, $1/f$, то устная проверка показывает, что найденное выражение совпадает со своим сопряжённым, т. е. является действительным числом. Это означает коллинеарность точек M, N, P. ■

6.5. Теорема Монжа. *Во вписанном четырёхугольнике прямые, проходящие через середины сторон и диагоналей перпендикулярно противоположным сторонам или, соответственно, другой диагонали, пересекаются в одной точке*, называемой *точкой Монжа* этого четырёхугольника.

■ Серединные перпендикуляры к сторонам четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в центре описанной окружности, который примем за начальную точку. Для каждой точки $M(z)$ серединного перпендикуляра к AB число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$ — чисто мнимое (п. 3.3). В частности, при $z=0$ оно равно $-\dfrac{a+b}{2(a-b)}$. Аналогично для всех точек $N(z)$ прямой, проходящей через середину отрезка CD перпендикулярно AB, и только для них, число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ будет чисто мнимым. Но для $z=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ оно равно $\dfrac{a+b}{2(a-b)}$, а значит, чисто мнимое. Следовательно, точка E с комплексной координатой $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ лежит на данной прямой. Поскольку выражение $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ симметрично относительно перестановок букв a, b, c, d, то и остальные пять аналогично построенных прямых проходят через точку E.

6.6. Теорема Дезарга. *Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны, то либо точки $P=AB\cap A_1B_1$, $Q=BC\cap B_1C_1$, $R=CA\cap C_1A_1$ пересечения их соответственных сторон коллинеарны, либо две соответственные стороны параллельны прямой, соединяющей точки пересечения других соответственных сторон, либо соответственные стороны треугольников параллельны.*

■ Пусть $AA_1\cap BB_1\cap CC_1=S$ (рис. 16). Примем точку S за начальную. Тогда можно положить $a_1=\alpha a$, $b_1=\beta b$, $c_1=\gamma c$, где α, β, γ — действительные числа, отличные от нуля. Рассмотрим случай, когда $\alpha\neq\beta\neq\gamma$. Так как точки P, A_1, B_1 коллинеарны, имеем (п. 1.5):

$$p=\lambda a_1+(1-\lambda)b_1=\lambda\alpha a+(1-\lambda)\beta b,$$

причём $\lambda=\overline{\lambda}$ и $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta=1$, откуда $\lambda=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$, $1-\lambda=\dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$, и поэтому

$$p=\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta}a+\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha-\beta}b,$$

или

$$(\alpha-\beta)p=\alpha(1-\beta)a+\beta(\alpha-1)b.$$

Круговой перестановкой букв a, b, c,

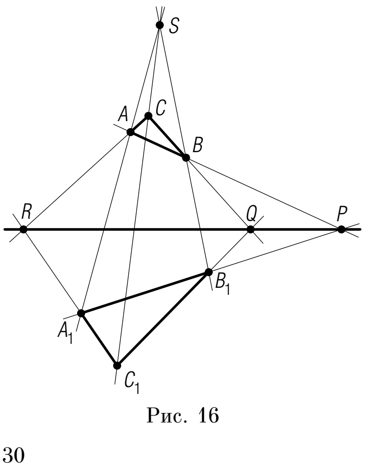

Рис. 16

а также α, β, γ получаем:

$$(\beta-\gamma)q=\beta(1-\gamma)b+\gamma(\beta-1)c,$$
$$(\gamma-\alpha)r=\gamma(1-\alpha)c+\alpha(\gamma-1)a.$$

Умножим последние три равенства соответственно на $1-\gamma$, $1-\alpha$, $1-\beta$ и сложим почленно:

$$(\alpha-\beta)(1-\gamma)p+(\beta-\gamma)(1-\alpha)q+ +(\gamma-\alpha)(1-\beta)r=0.$$

Замечаем, что сумма коэффициентов при p, q, r равна нулю:

$$(\alpha-\beta)(1-\gamma)+(\beta-\gamma)(1-\alpha)+ +(\gamma-\alpha)(1-\beta)=0.$$

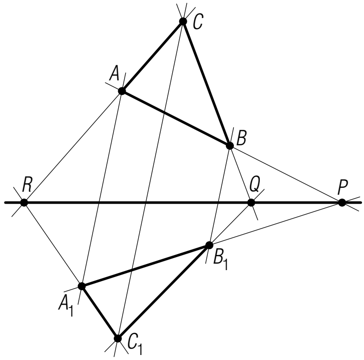

Рис. 17

В силу результата задачи 1.17 точки P, Q, R коллинеарны.

Если же, например, $\alpha=\beta\neq\gamma$, то $a_1-b_1=\alpha(a-b)$ $(\alpha=\overline{\alpha})$, и поэтому $A_1B_1\|AB$. Точка P не существует. Тогда эти прямые параллельны прямой QR. Действительно, при $\alpha=\beta$ имеем:

$$(\alpha-\gamma)q=\alpha(1-\gamma)b+\gamma(\alpha-1)c, \quad (\gamma-\alpha)r=\gamma(1-\alpha)c+\alpha(\gamma-1)a.$$

Сложение этих равенств даёт:

$$(\alpha-\gamma)(q-r)=\alpha(1-\gamma)(b-a).$$

И поскольку $\dfrac{q-r}{b-a}=\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}$ — действительное число, то $QR\|AB$.

При $\alpha=\beta=\gamma$ треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гототетичны.

Теперь рассмотрим второй случай условия теоремы, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Тогда приведённое доказательство теряет силу, ибо точка S не существует. Предполагая существование точки P, примем её за начальную. Однако полученная конфигурация (рис. 17) с точностью до обозначений совпадает с той, которая имела место в рассмотренном выше случае при $\alpha=\beta\neq\gamma$. Продолжение доказательства является формальностью. ■

Имеет место и обратная теорема Дезарга. Для её доказательства достаточно применить прямую теорему Дезарга к треугольникам AA_1R и BB_1Q.

Задачи

Докажите следующие теоремы:

1.49 (*Теорема Менелая*). Для того, чтобы точки A_1, B_1, C_1, лежащие соответственно на прямых BC, CA, AB, содержащих стороны треугольника ABC, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}}=-1.$$

1.50 (*Теорема Паскаля*). Точки пересечения прямых, содержащих стороны треугольника, с касательными к его описанной окружности в противоположных им вершинах лежат на одной прямой.

1.51 (*Теорема Паскаля*). Во вписанном в окружность четырёхугольнике прямые, содержащие противоположные стороны, и касательные в противоположных вершинах пересекаются в четырёх коллинеарных точках.

1.52 (*Теорема Паскаля—Паппа*). Если точки A, B, C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1, C_1 — на другой, то точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, BC_1 и B_1C, CA_1 и C_1A также лежат на прямой. Если же прямые в двух из этих трёх пар параллельны, то также параллельны и прямые третьей пары.

§ 7. Углы и площади

7.1. Угол между векторами. Условимся обозначать символом $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ ориентированный угол, на который надо повернуть вектор $\overrightarrow{AB}$, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\overrightarrow{CD}$. Если $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{CD}$, то точки P и Q имеют комплексные координаты $b-a$ и $d-c$ (рис. 18). Следовательно,

$$\alpha=(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})=\arg(d-c)-\arg(b-a)=\arg\frac{d-c}{b-a}. \tag{7.1}$$

Эта формула в применении к положительно ориентированному треугольнику ABC даёт:

$$\widehat{A}=\arg\frac{c-a}{b-a}, \quad \widehat{B}=\arg\frac{a-b}{c-b}, \quad \widehat{C}=\arg\frac{b-c}{a-c}. \tag{7.2}$$

Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то $\overline{z}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$. Отсюда

$$\sin\varphi=\frac{z-\overline{z}}{2ir}, \quad \cos\varphi=\frac{z+\overline{z}}{2r}. \tag{7.3}$$

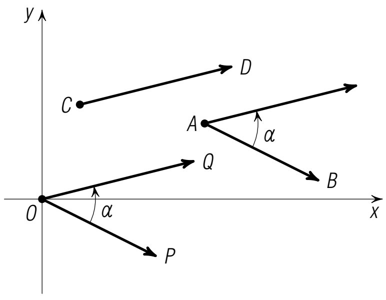

Рис. 18

При $z=\dfrac{d-c}{b-a}$ получаем:

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})=\frac{\dfrac{d-c}{b-a}-\dfrac{\overline{d}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}}{2i\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|}=$$

$$=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})-(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c|\cdot|b-a|},$$

поскольку $(b-a)(\overline{b}-\overline{a})=|b-a|^2$. Таким образом,

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})-(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c|\cdot|b-a|}. \qquad (7.4)$$

Аналогично можно получить формулу для косинуса угла между векторами. Однако она непосредственно следует из формулы (2.5):

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2|d-c|\cdot|b-a|}. \qquad (7.5)$$

7.2. Площадь треугольника и четырёхугольника. Найдём формулу для площади S положительно ориентированного треугольника ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\,\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)=\frac{1}{4i}((c-a)(\overline{b}-\overline{a})-(b-a)(\overline{c}-\overline{a}))=$$
$$=-\frac{1}{4i}(a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})).$$

Итак,

$$S=\frac{i}{4}(a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})), \qquad (7.6)$$

или

$$S=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.7)$$

Если треугольник ABC вписан в окружность $z\overline{z}=1$, то формула (7.6) преобразуется к виду

$$S=\frac{i}{4}\cdot\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \qquad (7.8)$$

Для площади S положительно ориентированного четырёхугольника $ABCD$ имеем:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\,\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right)=\frac{1}{4i}((d-b)(\overline{c}-\overline{a})-(c-a)(\overline{d}-\overline{b})). \qquad (7.9)$$

Если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $z\overline{z}=1$, то (7.9) принимает вид:

$$S=\frac{1}{4i}\cdot\frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}. \qquad (7.10)$$

7.3. Соотношение Бретшнайдера. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ имеет место равенство

$$(AC\cdot BD)^2=(AB\cdot CD)^2+(BC\cdot AD)^2-2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cos(\widehat{A}+\widehat{C}), \qquad (7.11)$$

известное как соотношение Бретшнайдера. Докажем его.

3—7685.—Я. П. Понарин.

Примем вершину A за нулевую точку плоскости. На основании (7.2) имеем:

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\arg\frac{d}{b}+\arg\frac{b-c}{d-c}=\arg\frac{d(b-c)}{b(d-c)}$$

и поэтому

$$\cos(\widehat{A}+\widehat{C})=\frac{d\overline{b}(b-c)(\overline{d}-\overline{c})+\overline{d}b(\overline{b}-\overline{c})(d-c)}{2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA},$$

вследствие чего правая часть доказываемого равенства (7.11) равна

$$b\overline{b}(d-c)(\overline{d}-\overline{c})+d\overline{d}(b-c)(\overline{b}-\overline{c})-d\overline{b}(b-c)(\overline{d}-\overline{c})-\overline{d}b(\overline{b}-\overline{c})(d-c)=$$
$$=c\overline{c}(d-b)(\overline{d}-\overline{b}).$$

Но и $AC^2\cdot BD^2=c\overline{c}(d-b)(\overline{d}-\overline{b})$.

7.4. Теорема Птолемея. Если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$ и $\cos(\widehat{A}+\widehat{C})=-1$. Поэтому соотношение (7.11) в этом случае принимает вид:

$$(AC\cdot BD)^2=(AB\cdot CD+BC\cdot AD)^2,$$
$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD. \tag{7.12}$$

Итак, *во вписанном в окружность четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон* (теорема Птолемея).

Из равенств (7.12) и (7.11) следует, что $\cos(\widehat{A}+\widehat{C})=-1$, $\widehat{A}+\widehat{C}=$ $=180^\circ$. Это имеет место, в частности, в случаях, когда $\widehat{BAD}=0^\circ$, $\widehat{BCD}=$ $=180^\circ$, или когда $\widehat{BAD}=180^\circ$, $\widehat{BCD}=0^\circ$. В этих двух случаях точки A, B, C, D коллинеарны. Следовательно, если для неколлинеарных точек A, B, C, D выполняется равенство (7.12), то четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, т. е. имеет место *обратная теорема Птолемея.*

7.5. Решение задач.

Задача 1. В окружности проведены три параллельные хорды AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что для произвольной точки M окружности прямые MA_1, MB_1, MC_1 образуют равные углы с прямыми BC, CA, AB соответственно.

■ Пусть данная окружность имеет уравнение $z\overline{z}=1$. По условию (3.4) параллельности хорд имеем: $aa_1=bb_1=cc_1$. Следует доказать, что $(\widehat{\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{CB}})=(\widehat{\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{CA}})=(\widehat{\overrightarrow{MC_1}, \overrightarrow{BA}})$ (рис. 19). Первое равенство эквивалентно такому:

$$\arg\frac{b-c}{a_1-m}=\arg\frac{a-c}{b_1-m},$$

или

$$\arg \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a-c)(a_1-m)}=0.$$

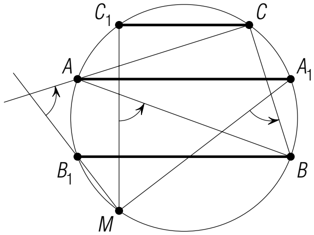

Рис. 19

Значит, эта дробь должна быть действительным числом. И это так, поскольку сопряжённое ей число

$$\frac{(c-b)(m-b_1)aa_1}{(c-a)(m-a_1)bb_1}=\frac{(b-c)(b_1-m)}{(a-c)(a_1-m)}$$

равно этой же дроби. Аналогично доказывается и второе равенство углов. ■

Задача 2. Доказать, что угол между прямыми Симсона точек M_1 и M_2 описанной около треугольника ABC окружности относительно этого треугольника равен вписанному углу, опирающемуся на дугу M_1M_2.

■ Пусть точке M_1 соответствует прямая Симсона (п. 6.3), содержащая ортогональные проекции A_1, B_1, C_1 точки M_1 на прямые BC, CA, AB, а точке M_2 — аналогичная прямая, проходящая через ортогональные проекции A_2, B_2, C_2 точки M_2 на те же три прямые (рис. 20). Если описанная окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$, то

$$2b_1=a+c+m_1-\frac{ac}{m_1},\quad 2c_1=a+b+m_1-\frac{ab}{m_1},$$

$$2b_2=a+c+m_2-\frac{ac}{m_2},\quad 2c_2=a+b+m_2-\frac{ab}{m_2}.$$

Векторам $2\overrightarrow{B_1C_1}$ и $2\overrightarrow{B_2C_2}$ соответствуют комплексные числа $2(c_1-b_1)=$ $=(b-c)(1-a\overline{m}_1)$ и $2(c_2-b_2)=(b-c)(1-a\overline{m}_2)$.

Следовательно,

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}})=\arg \frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}=$$

$$=\arg \frac{1-a\overline{m}_2}{1-a\overline{m}_1}=\arg \frac{m_1(m_2-a)}{m_2(m_1-a)}.$$

С другой стороны, $(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}})=$ $=\arg \dfrac{m_2-a}{m_1-a}$. Поэтому

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}})-(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}})=$$

$$=\arg \frac{m_1}{m_2}=(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}})=$$

$$=-(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}})=-2(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}}).$$

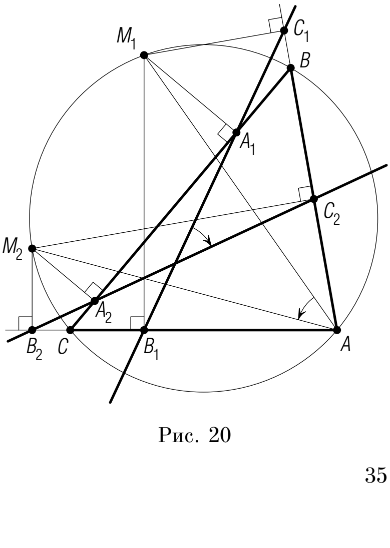

Рис. 20

3* —7685.—Я. П. Понарин.

Отсюда $(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}})$. Таким образом, ориентированные углы между этими векторами равны по величине, но имеют противоположные знаки. ■

Задача 3. Прямая, соединяющая середины двух противоположных сторон четырёхугольника, не являющегося трапецией, образует равные углы с двумя другими сторонами. Доказать, что последние две стороны равны.

■ Пусть M и N — середины сторон BC и DA положительно ориентированного четырёхугольника $ABCD$ и $(\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{NM}})$. Согласно формуле (7.1),

$$\arg \frac{b-a}{m-n} = \arg \frac{m-n}{c-d} \quad \Leftrightarrow \quad \arg \frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2} = 0.$$

Это значит, что число $\dfrac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2}$ является действительным. Но $m = \dfrac{1}{2}(b+c)$, $n = \dfrac{1}{2}(a+d)$, значит, $\dfrac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2} = \dfrac{4(b-a)(c-d)}{((b-a)+(c-d))^2}$. Обозначим $b-a=p$, $c-d=q$. Тогда $\dfrac{pq}{(p+q)^2}$ — действительное число и поэтому $\dfrac{(p+q)^2}{pq} = \dfrac{(\overline{p}+\overline{q})^2}{\overline{pq}}$. А это равенство эквивалентно такому: $(p\overline{p}-q\overline{q})(p\overline{q}-\overline{p}q)=0$. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ не является трапецией, то $AB \nparallel CD \Leftrightarrow p\overline{q} \neq \overline{p}q$, а, значит, $p\overline{p} = q\overline{q} \Leftrightarrow AB = CD$. ■

Задачи

1.53. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины.

1.54. Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если его медианы, проведённые к боковым сторонами, перпендикулярны.

1.55. Докажите, что ортоцентр треугольника служит центром вписанной окружности для треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

1.56. Разность углов A и B треугольника ABC равна 90°. Докажите, что расстояние от основания высоты, опущенной на сторону AB, до середины этой стороны равно радиусу описанной около треугольника окружности.

1.57. Основание D высоты CD треугольника ABC делит сторону AB в отношении 3:1. Угол ACD вдвое больше угла BCD. Вычислите углы треугольника ABC.

1.58. Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, а точки A_2, B_2, C_2 — середины соответствующих высот. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна четверти площади треугольника $A_1B_1C_1$.

1.59. Даны комплексные координаты a, b, c вершин треугольника ABC. Найдите углы, образованные прямой Эйлера этого треугольника с его сторонами.

1.60. Докажите, что для любого треугольника ABC имеет место соотношение

$$AB^2+BC^2+CA^2=4S(\operatorname{ctg}\widehat{A}+\operatorname{ctg}\widehat{B}+\operatorname{ctg}\widehat{C}).$$

1.61. Докажите, что площадь треугольника, вершины которого являются основаниями перпендикуляров, опущенных из какой-либо вершины вписанного в окружность пятиугольника на его стороны, не зависит от выбора вершины пятиугольника.

1.62. Произвольная точка P окружности с центром O, описанной около треугольника ABC, при симметрии относительно прямых OA, OB, OC переходит в точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ не зависит от выбора точки P на окружности, прямые AB_1 и A_1B, BC_1 и B_1C, AC_1 и A_1C пересекаются в трёх коллинеарных точках.

1.63. Точка M делит медиану AA_1 треугольника ABC в отношении $1:2$, считая от точки A. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольников ABN и BCN.

1.64. Вычислите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

1.65. Разность углов B и A треугольника ABC равна 90°. Докажите, что диаметр окружности, описанной около этого треугольника, равен $\dfrac{AC^2-BC^2}{AB}$.

1.66. Докажите, что если высота и медиана, проведённые из одной вершины треугольника и лежащие внутри него, образуют со сторонами, выходящими из этой вершины, равные углы, то треугольник прямоугольный.

1.67. Докажите, что для любого остроугольного треугольника имеет место равенство

$$\frac{AH}{BC}+\frac{BH}{AC}+\frac{CH}{AB}=\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4S},$$

где H — ортоцентр, S — площадь этого треугольника. Найдите соответствующее равенство для тупоугольного треугольника.

1.68. Углы треугольника ABC связаны соотношением $\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B=2$. Докажите, что ортоцентр треугольника делит пополам высоту, опущенную на сторону AB.

1.69. Углы треугольника ABC связаны соотношением $3\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B=-1$. Докажите, что медиана треугольника, проведённая к стороне AB, равна радиусу описанной окружности.

1.70. Докажите, что для любого треугольника ABC имеет место зависимость:
$$\overrightarrow{HA}\operatorname{tg} A+\overrightarrow{HB}\operatorname{tg} B+\overrightarrow{HC}\operatorname{tg} C=\overrightarrow{0}.$$

Задачи к главе 1

1.71. Прямые, проведённые через вершины треугольника ABC параллельно противоположным сторонам, пересекают описанную окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые A_1B и AB_1, B_1C и BC_1, C_1A и CA_1 пересекаются в точках, лежащих на прямой Эйлера треугольника.

1.72. На продолжениях высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC за вершины A и B отложены отрезки AA_2 и BB_2, равные BC и AC соответственно. Докажите, что отрезки CA_2 и CB_2 равны по длине и перпендикулярны.

1.73. Докажите, что прямая Симсона точки M относительно треугольника ABC делит отрезок MH пополам (H — ортоцентр треугольника ABC).

1.74. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что если прямая Симсона точки D относительно треугольника ABC перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника, то прямая Симсона любой другой вершины четырёхугольника относительно треугольника, образованного остальными тремя вершинами, перпендикулярна соответствующей прямой Эйлера.

1.75. Три хорды окружности пересекаются в одной точке. Докажите, что три точки пересечения пар касательных к окружности, проведённых в концах этих хорд, коллинеарны.

1.76. В окружность вписан четырёхугольник. Докажите, что прямые Симсона его вершин относительно треугольников, образованных соответственно остальными тремя вершинами, пересекаются в одной точке.

1.77 (*обобщение теоремы Симсона*). На окружности, описанной около треугольника ABC, даны точки M и N. Прямая, проведённая через точку M параллельно стороне AB, вторично пересекает окружность в точке P, а прямая NP пересекает прямую AB в точке C_1. Аналогичные построения, выполненные для других двух сторон треугольника, дают точки A_1 и B_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

1.78. В окружность вписан треугольник ABC, и в его вершинах проведены касательные к окружности, образующие треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через центр описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности.

1.79. Через вершины треугольника ABC проведены хорды AA_1, BB_1, CC_1 описанной около него окружности параллельно противоположным сторонам. Касательные в точках A_1, B_1, C_1 пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 коллинеарны.

1.80. Найдите зависимость между углами треугольника ABC, если хорды AA_1 и BB_1 описанной около него окружности, перпендикулярные соответственно сторонам BC и CA, равны.

1.81. Из некоторой точки на стороны треугольника опущены перпендикуляры, через основания которых проведена окружность. Докажите, что перпендикуляры к сторонам треугольника во вторых точках пересечения сторон с этой окружностью также пересекаются в одной точке.

1.82. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Докажите, что циркулем и линейкой нельзя построить хорду DE, параллельную AB, так, чтобы хорда DC была перпендикулярна радиусу OE.

1.83. Докажите, что точки, симметричные точке, принадлежащей описанной около треугольника окружности, относительно сторон этого треугольника, лежат на прямой, содержащей ортоцентр треугольника.

1.84. В окружности проведены три параллельные хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Для точек B_1, B_2, B_3 построены точки C_1, C_2, C_3, симметричные им относительно середин отрезков A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 соответственно. Докажите, что точки C_1, C_2, C_3 лежат на прямой, перпендикулярной A_1B_1.

1.85. Даны треугольник ABC и точка M. Построены прямые, симметричные прямым MA, MB, MC относительно соответствующих биссектрис треугольника. Докажите, что если точка M не лежит на описанной около треугольника окружности, то полученные три прямые пересекаются в одной точке, а в противном случае эти прямые параллельны.

Глава 2

МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 8. Подобные и равные треугольники

8.1. Подобные треугольники. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и одинаково ориентированы (подобие первого рода), если и только если $A_1B_1 = kAB$, $A_1B_1 = kAC$ и $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{BAC}$ (углы ориентированные). С помощью комплексных чисел эти равенства можно записать так:

$$|a_1 - b_1| = k|a-b|, \quad |a_1 - c_1| = k|a-c|, \quad \arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg\frac{c-a}{b-a}.$$

Два равенства

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|c-a|}{|b-a|} \quad \text{и} \quad \arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg\frac{c-a}{b-a}$$

эквивалентны одному

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c-a}{b-a},$$

или

$$\frac{c_1 - a_1}{c-a} = \frac{b_1 - a_1}{b-a} = \sigma, \tag{8.1}$$

где σ — комплексное число, $|\sigma| = k$ — коэффициент подобия.

Если, в частности, σ — число *действительное*, то $\sigma = \dfrac{c_1 - a_1}{c-a} = \dfrac{\overline{c}_1 - \overline{a}_1}{\overline{c} - \overline{a}}$ и на основании признака (3.3) будет $AC \parallel A_1C_1$. По такой же причине $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ *гомотетичны*.

Соотношение (8.1) — необходимое и достаточное условие для того, чтобы треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являлись подобными и одинаково ориентированными. Ему можно придать симметричный вид

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{8.2}$$

или

$$ab_1 + bc_1 + ca_1 = ba_1 + cb_1 + ac_1. \tag{8.2a}$$

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и противоположно ориентированы (подобие второго рода), если и только если $A_1B_1 = kAB$, $A_1C_1 = kAC$ и $\widehat{\overrightarrow{B_1A_1C_1}} = -\widehat{BAC}$. Последнее равенство равносильно такому:

$$\arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = -\arg \frac{c - a}{b - a} = \arg \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

Два равенства

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|\overline{c} - \overline{a}|}{|\overline{b} - \overline{a}|} \quad \text{и} \quad \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

эквивалентны одному

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}},$$

или

$$\frac{c_1 - a_1}{\overline{c} - \overline{a}} = \frac{b_1 - a_1}{\overline{b} - \overline{a}} = \sigma, \tag{8.3}$$

где σ — комплексное число, $|\sigma| = k$ — коэффициент подобия.

Соотношение (8.3) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ были подобны и противоположно ориентированы. Его можно записать в симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} \overline{a} & a_1 & 1 \\ \overline{b} & b_1 & 1 \\ \overline{c} & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.4}$$

8.2. Равные треугольники. Если $|\sigma| = 1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (конгруэнтны). Тогда соотношение (8.1) становится признаком равенства одинаково ориентированных треугольников, а соотношение (8.3) — признаком равенства противоположно ориентированных треугольников.

З а д а ч а 1. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого принадлежат касательным в вершинах треугольника ABC к его описанной окружности, гомотетичен треугольнику с вершинами в основаниях A_2, B_2, C_2 высот треугольника ABC (рис. 21).

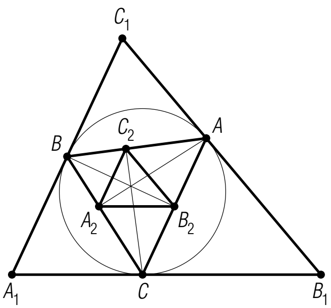

Рис. 21

■ Как обычно, принимаем описанную окружность за единичную. На основании формул (4.4) и (4.3) имеем:

$$a_1 = \frac{2bc}{b+c}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right),$$

$$b_1 = \frac{2ac}{a+c}, \quad b_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ac}{b}\right),$$

$$c_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ab}{c}\right).$$

Проверяем выполнение признака (8.1):

$$\frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}=\frac{a_1-c_1}{a_2-c_2}=\frac{-4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\sigma,$$

причём $\sigma=\overline{\sigma}$, т. е. σ — действительное число. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны. ■

Задача 2. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны центру описанной около треугольника окружности относительно его сторон. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен данному треугольнику ABC.

■ Если центр O описанной окружности является начальной точкой плоскости, то $a_1=b+c$, $b_1=a+c$, $c_1=a+b$. Легко видеть, что $\frac{a_1-b_1}{a-b}=\frac{a_1-c_1}{a-c}=-1$. На основании полученных выше критериев треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC гомотетичны и равны, т. е. центрально-симметричны. Центром симметрии является точка $\frac{1}{2}(a+a_1)=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — середина отрезка OH, центр окружности девяти точек треугольника ABC (см. задачу 1.39). ■

Задача 3. Даны два подобных и одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На отрезках AA_1, BB_1, CC_1 построены попарно подобные и одинаково ориентированные треугольники AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2. Доказать, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

■ Согласно (8.2) и условию задачи имеем:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8.5}$$

Требуется показать, что

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & 1 \\ b & b_2 & 1 \\ c & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8.6}$$

В этом можно убедиться, не производя выкладок. В самом деле, из равенства нулю первого определителя (8.5) следует, что тройка (a_1, b_1, c_1) линейно выражается через тройки (a, b, c) и $(1, 1, 1)$. Из других равенств (8.5) вытекает, что (a_2, b_2) линейно выражается через (a, b) и (a_1, b_1), а (a_2, c_2) — через (a, c) и (a_1, c_1). Поэтому тройка (a_2, b_2, c_2) является линейной комбинацией троек (a, b, c) и $(1, 1, 1)$. А это и означает, что равенство (8.6) истинно. ■

Задача 4. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и одинаково ориентированы. Для некоторой точки M плоскости векторы $\overrightarrow{MA_0}$, $\overrightarrow{MB_0}$, $\overrightarrow{MC_0}$, соответственно, равны векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Доказать, что треугольник $A_0B_0C_0$ подобен данным и одинаково с ними ориентирован.

■ Положим $m=0$. Тогда $a_0=a_1-a$, $b_0=b_1-b$, $c_0=c_1-c$, откуда $b_o-a_0=b_1-a_1-(b-a)$, $c_0-a_0=c_1-a_1-(c-a)$, и поэтому

$$\frac{b_0-a_0}{b-a}=\frac{b_1-a_1}{b-a}-1, \quad \frac{c_0-a_0}{c-a}=\frac{c_1-a_1}{c-a}-1.$$

В силу (8.1) по условию задачи имеем:

$$\frac{b_1-a_1}{b-a}=\frac{c_1-a_1}{c-a}.$$

Следовательно,

$$\frac{b_0-a_0}{b-a}=\frac{c_0-a_0}{c-a}.$$

Опять же, на основании (8.1), треугольники $A_0B_0C_0$ и ABC подобны и одинаково ориентированы. ■

Задача 5. Два конгруэнтных одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в одну окружность. Доказать, что треугольник с вершинами в точках пересечения прямых BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1 подобен данным треугольникам.

■ Пусть окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$. Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ служат образами вершин треугольника ABC при повороте на некоторый угол $\arg\alpha$, $|\alpha|=1$. Поэтому $a_1=\alpha a$, $b_1=\alpha b$, $c_1=\alpha c$. Если A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1 соответственно, то, на основании (4.1),

$$\bar{a}_2=\frac{b+c-(\alpha b+\alpha c)}{bc-\alpha^2bc}=\frac{b+c}{bc(1+\alpha)},$$

откуда $a_2=\dfrac{b+c}{1+\bar{\alpha}}$. Аналогично, $b_2=\dfrac{a+c}{1+\bar{\alpha}}$, $c_2=\dfrac{a+b}{1+\bar{\alpha}}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & 1 \\ b & b_2 & 1 \\ c & c_2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{1+\bar{\alpha}}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}=0$$

(непосредственное раскрытие определителя). ■

Задачи

2.1. Докажите, что середины отрезков, соединяющих соответственные вершины двух равных и противоположно ориентированных треугольников, коллинеарны.

2.2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и одинаково ориентированы. Докажите, что

$$AA_1\cdot BC\leqslant BB_1\cdot CA+CC_1\cdot AB.$$

2.3. На сторонах четырёхугольника $ABCD$ построены одинаково ориентированные подобные треугольники AA_1B, CB_1B, CC_1D и AD_1D. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2.4. На сторонах четырёхугольника $ABCD$ вне его построены подобные между собой ориентированные треугольники ABK, BCN, CDL, DAM. Найдите условие, необходимое и достаточное для того, чтобы отрезки MN и KL были равны по длине и перпендикулярны.

2.5. Точки C_1, A_1, B_1 симметричны точке P, лежащей в плоскости треугольника ABC, относительно, соответственно, прямых AB, BC, CA. Точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны и противоположно ориентированы. Найдите множество точек P таких, чтобы коэффициент подобия треугольников $A_2B_2C_2$ и ABC был равен данному числу k.

2.6. На окружности, описанной около треугольника ABC, взята произвольная точка M. Прямые, проведённые через точку M параллельно (перпендикулярно) сторонам треугольника ABC, вторично пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, а прямые, содержащие их соответственные стороны, пересекаются в трёх коллинеарных точках.

2.7. Даны два треугольника ABC и PQR. Точка F принадлежит внутренней области треугольника PQR. Построены треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1, соответственно подобные треугольникам с вершиной F и со сторонами PQ, QR, RP и одинаково с ними ориентированные. Докажите, что треугольники PQR и $A_1B_1C_1$ подобны.

§ 9. Правильный треугольник

9.1. Критерий правильного треугольника. Если потребовать, чтобы ориентированный треугольник ABC был подобен ориентированному треугольнику BCA, то треугольник ABC будет *правильным*. Поэтому из (8.2) получаем необходимое и достаточное условие

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9.1}$$

для того, чтобы треугольник ABC был правильным. После раскрытия определителя получаем:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca, \tag{9.2}$$

или

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \tag{9.3}$$

Введём в употребление комплексное число $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, являющееся одним из корней уравнения $z^3 = 1$, другие два корня которого равны 1 и $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon} = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $|\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1$. По теореме

Виета для кубического уравнения $z^3-1=0$ имеем: $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ (это легко проверить и непосредственно). Тогда равенство (9.2) будет эквивалентно такому:

$$(a\varepsilon+b\varepsilon^2+c)(a\varepsilon^2+b\varepsilon+c)=0,$$

или, после умножения первого трёхчлена на ε^2,

$$(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a\varepsilon^2+b\varepsilon+c)=0. \qquad (9.4)$$

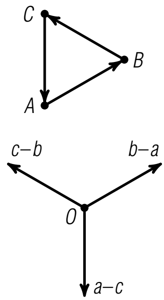

Рис. 22

Итак, для того, чтобы треугольник ABC был правильным, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из равенств:

$$a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=0 \qquad (9.5)$$

или же

$$a\varepsilon^2+b\varepsilon+c=0. \qquad (9.6)$$

Оказывается, первое из этих равенств соответствует только тому случаю, когда треугольник ABC ориентирован положительно, а второе выполняется лишь при его отрицательной ориентации. В самом деле, так как умножению на ε отвечает поворот на $\frac{2\pi}{3}$, при положительной ориентации треугольника $b-a=\varepsilon(a-c)$, $c-b=\varepsilon(b-a)$ (рис. 22), откуда $a=b-\varepsilon a+\varepsilon c$, $\varepsilon b=c-b+\varepsilon a$, и поэтому $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=c(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0$. Аналогично проверяется выполнение равенства (9.6) для отрицательно ориентированного правильного треугольника ABC. Очевидно, одновременно равенства (9.5) и (9.6) выполняться не могут.

Если правильный треугольник ABC вписан в окружность $z\bar{z}=1$, то при его положительной ориентации $b\varepsilon=c$ и $c\varepsilon^2=b$, а при отрицательной ориентации $b\varepsilon=a$ и $a\varepsilon^2=b$. Поэтому каждое из равенств (9.5) и (9.6) принимает вид

$$a+b+c=0. \qquad (9.7)$$

9.2. Теорема Помпею. *Для того, чтобы точка M плоскости лежала на окружности, описанной около правильного треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы длина большего из отрезков MA, MB, MC была равна сумме длин двух других.*

■ Необходимость этого условия следует из теоремы Птолемея (п. 7.4). Докажем достаточность.

Примем точку M за начальную. Пусть правильный треугольник ABC ориентирован положительно. Тогда, в силу (9.5), $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=0$ ($\varepsilon^3=1$, $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$). Если $MA>MB$ и $MA>MC$, то равенство $MA=MB+MC$ эквивалентно равенству $|a|=|b|+|c|$. Так как $|a|=|b\varepsilon+c\varepsilon^2|=|\varepsilon|\cdot|b+c\varepsilon|=|b+c\varepsilon|$ и $|c|=|c\varepsilon|$, равенство $|a|=|b|+|c|$ равносильно такому:

$$|b+c\varepsilon|=|b|+|c\varepsilon|.$$

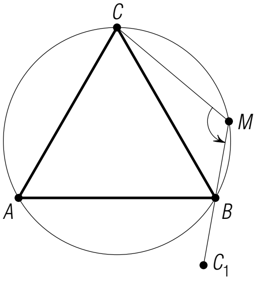

Рис. 23

Оно имеет место тогда и только тогда, когда точки B и $C_1(c\varepsilon)$ коллинеарны с началом M (рис. 23). В этом случае ориентированный угол CMB равен 120°, и точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. ■

З а д а ч а 1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC построены одинаково ориентированные равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Доказать, что их центры A_0, B_0, C_0 являются вершинами равностороннего противоположно ориентированного треугольника (рис. 24).

■ Согласно условию задачи и (9.5),

$$a+b_1\varepsilon+c\varepsilon^2=0, \quad b+c\varepsilon+a_1\varepsilon^2=0, \quad c_1+a\varepsilon+b\varepsilon^2=0.$$

Кроме того, $a_0=\frac{1}{3}(b+c+a_1)$, $b_0=\frac{1}{3}(c+a+b_1)$, $c_0=\frac{1}{3}(a+b+c_1)$. Отсюда находим:

$$3(c_0+\varepsilon b_0+\varepsilon^2 a_0)=a+b+c_1+\varepsilon(c+a+b_1)+\varepsilon^2(b+c+a_1)=$$
$$=(c_1+\varepsilon a+\varepsilon^2 b)+(b+\varepsilon c+\varepsilon^2 a_1)+(a+\varepsilon b_1+\varepsilon^2 c)=0,$$

т. е. треугольник $C_0B_0A_0$ — правильный и той же ориентации, что и данные правильные треугольники, а значит, треугольник $A_0B_0C_0$ имеет противоположную ориентацию. ■

З а д а ч а 2. В условиях предыдущей задачи доказать, что середины A', B', C' отрезков AA_0, BB_0, CC_0 являются вершинами правильного треугольника той же ориентации, что и данные правильные треугольники (см. рис. 24).

■ По условию имеем:

$$a'=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}(b+c+a_1)\right)=\frac{1}{6}(3a+b+c-\varepsilon b-\varepsilon^2 c),$$

$$b'=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{3}(c+a+b_1)\right)=\frac{1}{6}(3b+c+a-\varepsilon c-\varepsilon^2 a),$$

$$c'=\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{3}(a+b+c_1)\right)=\frac{1}{6}(3c+a+b-\varepsilon a-\varepsilon^2 b).$$

Тогда

$$6(a'+\varepsilon b'+\varepsilon^2 c')=3a+b+c-\varepsilon b-\varepsilon^2 c+3\varepsilon b+\varepsilon c+\varepsilon a-\varepsilon^2 c-a+3\varepsilon^2 c+$$
$$+\varepsilon^2 a+\varepsilon^2 b-a-\varepsilon b=a(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+b(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+c(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0.$$

Следовательно, треугольник $A'B'C'$ является правильным и имеет ту же ориентацию, что и каждый из трёх данных правильных треугольников. ■

З а д а ч а 3. Дан треугольник ABC. Построить такой треугольник $A_0B_0C_0$, чтобы треугольники A_0B_0C, B_0C_0A, C_0A_0B были правильными одной ориентации (рис. 25).

■ По требованию задачи числа a_0, b_0, c_0 должны удовлетворять равенствам:

$$a+\varepsilon b_0+\varepsilon^2 c_0=0, \quad b+\varepsilon c_0+\varepsilon^2 a_0=0, \quad c+\varepsilon a_0+\varepsilon^2 b_0=0.$$

Исключив из первых двух равенств c_0, получаем:

$$a-\varepsilon b+\varepsilon b_0-a_0=0.$$

Выразив b_0 из этого уравнения и подставив полученное выражение в третье, находим:

$$c+\varepsilon a_0-\varepsilon a+\varepsilon^2 b+\varepsilon a_0=0,$$

откуда

$$2\varepsilon a_0=\varepsilon a-\varepsilon^2 b-c.$$

Построим правильный треугольник $CA'B$:

$$c+\varepsilon a'+\varepsilon^2 b=0.$$

Тогда

$$2\varepsilon a_0=\varepsilon a+\varepsilon a', \quad \text{и} \quad a_0=\frac{1}{2}(a+a').$$

Построив аналогично правильные треугольники $AB'C$ и $BC'A$, найдём, что $b_0=\dfrac{1}{2}(b+b')$ и $c_0=\dfrac{1}{2}(c+c')$. Следовательно, чтобы построить треугольник $A_0B_0C_0$, необходимо на сторонах BC, CA, AB построить

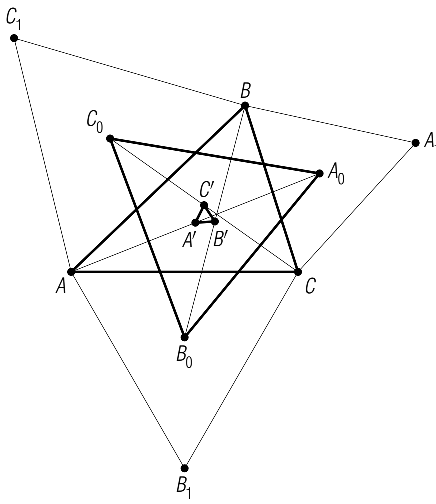

Рис. 24

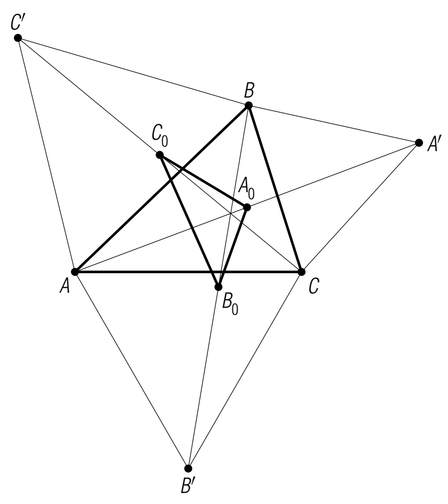

Рис. 25

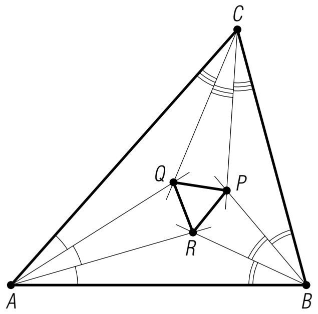

Рис. 26

правильные треугольники $CA'B$, $AB'C$ и $BC'A$ той же ориентации, что и искомые правильные треугольники. Тогда середины отрезков AA', BB', CC' будут искомыми точками A_0, B_0, C_0. ■

Задача 4 (*теорема Морлея*). Доказать, что пары трисектрис углов треугольника, примыкающих к одной и той же его стороне, пересекаются в точках, являющихся вершинами правильного треугольника (рис. 26). (Трисектрисой угла называется луч с началом в вершине угла, делящий его в отношении 1:2.)

■ Описанную около данного треугольника окружность примем за единичную $z\overline{z}=1$. Положим $a=\beta^3$, $b=\beta^3\gamma^3$, $c=\alpha^3\beta^3\gamma^3=1$. Пусть трисектрисы, прилежащие к стороне AB, пересекаются в точке R и пересекают окружность соответственно в точках A_1 и B_1. Тогда $a_1=\alpha b=\alpha\beta^3\gamma^3$, $b_1=\beta^2 c=\beta^2$. На основании (2.20) получаем:

$$\overline{r}=\frac{b+b_1-(a+a_1)}{bb_1-aa_1}=\frac{\beta^3\gamma^3+\beta^2-\beta^3-\alpha\beta^3\gamma^3}{\beta^5\gamma^3-\alpha\beta^6\gamma^3},$$

$$r=\frac{\dfrac{1}{\beta^3\gamma^3}+\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\beta^3}-\dfrac{1}{\alpha\beta^3\gamma^3}}{\dfrac{1}{\beta^5\gamma^3}-\dfrac{1}{\alpha\beta^6\gamma^3}}=\frac{\alpha+\alpha\beta\gamma^3-\alpha\gamma^3-1}{\alpha\beta-1}\beta^3=$$

$$=\frac{\alpha^4\beta^3\gamma^3+\alpha\beta\gamma^3-\alpha\gamma^3-\alpha^3\beta^3\gamma^3}{\alpha\beta-1}\beta^3=\alpha\beta^3\gamma^3(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+1-\alpha\beta^2-\beta).$$

Таким же путём находим и координату точки P пересечения трисектрис, примыкающих к стороне BC:

$$p=\frac{\dfrac{1}{\beta^3\gamma^2}+1-\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\beta^3\gamma^3}}{\dfrac{1}{\beta^3\gamma^2}-\dfrac{1}{\beta^4\gamma^3}}=\beta(\beta^2\gamma^2+\beta\gamma+1-\beta\gamma^2-\gamma)$$

и координату точки Q пересечения трисектрис, прилегающих к стороне CA:

$$q=\frac{\dfrac{1}{\beta^3\gamma}+1-\dfrac{1}{\beta^3}-\dfrac{1}{\alpha^2\beta^3\gamma^3}}{\dfrac{1}{\beta^3\gamma}-\dfrac{1}{\alpha^2\beta^6\gamma^3}}=\frac{\alpha^2\gamma^2-1+\alpha\beta^2\gamma(1-\alpha^3\gamma^3)}{\alpha^2\beta^3\gamma^2(1-\alpha\gamma)}\beta^3=$$

$$=\beta^3\gamma(\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma+1-\alpha^2\gamma-\alpha).$$

Остаётся доказать, что $p+\varepsilon q+\varepsilon^2 r=0$, где $\varepsilon=\alpha\beta\gamma$, $(\alpha\beta\gamma)^2+\alpha\beta\gamma+1=0$.

Действительно,

$$p+\varepsilon q+\varepsilon^2 r=\beta(\beta^2\gamma^2+\beta\gamma+1-\beta\gamma^2-\gamma)+$$
$$+\alpha\beta^4\gamma^2(\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma+1-\alpha^2\gamma-\alpha)+\beta^2\gamma^2(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+1-\alpha\beta^2-\beta)=$$
$$=\beta^2\gamma(1+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta^2\gamma^2)=0.\ \blacksquare$$

Задачи

2.8. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N, K таким образом, что $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\alpha\overrightarrow{CA}$. Докажите, что если MNK — правильный треугольник, то и данный треугольник также правильный.

2.9. Даны два правильных и одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 можно построить треугольник.

2.10. Даны два правильных одинаково ориентированных треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. На отрезках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 построены правильные треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ той же ориентации. Докажите, что треугольник $C_1C_2C_3$ правильный и имеет ту же ориентацию.

2.11. На сторонах AB, CD, EF центрально симметричного шестиугольника $ABCDEF$ построены одинаково ориентированные правильные треугольники ABP, CDQ, EFR. Докажите, что треугольник PQR правильный.

2.12. Точка M лежит на окружности, описанной около правильного треугольника ABC. Докажите, что

$$MA^4+MB^4+MC^4=18R^4.$$

2.13. Дан правильный треугольник ABC. На прямой BC взята произвольная точка D, а на прямой AB — точка E так, что $AE=BD$ и $(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AE}})=60^\circ$. Докажите, что $EC=ED$.

2.14. На смежных сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ вне его построены правильные треугольники ABM и ADN. Докажите, что треугольник MNC правильный.

2.15. Даны три правильных одинаково ориентированных треугольника OAB, OCD и OEF. Докажите, что середины отрезков BC, DE, FA являются вершинами правильного треугольника, либо совпадают.

2.16. Даны три одинаково ориентированных правильных треугольника AKL, BMN и CPQ, причём точки A, B, C являются вершинами правильного треугольника. Докажите, что середины отрезков LM, NP, QK являются вершинами правильного треугольника, либо совпадают.

4—7685.—Я. П. Понарин.

2.17. Точки A_1, B_1, C_1 расположены на сторонах BC, CA, AB правильного треугольника ABC так, что $CA_1 = 2BA_1$, $AB_1 = 2CB_1$, $BC_1 = 2AC_1$. Точка A_2 отрезка B_1C_1 такова, что $C_1A_2 = 2B_1A_2$. Докажите, что отрезки AA_2 и A_1A_2 равны и $\widehat{AA_2A_1} = 120^\circ$.

2.18. На сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ вне его построены правильные треугольники ABM и CDN, а на сторонах BC и DA построены правильные треугольники BCP и DAQ, лежащие с четырёхугольником в одной полуплоскости относительно прямых BC и DA соответственно. Докажите, что $MPNQ$ — параллелограмм.

2.19. Точка C_1 делит сторону AB правильного треугольника ABC в отношении 3:2, считая от точки A. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 3:14, считая от точки A. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что прямые PA и CC_1 перпендикулярны.

§ 10. Правильные многоугольники

10.1. Координаты вершин правильного n-угольника. Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n значений, которые находятся по известной формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где k принимает значения 0, 1, 2, ..., $n-1$. Все n значений z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1} имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$. Аргумент числа z_0 равен $\frac{\varphi}{n}$, а аргументы остальных z_i получаются последовательным прибавлением $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому точки с комплексными координатами z_0, z_1, ..., z_{n-1} являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в нулевой точке O.

При решении задач с правильными многоугольниками удобно сопоставить центру многоугольника число 0, а одной из его вершин — число 1. Так как повороту вектора $\overrightarrow{OM}$ около точки O на угол α соответствует умножение комплексной координаты z точки M на число $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$, вершинам A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1} правильного многоугольника соответствуют комплексные числа

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{10.1}$$

представляющие собой корни уравнения $z^n - 1 = 0$. Поскольку $z_k = z_1^k$, то вершинам $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ соответствуют числа $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$.

Уравнение $z^n-1=0$ эквивалентно уравнению

$$(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1)=0.$$

Корням уравнения $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=0$ соответствуют вершины A_1, A_2, ..., A_{n-1}.

Полезно заметить, что $\bar{z}^k=z^{n-k}$. Действительно, если

$$z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

то

$$z^{n-k}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=$$
$$=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=\bar{z}^k.$$

Если $n=2m$, то $z^m=-1$, и вершинам правильного n-угольника соответствуют числа 1, z, z^2, ..., z^{m-1}, -1, $-z$, $-z^2$, ..., $-z^{m-1}$, причём $\bar{z}^k=\dfrac{1}{z^k}=z^{2m-k}=z^m\cdot z^{m-k}=-z^{m-k}$. Уравнение $z^{2m}-1=0$ эквивалентно уравнению $(z^m-1)(z^m+1)=0$. Корни уравнения $z^m-1=0$ соответствуют вершинам n-угольника с чётными номерами, а корни уравнения $z^m+1=0$ — вершинам этого n-угольника с нечётными номерами.

10.2. Вычисление длин сторон и диагоналей правильного n-угольника. Для вычисления длин сторон и диагоналей правильного многоугольника воспользуемся формулой (2.2):

$$A_0A_k^2=(z_k-1)(\bar{z}_k-1).$$

Поскольку $z_k\bar{z}_k=1$, то

$$A_0A_k^2=2-(z_k+\bar{z}_k), \tag{10.2}$$

причём $z_k+\bar{z}_k=2\cos\dfrac{2k\pi}{n}$. Остаётся найти сумму $z_k+\bar{z}_k=u_k$. Число z_k — корень уравнения $z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0$. Учитывая, что $z^{n-k}=\bar{z}^k$, при *нечётном* n это уравнение можно представить так:

$$\bar{z}+\bar{z}^2+\ldots+\bar{z}^{(n-1)/2}+z^{(n-1)/2}+\ldots+z^2+z+1=0,$$

или

$$(z^{(n-1)/2}+\bar{z}^{(n-1)/2})+\ldots+(z^2+\bar{z}^2)+(z+\bar{z})+1=0. \tag{10.3}$$

Положив $z+\bar{z}=u$, находим: $z^2+\bar{z}^2=u^2-2$, $z^3+\bar{z}^3=u^3-3u$, ... Таким образом, выполняя подстановки, получим уравнение степени $\dfrac{1}{2}(n-1)$

относительно u, из которого найдём $\frac{1}{2}(n-1)$ значений u. Подставляя их поочерёдно в формулу (10.2), найдём длины хорд A_0A_1, A_0A_2, ..., A_0A_m, где $m=\frac{1}{2}(n-1)$.

Если n *чётно*, $n=2m$, то корни уравнения $z^m-1=0$ отвечают вершинам с чётными номерами, а корни уравнения $z^m+1=0$ — вершинам с нечётными номерами. Тогда сумма $z_k+\bar{z}_k$ находится из возвратного уравнения $z^m+1=0$.

Рассмотрим примеры.

Если $n=5$, то уравнение (10.3) имеет вид: $(z^2+\bar{z}^2)+(z+\bar{z})+1=0$, или $u^2+u-1=0$, откуда $u_{1,2}=-\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{5})$. Но $u_k=z_k+\bar{z}_k=2\cos\frac{2k\pi}{n}$, и $u_1=z_1+\bar{z}_1=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$, $u_2=z_2+\bar{z}_2=2\cos\frac{4\pi}{5}<0$, а значит, $u_1=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ и $u_2=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Поэтому $|A_0A_1|=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $|A_0A_2|=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Если $n=12$, то $z^6+1=0$, или $z^3+\bar{z}^3=0$, откуда $u^3-3u=0$, и $u_1=\sqrt{3}$, $u_3=0$, $u_5=-\sqrt{3}$. Значит, $A_0A_1=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $A_0A_3=\sqrt{2}$, $A_0A_5=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Уравнение $z^6-1=0$ равносильно уравнению $(z-1)(z+1)\times(z^2+z+1)(z^2-z+1)=0$. Очевидно, корням $z=1$ и $z=-1$ соответствуют вершины A_0 и A_6. Уравнение $z^2-z+1=0$ даёт $z+\bar{z}=1$, и поэтому $A_0A_2=1$, а из уравнения $z^2+z+1=0$ получаем $z+\bar{z}=-1$. Значит, $A_0A_4=\sqrt{3}$.

Задача 1. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки P плоскости до вершин правильного n-угольника $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ равна $n(R^2+d^2)$, где R — радиус описанной окружности, d — расстояние от точки P до её центра.

■ Пусть $R=1$ и точке P соответствует комплексное число p. Тогда $p\bar{p}=d^2$ и

$$PA_0^2+PA_1^2+\ldots+PA_{n-1}^2=(1-p)(1-\bar{p})+(z-p)(\bar{z}-\bar{p})+(z^2-p)(\bar{z}^2-\bar{p})+\ldots$$
$$\ldots+(z^{n-1}-p)(\bar{z}^{n-1}-\bar{p})=1+np\bar{p}+z\bar{z}+(z\bar{z})^2+\ldots$$
$$\ldots+(z\bar{z})^{n-1}-\bar{p}(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})-p(1+\bar{z}+\bar{z}^2+\ldots+\bar{z}^{n-1})=$$
$$=1+nd^2+(n-1)=n(1+d^2)=n(R^2+d^2),$$

так как $z\bar{z}=1$ и $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=0$. ■

Следствие. Если точка P принадлежит описанной окружности, то рассматриваемая сумма равна $2nR^2$.

Задача 2. Доказать, что сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного n-угольника равна n^2R^2.

■ Пусть $R=1$. Число отрезков, соединяющих одну вершину многоугольника со всеми оставшимися в $\frac{n}{2}$ раз меньше числа всех сторон и диагоналей. Поскольку все вершины равноправны, рассматриваемая сумма равна

$$(A_0A_1^2+A_0A_2^2+\ldots+A_0A_{n-1}^2)\frac{n}{2}=$$

$$=\frac{n}{2}((z-1)(\bar{z}-1)+(z^2-1)(\bar{z}^2-1)+\ldots+(z^{n-1}-1)(\bar{z}^{n-1}-1))=$$

$$=\frac{n}{2}((z-1)(z^{n-1}-1)+(z^2-1)(z^{n-2}-1)+\ldots+(z^{n-1}-1)(z-1))=$$

$$=\frac{n}{2}(2(n-1)-2(z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}))=\frac{n}{2}(2(n-1)+2)=n^2=n^2R^2.$$ ■

Задача 3. Доказать, что длина стороны правильного девятиугольника равна разности длин его наибольшей и наименьшей диагоналей.

■ Предстоит убедиться в том, что

$$|z-1|=|z^4-1|-|z^2-1|.$$

Итак, $z^9-1=0$, а значит, $(z^3-1)(z^6+z^3+1)=0$. Из равенства $z^6+z^3+1=0$ получаем $1+z^3=-z^6$. Заметим, что

$$|z^4-1|-|z^2-1|=|z^4-1|-|z^3-z|.$$

Так как векторы, соответствующие комплексным числам z^4-1 и z^3-z, сонаправлены, разность их модулей равна модулю разности:

$$|z^4-1|-|z^2-1|=|z^4-1-z^3+z|=|(1+z^3)(z-1)|=|-z^6(z-1)|=|z-1|.$$ ■

Задача 4. Доказать, что в правильном двенадцатиугольнике $A_0A_1\ldots A_{11}$

$$A_0A_1+A_0A_3=2r,$$

где r — радиус вписанной окружности.

■ Из равенства $z^{12}-1=0$ следует, что $z^6+1=0$, откуда $z^4-z^2+1=0$. Значит,

$$A_0A_1+A_0A_3=|z-1|+|z^3-1|=|z^2-z|+|z^3-1|=|z^2-z+z^3-1|=$$
$$=|(z^2-1)(z+1)|=|z^4|\cdot|z+1|=|z+1|.$$

Числу $z+1$ соответствует сумма векторов $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}$, модуль которой, очевидно, равен $2r$. Здесь при преобразованиях использован тот же приём умножения на z ($|z|=1$) с целью получить комплексные числа z^2-z и z^3-1, отвечающие сонаправленным векторам. ■

З а д а ч а 5. Доказать, что в правильном пятнадцатиугольнике $A_0A_1 \ldots A_{14}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{A_0A_1}=\frac{1}{A_0A_2}+\frac{1}{A_0A_4}+\frac{1}{A_0A_7}.$$

■ Доказываемое равенство эквивалентно такому:

$$\frac{1}{|z-1|}-\frac{1}{|z^7-1|}=\frac{1}{|z^2-1|}+\frac{1}{|z^4-1|},$$

или

$$\frac{|z^7-1|-|z-1|}{|z-1|\cdot|z^7-1|}=\frac{|z^4-1|+|z^2-1|}{|z^2-1|\cdot|z^4-1|},$$

или

$$\frac{|z^7-1|-|z^4-z^3|}{|z-1|\cdot|z^7-1|}=\frac{|z^4-1|+|z^3-z|}{|z^2-1|\cdot|z^4-1|}.$$

Далее, используя коллинеарность векторов, преобразуем его, как в предыдущих задачах:

$$\frac{|z^7-1-z^4+z^3|}{|z-1|\cdot|z^7-1|}=\frac{|z^4-1+z^3-z|}{|z^2-1|\cdot|z^4-1|},$$

$$\frac{|z^4+1|\cdot|z^3-1|}{|z-1|\cdot|z^7-1|}=\frac{|z^3-1|\cdot|z+1|}{|z^2-1|\cdot|z^4-1|}.$$

После сокращений получаем:

$$\frac{|z^4+1|}{|z^7-1|}=\frac{1}{|z^4-1|}, \quad \text{или} \quad |z^8-1|=|z^7-1|.$$

А это верно, поскольку в правильном пятнадцатиугольнике равны A_0A_7 и A_0A_8. ■

З а д а ч а 6. В окружность вписан правильный многоугольник $A_0A_1 \ldots A_{2n}$ с нечётным числом вершин. Доказать, что знакопеременная сумма расстояний от центра окружности до стороны A_0A_1 и до диагоналей $A_0A_2, A_0A_3, \ldots, A_0A_n$ равна половине радиуса окружности.

■ Р е ш е н и е 1. Расстояние от центра до хорды A_0A_k равно $\frac{1}{2}|1+z^k|$. Считаем окружность единичной: $z\bar{z}=1$. Следует доказать, что

$$\frac{1}{2}|1+z|-\frac{1}{2}|1+z^2|+\frac{1}{2}|1+z^3|-\ldots+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}|1+z^n|=\frac{1}{2},$$

или

$$S=|1+z|-|1+z^2|+|1+z^3|-\ldots+(-1)^{n+1}|1+z^n|=1.$$

Возьмём комплексное число α такое, что $\alpha^2=z$. Тогда $|\alpha|=|z|=1$, а значит,

$$S=|1+z|\cdot|\overline{\alpha}|-|1+z^2|\cdot|\overline{\alpha}^2|+|1+z^3|\cdot|\overline{\alpha}^3|-\ldots+(-1)^{n+1}|1+z^n|\cdot|\overline{\alpha}^n|.$$

Числа $(1+z^k)\overline{\alpha}^k$ являются действительными и положительными, так как $\arg(1+z^k)\overline{\alpha}^k=\arg(1+z^k)+\arg\overline{\alpha}^k=\dfrac{k}{2}\arg z-k\arg\alpha=k\left(\dfrac{1}{2}\arg z-\arg\alpha\right)=$ $=0$. На этом основании знаки модулей можно опустить:

$$S=(\overline{\alpha}-\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}^3-\ldots+(-1)^{n+1}\overline{\alpha}^n)+(z\overline{\alpha}-z^2\overline{\alpha}^2+z^3\overline{\alpha}^3-\ldots+(-1)^{n+1}z^n\overline{\alpha}^n).$$

В каждой из скобок слагаемые являются членами геометрических прогрессий со знаменателями $-\overline{\alpha}$ и $-z\overline{\alpha}$ соответственно. Поэтому, учитывая, что $z=\alpha^2$ и $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$, находим:

$$S=\frac{\overline{\alpha}(1-(-\overline{\alpha})^n)}{1+\overline{\alpha}}+\frac{z\overline{\alpha}(1-(-z\overline{\alpha})^n)}{1+z\overline{\alpha}}=\frac{\alpha^n+(-1)^{n+1}}{(1+\alpha)\alpha^n}+$$
$$+\frac{\alpha+(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}}{1+\alpha}=\frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha)+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\alpha^{n+1}\right)\right).$$

Из равенства $z^{2n+1}=1$ следует, что $\alpha^{4n+2}=1$, а также, что $\alpha^{2n+1}=-1$. Следовательно, $\dfrac{1}{\alpha^n}+\alpha^{n+1}=0$, и $S=1$. ■

■ Р е ш е н и е 2. Указанные в условии задачи расстояния равны, соответственно, $R\cos\dfrac{\pi}{2n+1}$, $R\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}$, $R\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}$, ..., $R\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}$. Тогда интересующая нас сумма S равна

$$R\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}-\ldots+(-1)^{n-1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

Рассмотрим комплексное число $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{\pi}{2n+1}$. Используя формулу (7.3) для косинуса и учитывая, что $|\alpha|=1$, получим:

$$S=R\left(\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}-\frac{\alpha^4+1}{2\alpha^2}+\frac{\alpha^6+1}{2\alpha^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^{2n}+1}{2\alpha^n}\right)=$$
$$=\frac{R}{2}\left((\alpha-\alpha^2+\alpha^3-\ldots+(-1)^{n-1}\alpha^n)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha^n}\right)\right)=$$
$$=\frac{R}{2}\left(\frac{\alpha(1-(-\alpha)^n)}{1+\alpha}+\frac{\frac{1}{\alpha}\left(1-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{\alpha}}\right)=\frac{R}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)\alpha^n+(-1)^{n+1}(\alpha^{2n+1}+1)}{(1+\alpha)\alpha^n}.$$

Но $\alpha^{2n+1}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, следовательно $S=R/2$. ■

Задачи

2.20. Зная радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, вычислите длину стороны и длины всех его диагоналей для $n=8$, 10.

2.21. Докажите, что для любой точки P окружности радиуса R, вписанного в квадрат $ABCD$ имеет место равенство

$$PA^2 \cdot PC^2 + PB^2 \cdot PD^2 = 10R^4.$$

2.22. Докажите, что сумма четвёртых степеней расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в неё квадрата постоянна.

2.23. Даны правильный n-угольник $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ с центром O и точка M. Докажите, что

$$MA_0^4 + MA_1^4 + \ldots + MA_{n-1}^4 = n(OM^4 + 4R^2 \cdot OM^2 + R^4).$$

2.24. Докажите, что апофема правильного девятиугольника равна сумме расстояний от центра до наибольшей и наименьшей его диагоналей.

2.25. Докажите, что в правильном пятнадцатиугольнике $A_0A_1\ldots A_{14}$

$$A_0A_1 = A_0A_6 - A_0A_4.$$

2.26. Докажите, что в правильном семиугольнике $A_0A_1\ldots A_6$

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}.$$

2.27. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного многоугольника до любой прямой, содержащей его центр, не зависит от выбора прямой.

2.28. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N — середины сторон CD и DE. Найдите угол между прямыми AM и BN.

2.29. На сторонах произвольного центрально-симметричного шестиугольника во внешнюю область построены правильные треугольники. Докажите, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников являются вершинами правильного шестиугольника.

2.30. Дан треугольник ABC, в котором $AB=AC$ и $\widehat{BAC}=45^\circ$. Докажите, что середины его сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, являются вершинами правильного восьмиугольника.

2.31. В окружность радиуса R вписан правильный 26-угольник $A_0A_1\ldots A_{25}$. Построены точки, симметричные центру окружности относительно хорд A_0A_{24} и A_1A_5. Докажите, что расстояние между полученными точками равно $R\sqrt{3}$.

2.32. Точки $A_0, A_1, \ldots, A_{41}$ делят окружность на 42 равные части. Докажите, что $A'_3A'_6 = A'_7A'_9$, где A'_k — ортогональная проекция точки A_k на диаметр A_0A_{21}.

2.33. На сторонах шестиугольника во внешнюю (или во внутреннюю) область построены правильные треугольники. Третьи вершины этих треугольников образуют второй шестиугольник, на сторонах которого построены во внутреннюю (внешнюю) область правильные треугольники. Докажите, что центры последних треугольников являются вершинами двух правильных треугольников.

2.34. Дан прямоугольный треугольник ABC. Найдите такую точку M, чтобы она была центроидом для треугольника, вершины которого совпадают с проекциями точки M на стороны треугольника. Решите задачу для произвольного треугольника.

Задачи к главе 2

2.35. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O, $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Докажите, что середины отрезков OA, OD, BC являются вершинами правильного треугольника.

2.36. На диаметре AB окружности построен правильный треугольник ABC. Точка D делит диаметр AB в отношении 1:2. Прямая CD пересекает полуокружность, лежащую вне треугольника ABC, в точке E. Докажите, что отрезок AE является стороной правильного вписанного в данную окружность шестиугольника, а отрезок BE — стороной правильного вписанного в неё треугольника.

2.37. Пусть d — диаметр окружности, a_n и b_n — стороны вписанного в неё и описанного около неё правильных n-угольников. Докажите, что

$$b_{2n} = d^2\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right).$$

2.38. На сторонах произвольного треугольника ABC построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1 так, что вершины A и A_1, B и B_1 расположены по разные стороны от BC и CA соответственно, а C и C_1 — по одну сторону от AB. Точка M — центроид треугольника ABC_1. Докажите, что треугольник A_1B_1M — равнобедренный с углом 120° при вершине.

2.39. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACM и BCN. Докажите, что треугольник с вершинами в середине стороны AB, в точке M и в центроиде треугольника BCN имеет углы, не зависящие от углов треугольника ABC.

2.40. На сторонах четырёхугольника $ABCD$ построены одинаково ориентированные прямоугольные равнобедренные треугольники

ABM, BCN, CDP, DAQ. Докажите, что середины отрезков MP и NQ и середины диагоналей четырёхугольника являются вершинами квадрата.

2.41. На сторонах AB и CD произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены одинаково ориентированные квадраты $ABMN$ и $CDKL$. Докажите, что середины диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $MNKL$ являются вершинами квадрата (или совпадают).

2.42. Даны подобные одинаково ориентированные многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$. Докажите, что точки, делящие отрезки A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_nB_n в одном и том же отношении, служат вершинами многоугольника, подобного данным.

2.43. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом при вершине C, равным 80°, выбраны точки D и E так, что $\widehat{DAB} = \widehat{ABE} = 10^\circ$, $\widehat{EAB} = 20^\circ$, $\widehat{DBA} = 30^\circ$. Докажите, что $\widehat{DCB} = 10^\circ$ и $\widehat{ECA} = 20^\circ$.

2.44. Стороны треугольника ABC разделены в одном и том же отношении λ в порядке обхода его периметра. Стороны полученного треугольника $A_1B_1C_1$ разделены в том же отношении λ при обходе в противоположную сторону. Докажите, что третий полученный треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен данному треугольнику ABC.

Глава 3

ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ

§ 11. Геометрический смысл уравнения $az+b\overline{z}+c=0$

11.1. Сопряжённые комплексные координаты. Уравнение прямой. Из равенств $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$ однозначно выражаются декартовы координаты x и y точки M через комплексные числа z и $\overline{z}$:

$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad y=-\frac{i}{2}(z-\overline{z}). \qquad (11.1)$$

Комплексные числа z и $\overline{z}$ называют *сопряжёнными комплексными координатами точки* M. Не случайно во многих предыдущих формулах наряду с z участвует и $\overline{z}$.

Формулы (11.1) позволяют осуществить переход от уравнения геометрической фигуры в декартовых координатах к её уравнению в сопряжённых комплексных координатах. Однако непосредственное рассмотрение уравнений в сопряжённых комплексных координатах более поучительно с точки зрения метода комплексных чисел.

Зададимся целью найти множество точек плоскости, заданное уравнением

$$az+b\overline{z}+c=0, \qquad (11.2)$$

в котором хотя бы один их коэффициентов a и b отличен от нуля. Сначала рассмотрим случай, когда $c=0$. Тогда имеем систему относительно z и $\overline{z}$:

$$\begin{cases} az+b\overline{z}=0, \\ \overline{b}z+\overline{a}\overline{z}=0, \end{cases}$$

второе уравнение которой получается из первого путём перехода к сопряжённым числам. Уравнивая коэффициенты при $\overline{z}$ и вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$(a\overline{a}-b\overline{b})z=0.$$

Если $a\overline{a}\neq b\overline{b}$, т. е. $|a|\neq|b|$, то решением полученного уравнения будет единственное число $z=0$, являющееся и решением исходного уравнения $az+b\overline{z}=0$. При $a\overline{a}=b\overline{b}$ уравнение $az+b\overline{z}=0$ запишем в виде

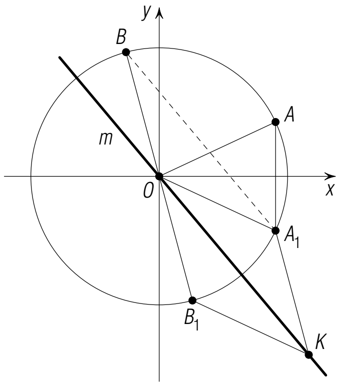

Рис. 27

$z = -\dfrac{b}{a}\overline{z}$, откуда $\arg z = \arg\left(-\dfrac{b}{a}\right) + {} + \arg\overline{z}$ и $\arg z = \dfrac{1}{2}\arg\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Очевидно, этому условию удовлетворяет каждая точка луча с началом в нулевой точке и углом $\alpha = \dfrac{1}{2}\arg\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ наклона к действительной оси. Кроме того, уравнению $az + b\overline{z} = 0$ числа z и $-z$ удовлетворяют или не удовлетворяют одновременно.

Итак, уравнением

$$az + b\overline{z} = 0, \quad a\overline{a} = b\overline{b}, \tag{11.3}$$

задаётся прямая m, содержащая нулевую точку плоскости.

Эту прямую легко построить, если заметить, что на ней лежит точка $K(\overline{a} - b)$ (рис. 27), $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, $A_1(\overline{a})$, $B_1(-b)$. Можно обойтись и без построения точки K, если учесть, что прямая m параллельна прямой BA_1, поскольку $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{BA_1}$ (они имеют одну и ту же координату $\overline{a} - b$). В случае, когда $b = \overline{a}$ ($a = \overline{b}$), уравнение $az + b\overline{z} = 0$ принимает вид $\overline{b}z + b\overline{z} = 0$, и имеет корень $z = bi$. Поэтому задаваемая им прямая перпендикулярна прямой OB.

Пусть теперь $c \neq 0$. Свободный член уравнения (11.2) всегда можно сделать действительным числом путём умножения уравнения на $\overline{c}$. Поэтому сразу полагаем $c = \overline{c} \neq 0$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} az + b\overline{z} + c = 0, \\ \overline{b}z + \overline{a}\overline{z} + c = 0, \end{cases}$$

из которой получаем:

$$(a - \overline{b})z + (b - \overline{a})\overline{z} = 0.$$

Рассмотрим возможные случаи.

Если $a \neq \overline{b}$, то $\overline{z} = \dfrac{a - \overline{b}}{\overline{a} - b}z$, и подстановкой в исходное уравнение получаем:

$$az + \frac{b(a - \overline{b})}{\overline{a} - b}z + c = 0,$$

или

$$(a\overline{a} - b\overline{b})z + c(\overline{a} - b) = 0.$$

При $|a| \neq |b|$ его решение единственно: $z = \dfrac{c(b - \overline{a})}{a\overline{a} - b\overline{b}}$, а при $|a| = |b|$ ($c \neq 0$, $a \neq \overline{b}$) решений нет.

Если $a=\overline{b}$, то $a\overline{a}=b\overline{b}$, т. е. $|a|=|b|$. В этом случае уравнением (11.2) при $c=\overline{c}$ задаётся *прямая*. В самом деле, возьмём точку $Q\left(-\dfrac{c}{2a}\right)$ и радиус-вектор $\overrightarrow{OB}$ точки $B(b)$ и рассмотрим множество точек $M(z)$, для каждой из которых $MQ\perp OB$:

$$\left(z+\frac{c}{2a}\right)\overline{b}+\left(\overline{z}+\frac{\overline{c}}{2\overline{a}}\right)b=0. \tag{11.4}$$

Очевидно, это множество есть прямая. При $a=\overline{b}$ и $c=\overline{c}$ уравнение (11.4) эквивалентно уравнению (11.2).

Таким образом, при $a=\overline{b}$ и $c=\overline{c}$ уравнение (11.2) есть уравнение прямой, которая проходит через точку $Q\left(-\dfrac{c}{2a}\right)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OB}(b)$.

Наконец, остался случай, когда $a=\overline{b}$, но $c\neq\overline{c}$. Тогда система

$$\begin{cases} az+b\overline{z}+c=0,\\ \overline{b}z+\overline{a}\overline{z}+\overline{c}=0 \end{cases}$$

приводит к противоречию: $c=\overline{c}$.

Подведём итоги. Уравнением $az+b\overline{z}+c=0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля, задаётся

1) *прямая при* $|a|=|b|$, $c=0$, *а также при* $a=\overline{b}$, $c=\overline{c}$,

2) единственная точка при $|a|\neq|b|$,

3) пустое множество в иных случаях (т. е. при $|a|=|b|$, $c\neq0$, $a\neq\overline{b}$, а также при $a=\overline{b}$, $c\neq\overline{c}$).

11.2. Приведённое уравнение прямой. Возвратимся снова к системе

$$\begin{cases} az+b\overline{z}+c=0,\\ \overline{b}z+\overline{a}\overline{z}+\overline{c}=0, \end{cases}$$

не налагая ограничений на коэффициенты a, b, c, кроме единственного, чтобы коэффициенты a и b не обращались в нуль одновременно. Уравнивая коэффициенты при $\overline{z}$, приходим к уравнению:

$$(a\overline{a}-b\overline{b})z=b\overline{c}-\overline{a}c,$$

которое а) имеет единственное решение при $a\overline{a}\neq b\overline{b}$, б) имеет бесконечное множество решений при $a\overline{a}=b\overline{b}$ и $b\overline{c}=\overline{a}c$.

Отсюда и на основании итога предыдущего исследования получаем, что уравнение $az+b\overline{z}+c=0$ определяет а) единственную точку при $a\overline{a}\neq b\overline{b}$, б) прямую при $a\overline{a}=b\overline{b}$ и $b\overline{c}=\overline{a}c$, в) пустое множество при $a\overline{a}=b\overline{b}$ и $b\overline{c}\neq\overline{a}c$.

Уравнение

$$\overline{u}z+u\overline{z}+v=0,\quad v=\overline{v}, \tag{11.5}$$

удовлетворяет условиям б), поэтому является уравнением прямой в сопряжённых комплексных координатах. Оно называется *приведённым уравнением прямой*.

Именно такой вид имеет уравнение (3.16). Уравнение (3.9) прямой по двум её точкам станет приведённым, если его умножить на i. Для уравнения (3.12) эта цель достигается умножением на $\overline{a}+\overline{b}$.

Чтобы уравнение $az+b\overline{z}+c=0$ ($a\overline{a}=b\overline{b}$, $b\overline{c}=\overline{a}c$) прямой преобразовать к приведённому виду (11.5), достаточно умножить его на $\overline{c}\neq 0$.

Особый случай представляет собой уравнение $az+b\overline{z}=0$ ($a\overline{a}=b\overline{b}$) прямой, проходящей через нулевую точку плоскости. Оно равносильно уравнению

$$(a+\overline{b})z+(\overline{a}+b)\overline{z}=0, \quad a+\overline{b}\neq 0. \tag{11.6}$$

В самом деле, сложение уравнений $az+b\overline{z}=0$ и $\overline{az}+\overline{b}z=0$ даёт (11.6). Для проведения обратного преобразования умножим (11.6) на $a\overline{a}=b\overline{b}$:

$$a(a\overline{a}+\overline{a}\overline{b})z+b(\overline{a}b+b\overline{b})\overline{z}=0,$$

или

$$az+b\overline{z}=0.$$

При $a+\overline{b}=0$ уравнение $az+b\overline{z}=0$ принимает вид $-\overline{b}z+b\overline{z}=0$, что эквивалентно $\overline{b}iz-bi\overline{z}=0$. А это уравнение — приведённое.

§ 12. Две прямые. Расстояние от точки до прямой

12.1. Угол между прямыми. Пусть прямая m задана приведённым уравнением $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$, $b=\overline{b}$. Поскольку она перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OA}(a)$ (§ 11), вектор $\overrightarrow{OP}(ai)$ ей параллелен (рис. 28). Следовательно, ориентированный угол от оси Ox до прямой m равен аргументу числа ai:

$$\varphi=\arg ai=\frac{\pi}{2}+\arg a. \tag{12.1}$$

Положительно ориентированный угол θ от прямой $\overline{a}_1z+a_1\overline{z}+b_1=0$ до прямой $\overline{a}_2z+a_2\overline{z}+b_2=0$ равен углу между их направляющими векторами a_1i и a_2i. Согласно формуле (7.1),

$$\theta=\arg\frac{a_2i}{a_1i}=\arg\frac{a_2}{a_1}. \tag{12.2}$$

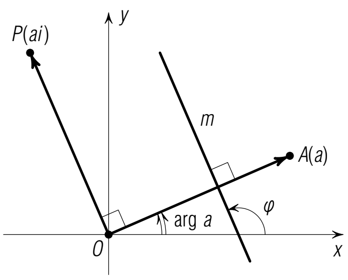

Рис. 28

Формулы (12.1) и (12.2) позволяют находить соответствующие углы с точностью до слагаемого π.

12.2. Критерии перпендикулярности и параллельности двух прямых. Из формулы (12.2) вытекают критерий перпендикулярности и критерий параллельности прямых m_1 и m_2. В самом деле,

$$\theta=\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} \text{ — чисто мнимое число.}$$

Это значит, что

$$m_1 \perp m_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_2}{a_1}=-\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1},$$

или

$$m_1 \perp m_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{\overline{a}_1}=-\frac{a_2}{\overline{a}_2}. \tag{12.3}$$

При $\theta=0$ или $\theta=\pi$ получаем:

$$m_1 \| m_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_2}. \tag{12.4}$$

Если прямая $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$ проходит через точку $M_0(z_0)$, то $\overline{a}z_0+a\overline{z}_0+b=0$, и уравнение можно записать в виде

$$\overline{a}(z-z_0)+a(\overline{z}-\overline{z}_0)=0. \tag{12.5}$$

В силу условия (12.3) перпендикулярности для прямой, перпендикулярной данной, коэффициентами при z и $\overline{z}$ будут, соответственно, числа a и $-\overline{a}$. Поэтому на основании уравнения (12.5) получаем уравнение

$$\overline{a}(z-z_0)-a(\overline{z}-\overline{z}_0)=0 \tag{12.6}$$

прямой, проходящей через точку $M_0(z_0)$ перпендикулярно прямой $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$.

12.3. Расстояние от точки до прямой. Решение системы

$$\begin{cases} \overline{a}z+a\overline{z}+b=0, \\ \overline{a}(z-z_0)-a(\overline{z}-\overline{z}_0)=0 \end{cases}$$

даёт координату

$$z_1=\frac{\overline{a}z_0-a\overline{z}_0-b}{2\overline{a}} \tag{12.7}$$

основания M_1 перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(z_0)$ на прямую $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$.

Расстояние d от точки M_0 до этой прямой равно $|M_0M_1|$, т. е.

$$d=|z_1-z_0|=\frac{|\overline{a}z_0+a\overline{z}_0+b|}{2|a|}. \tag{12.8}$$

Критерий принадлежности трёх прямых

$$\overline{a}_1z+a_1\overline{z}+b_1=0, \quad \overline{a}_2z+a_2\overline{z}+b_2=0, \quad \overline{a}_3z+a_3\overline{z}+b_3=0$$

одному пучку (пересекающихся или параллельных) прямых заключа-

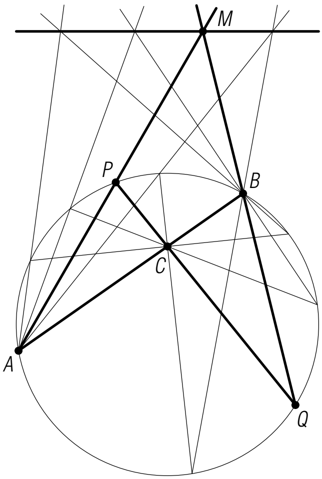

Рис. 29

ется в выполнении равенства

$$\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a}_1 & b_1 \\ a_2 & \overline{a}_2 & b_2 \\ a_3 & \overline{a}_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.9}$$

Доказательство опускаем.

Задача 1. Хорды AB и PQ окружности пересекаются в точке C. Найти множество точек M пересечения всевозможных прямых AP и BQ, если точки A, B, C постоянны, а точки P и Q пробегают данную окружность (рис. 29).

■ Пусть z — координата произвольной точки M искомого множества и данная окружность принята за единичную $z\overline{z}=1$. Согласно (3.8),

$$c+\overline{c}ab=a+b, \quad c+\overline{c}pq=p+q,$$
$$z+\overline{z}ap=a+p, \quad z+\overline{z}bq=b+q,$$

откуда $p=\dfrac{z-a}{1-a\overline{z}}$, $q=\dfrac{z-b}{1-b\overline{z}}$. Подставляя эти выражения во второе равенство, получаем:

$$c+\frac{(z-a)(z-b)\overline{c}}{(1-a\overline{z})(1-b\overline{z})}=\frac{z-a}{1-a\overline{z}}+\frac{z-b}{1-b\overline{z}},$$

или

$$c(1-a\overline{z})(1-b\overline{z})+\overline{c}(z-a)(z-b)=(z-a)(1-b\overline{z})+(z-b)(1-a\overline{z}).$$

Используя равенство $c+\overline{c}ab=a+b$, полученному уравнению можно придать вид

$$(z+ab\overline{z}-a-b)(\overline{c}z+c\overline{z}-2)=0$$

Теперь ясно, что искомое множество точек представляет собой пару прямых, одной из которых является прямая AB, а другая задаётся уравнением

$$\overline{c}z+c\overline{z}-2=0. \tag{12.10}$$

Как мы видим, эта прямая не зависит от хорды AB, а определяется лишь окружностью и точкой C. Она называется *полярой* точки C относительно окружности $z\overline{z}=1$. Полярам посвящён § 16.

Задача 2. Найти углы, которые образует прямая Эйлера OH треугольника ABC с его сторонами, если заданы комплексные координаты a, b, c его вершин.

■ Окружность, описанную около треугольника ABC, принимаем за единичную. Ортоцентр H треугольника ABC имеет координату $h=$ $=a+b+c$. Прямые OH и AB имеют уравнения $h\overline{z}=\overline{h}z$ и $z+ab\overline{z}=a+b$

соответственно. Нам требуются их приведённые формы

$$i\bar{h}z - ih\bar{z} = 0,$$
$$(\bar{a}+\bar{b})z + (a+b)\bar{z} - (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = 0.$$

По формуле (12.2),

$$(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AB}}) = \arg \frac{a+b}{-ih} = \arg \frac{i(a+b)}{a+b+c} = \frac{\pi}{2} + \arg \frac{a+b}{a+b+c}. \qquad \blacksquare$$

З а д а ч а 3. Около окружности описан квадрат $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортогональные проекции его вершин A, B, C, D соответственно на произвольную касательную к окружности. Доказать, что

$$AA_1 \cdot CC_1 = BB_1 \cdot DD_1.$$

■ Радиус окружности примем за единицу длины. Систему координат выберем так, чтобы точки касания сторон AB, BC, CD, DA с окружностью имели координаты i, -1, $-i$, 1 соответственно. Тогда вершины A, B, C, D будут иметь координаты $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Касательная к окружности в её произвольной точке $P(p)$ имеет уравнение $\bar{p}z + p\bar{z} - 2 = 0$, $p\bar{p} = 1$. Руководствуясь формулой (12.8), находим:

$$|AA_1| \cdot |CC_1| = \frac{1}{2}|\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2| \cdot \frac{1}{2}|\bar{p}(-1-i) + p(-1+i) - 2| =$$
$$= \frac{1}{4}|(\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2)(\bar{p}(1+i) + p(1-i) + 2)| =$$
$$= \frac{1}{4}|\bar{p}^2(1+i)^2 + p^2(1-i)^2| = \frac{1}{2}|\bar{p}^2 - p^2|.$$

Аналогично получаем:

$$|BB_1| \cdot |DD_1| = \frac{1}{4}|\bar{p}^2(-1+i)^2 + p^2(-1-i)^2| = \frac{1}{2}|-\bar{p}^2 + p^2| = \frac{1}{2}|\bar{p}^2 - p^2|. \quad \blacksquare$$

З а д а ч а 4. Вершины A и B прямоугольного равнобедренного треугольника ABC спроецированы параллельно некоторой прямой l на прямую, проходящую через вершину C прямого угла, в точки A_1 и B_1 соответственно. Доказать, что сумма $CA_1^2 + CB_1^2$ зависит только от угла между этими двумя прямыми и длины гипотенузы AB.

■ Примем ось проекций за действительную ось Ox, а вершину C — за начало O. Прямую l проведём через O и зададим принадлежащей ей точкой $P(p)$, $|p| = 1$. Её уравнение имеет вид $\bar{p}z = p\bar{z}$. Если вершина A имеет координату a, $|a| = r$, то вершине B соответствует число ai (рис. 30). Тогда

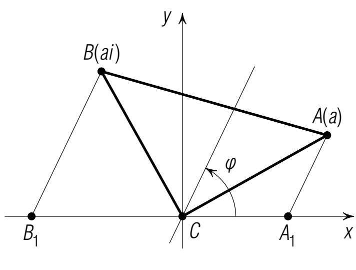

Рис. 30

5—7685.—Я. П. Понарин.

прямым AA_1 и BB_1 соответствуют уравнения

$$\overline{p}(z-a)=p(\overline{z}-\overline{a}) \quad \text{и} \quad \overline{p}(z-ai)=p(\overline{z}+\overline{a}i).$$

Для точек, лежащих на оси Ox проекций, $z=\overline{z}$. Подстановкой в предыдущие уравнения получаем координаты точек A_1 и B_1:

$$a_1=\frac{\overline{p}a-p\overline{a}}{\overline{p}-p}, \quad b_1=\frac{i(\overline{p}a+p\overline{a})}{\overline{p}-p}.$$

Находим:

$$CA_1^2+CB_1^2=a_1\overline{a}_1+b_1\overline{b}_1=a_1^2+b_1^2=$$

$$=\frac{(\overline{p}a-p\overline{a})^2-(\overline{p}a+p\overline{a})^2}{(\overline{p}-p)^2}=\frac{-4p\overline{p}a\overline{a}}{(-2i\sin\varphi)^2}=\frac{r^2}{\sin^2\varphi},$$

где $\varphi=\arg p$ — указанный в условии задачи угол. ■

Задача 5. Через центроид треугольника ABC проведена произвольная прямая, не пересекающая сторону AB. Доказать, что расстояние от вершины C до этой прямой равно сумме расстояний от неё до вершин A и B.

■ Примем центроид треугольника ABC за нулевую точку плоскости, тогда $a+b+c=0$. Если A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции вершин A, B, C на прямую $\overline{p}z+p\overline{z}=0$, $|p|=1$, то следует доказать, что $CC_1=AA_1+BB_1$. Использование формулы (12.8) приводит это равенство к такому:

$$|\overline{p}c+p\overline{c}|=|\overline{p}a+p\overline{a}|+|\overline{p}b+p\overline{b}|.$$

Поскольку $c=-a-b$, то надо убедиться в том, что

$$|(\overline{p}a+p\overline{a})+(\overline{p}b+p\overline{b})|=|\overline{p}a+p\overline{a}|+|\overline{p}b+p\overline{b}|.$$

Так как точки A и B находятся в одной полуплоскости от выбранной прямой $\overline{p}z+p\overline{z}=0$, действительные числа $\overline{p}a+p\overline{a}$ и $\overline{p}b+p\overline{b}$ имеют одинаковые знаки. Действительно, если декартову уравнению прямой $ux+vy+w=0$ соответствует уравнение $\overline{p}z+p\overline{z}+q=0$, $q=\overline{q}$ в комплексных числах, то неравенствам $ux+vy+w>0$ и $ux+vy+w<0$, определяющим полуплоскости с общей границей $ux+vy+w=0$, соответствуют неравенства $\overline{p}z+p\overline{z}+q>0$ и $\overline{p}z+p\overline{z}+q<0$. ■

Задачи

3.1. Найдите угол наклона прямой $(1+\sqrt{3}i)z+(1-\sqrt{3}i)\overline{z}-3=0$ к действительной оси.

3.2. Составьте в комплексных сопряжённых координатах уравнение прямой, которая проходит через начало координат под углом 135° к действительной оси.

3.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3-5i)$ параллельно прямой $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-7=0$.

3.4. Составьте уравнение прямой, которая содержит точку $M(4-3i)$ и перпендикулярна прямой $(5+2i)z+(5-2i)\overline{z}+20=0$.

3.5. Составьте уравнения прямых, содержащих высоты треугольника, если его стороны принадлежат прямым

$$(1+i)z+(1-i)\overline{z}-12=0,$$
$$(3-5i)z+(3+5i)\overline{z}+28=0,$$
$$(5-3i)z+(5+3i)\overline{z}-28=0.$$

3.6. Вычислите угол между прямыми $(3+5i)z+(3-5i)\overline{z}+7=0$ и $(10-6i)z+(10+6i)\overline{z}-3=0$.

3.7. Найдите расстояние от точки $P(2+i)$ до прямой $z+i\overline{z}=0$.

3.8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5+i)$ и образующей с прямой $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-4=0$ угол 45°.

3.9. Через ортоцентр треугольника проведена прямая. Докажите, что прямые, симметричные этой прямой относительно сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности.

3.10. Точка C_1 является образом вершины C треугольника ABC при повороте на угол 90° вокруг точки A, а точка C_2 — образом той же вершины C при повороте на угол -90° вокруг точки B. Докажите, что прямые AC_2 и BC_1 пересекаются на прямой, которая содержит высоту треугольника, опущенную из вершины C.

3.11. Через произвольную точку M секущей AB окружности с центром O перпендикулярно OM проведена прямая. Эта прямая пересекает касательные к окружности в точках A и B, соответственно, в точках P и Q. Докажите, что M — середина отрезка PQ.

3.12. Найдите множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B постоянна.

3.13. В плоскости даны два отрезка AB и CD. Найдите множество точек M, для каждой из которых площади треугольников MAB и MDC равны.

3.14. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMNP$, причём точка M лежит на отрезке AB, а P — на отрезке AD. Докажите, что прямые MD, BP, NC пересекаются в одной точке.

3.15. В окружность вписан треугольник ABC. Касательные к окружности в его вершинах образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что произведение расстояний от любой точки окружности до сторон одного треугольника равно произведению расстояний от этой же точки до сторон другого треугольника.

3.16. В вершине C треугольника ABC проведена касательная к окружности, описанной около треугольника. Докажите, что произведение расстояний от любой точки окружности до касательной и стороны AB равно произведению расстояний от этой же точки до двух других сторон треугольника.

5*—7685.—Я. П. Понарин.

§ 13. Двойное отношение четырёх точек плоскости

13.1. Определение и свойства двойного отношения. На плоскости комплексных чисел возьмём четыре произвольные точки A, B, C, D с комплексными координатами a, b, c, d соответственно. Комплексное число

$$\omega = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} \tag{13.1}$$

называется *двойным отношением точек* A, B, C, D и обозначается (AB, CD). Порядок точек существенен.

Легко проверить следующие свойства двойного отношения:

$$\left.\begin{aligned}
&(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = \omega,\\
&(BA, CD) = (AB, DC) = \frac{1}{(AB, CD)} = \frac{1}{\omega},\\
&(AC, BD) = 1 - (AB, CD) = 1 - \omega,\\
&(AC, DB) = \frac{1}{1-\omega} = (BC, AD),\\
&(AD, BC) = 1 - \frac{1}{\omega},\\
&(AD, CB) = 1 - \frac{1}{1-\omega} = \frac{\omega}{\omega - 1}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Таким образом, двойное отношение четырёх точек 1) не изменяется при перестановке местами первой и второй пар этих точек и при одновременной перестановке точек в обеих парах, 2) меняет свою величину на обратную при изменении порядка точек в одной из указанных пар, 3) меняет свою величину на дополнение до единицы при перемене местами второй и третьей точек.

Следовательно, при всевозможных перестановках четырёх точек получается всего шесть разных значений двойного отношения: $\omega,\ \dfrac{1}{\omega},\ 1-\omega,\ \dfrac{1}{1-\omega},\ 1-\dfrac{1}{1-\omega} = \dfrac{\omega}{1-\omega}$ и $1-\dfrac{1}{\omega}$.

13.2. Геометрический смысл аргумента и модуля двойного отношения ω четырёх точек A, B, C, D. Каждая из троек точек A, B, C и A, B, D лежит на одной окружности или на одной прямой. Будем полагать пока, что этими тройками задаются окружности γ_1 и γ_2 соответственно (рис. 31). Тогда

$$\arg \omega = \arg \frac{a-c}{b-c} - \arg \frac{a-d}{b-d} = \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right).$$

Если t_1 и t_2 — касательные к окружностям γ_1 и γ_2 соответственно в точке A, то по свойству вписанных углов и углов между касательной и хордой $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, t_1}\right)$ и $\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, t_2}\right)$ (углы ориентированы одинаково). Следовательно,

$$\arg\omega = (\widehat{\overrightarrow{AB}, t_1}) - (\widehat{\overrightarrow{AB}, t_2}) = (\widehat{t_2, t_1}).$$

По определению угол, между касательными к окружностям в их общей точке есть угол между этими окружностями.

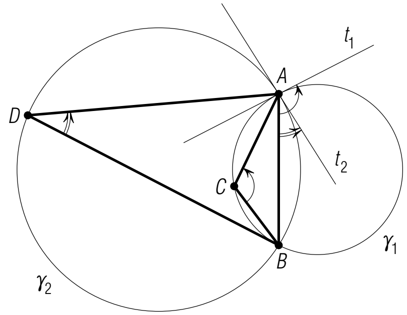

Рис. 31

Итак, *аргумент двойного отношения* (AB, CD) *четырёх точек* A, B, C, D *плоскости равен ориентированному углу между окружностями* ABC *и* ABD.

Нетрудно проверить, что это свойство останется в силе, если точки в одной из троек (или даже в обеих) будут коллинеарны, но тогда окружность заменяется соответствующей прямой.

В частности, двойное отношение (AB, CD) будет *чисто мнимым* тогда и только тогда, когда *окружности* ABC и ABD пересекаются под прямым углом, т. е. *ортогональны,* а также в случае, если одна из этих троек точек лежит на прямой, которая содержит центр окружности, определённой другой тройкой точек.

Перейдём теперь к модулю двойного отношения четырёх точек плоскости. Очевидно,

$$|\omega| = \left|\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right| = \frac{|a-c|}{|b-c|} : \frac{|a-d|}{|b-d|}.$$

Поэтому действительное число $|\omega|$ называется *двойным отношением расстояний* между точками A и C, B и C, A и D, B и D.

13.3. Критерий принадлежности четырёх точек окружности или прямой. *Для того, чтобы четыре точки лежали на одной прямой или на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы их двойное отношение было действительным числом.*

■ Если точки A, B, C, D коллинеарны, то отношения $\dfrac{a-c}{b-c}$ и $\dfrac{a-d}{b-d}$ — действительные числа (§ 3). Следовательно, в этом случае будет действительным и двойное отношение (13.1).

Если точки A, B, C, D лежат на окружности, то рассмотрим два возможных случая: 1) точки C и D находятся в одной полуплоскости относительно прямой AB, 2) точки C и D лежат в различных полуплоскостях относительно прямой AB. В первом случае ориентированные углы $\widehat{BCA}$ и $\widehat{BDA}$ равны, во втором случае $\widehat{BCA} + \widehat{ADB} = \pm\pi$, т. е. $\widehat{BCA} - \widehat{BDA} = \pm\pi$. В обоих случаях разность $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) - (\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}})$

равна нулю или $\pm\pi$. Но поскольку, согласно (7.1), эта разность равна

$$\arg\frac{a-c}{b-c}-\arg\frac{a-d}{b-d}=\arg\left(\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}\right)=\arg\omega,$$

то ω — действительное число.

Верно и обратное: если двойное отношение четырёх точек вещественно, то эти точки или коллинеарны, или принадлежат одной окружности. В самом деле, тогда если $\frac{a-c}{b-c}$ — действительное число, то и $\frac{a-d}{b-d}$ — также действительное число. На основании § 3 точки A, B, C коллинеарны, и точки A, B, D коллинеарны, и, значит, все четыре точки коллинеарны. Если же число $\frac{a-c}{b-c}$ комплексное, то и число $\frac{a-d}{b-d}$ также комплексное, отличное от действительного. Поэтому точки A, B, C неколлинеарны и точки A, B, D также неколлинеарны. Согласно условию обратного утверждения

$$\arg\left(\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}\right)=\arg\frac{a-c}{b-c}-\arg\frac{a-d}{b-d}=0 \text{ или } \pm\pi.$$

Следовательно, либо $\widehat{\overrightarrow{BCA}}=\widehat{\overrightarrow{BDA}}$, либо $\widehat{\overrightarrow{BCA}}-\widehat{\overrightarrow{BDA}}=\pm\pi$, т. е. $\widehat{\overrightarrow{BCA}}+\widehat{\overrightarrow{ABD}}=\pm\pi$. В первом случае отрезок AB виден из точек C и D под равными углами и, следовательно, они принадлежат одной дуге окружности, стягиваемой хордой AB. Во втором случае сумма противоположных углов четырёхугольника $ACBD$ равна $\pm\pi$, и поэтому он также является вписанным в окружность. ■

Следствие. Для того, чтобы точки A, B, C, D лежали на окружности, необходимо и достаточно, чтобы их двойное отношение было действительным числом, т. е.

$$\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}=\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}:\frac{\overline{a}-\overline{d}}{\overline{b}-\overline{d}}, \tag{13.3}$$

но $\frac{a-c}{b-c}\neq\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$.

При этом, если $\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}>0$, то вписанные углы $\widehat{\overrightarrow{BCA}}$ и $\widehat{\overrightarrow{BDA}}$ одинаково ориентированы, а при $\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}<0$ они ориентированы противоположно. Это соответствует случаям, когда 1) точки C и D принадлежат одной из дуг с концами A, B, 2) точки C и D принадлежат различным дугам с концами A и B. В первом случае говорят, что пары точек A, B и C, D *не разделяют* друг друга, а во втором случае говорят, что эти пары *разделяют* друг друга.

Если точки A, B, C фиксировать, а точку $M(z)$ считать переменной, то критерий (13.3) обращается в уравнение окружности по трём её точкам A, B, C:

$$\frac{z-a}{b-a}:\frac{z-c}{b-c}=\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}:\frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}} \qquad (13.4)$$

при $\dfrac{a-c}{b-c}\neq\dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$.

Задача. На плоскости даны четыре окружности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ такие, что окружности σ_1 и σ_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности σ_2 и σ_3 пересекаются в точках A_2 и B_2, окружности σ_3 и σ_4 — в точках A_3 и B_3 и окружности σ_4 и σ_1 — в точках A_4 и B_4. Доказать, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки B_1, B_2, B_3, B_4 также лежат на одной окружности или прямой (рис. 32).

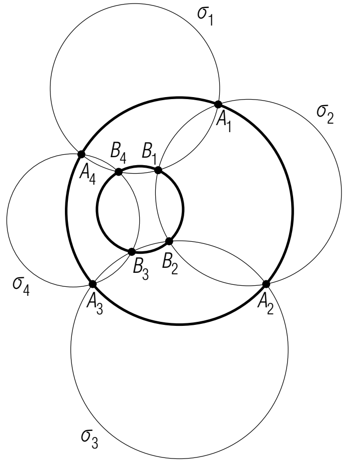

Рис. 32

■ В силу теоремы этого параграфа будут вещественны двойные отношения

$$\omega_{12}=\frac{a_1-a_2}{b_2-a_2}:\frac{a_1-b_1}{b_2-b_1}, \qquad \omega_{23}=\frac{a_2-a_3}{b_3-a_3}:\frac{a_2-b_2}{b_3-b_2},$$

$$\omega_{34}=\frac{a_3-a_4}{b_4-a_4}:\frac{a_3-b_3}{b_4-b_3}, \qquad \omega_{41}=\frac{a_4-a_1}{b_1-a_1}:\frac{a_4-b_4}{a_1-b_4}.$$

Поэтому вещественным будет и число

$$\frac{\omega_{12}\omega_{34}}{\omega_{23}\omega_{41}}=\left(\frac{a_1-a_2}{a_3-a_2}:\frac{a_1-a_4}{a_3-a_4}\right)\left(\frac{b_1-b_2}{b_3-b_2}:\frac{b_1-b_4}{b_3-b_4}\right)=$$
$$=(A_1A_3, A_2A_4)(B_1B_3, B_2B_4).$$

Следовательно, из вещественности двойного отношения (A_1A_3, A_2A_4) вытекает и вещественность двойного отношения (B_1B_3, B_2B_4). ■

Следствие. Если пары окружностей σ_1 и σ_2, σ_2 и σ_3, σ_3 и σ_4, σ_4 и σ_1 касаются, то точки A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3, A_4 и B_4 совпадают. Тогда вещественность числа

$$\frac{\omega_{12}\omega_{34}}{\omega_{23}\omega_{41}}=(A_1A_3, A_2A_4)^2$$

говорит о том, что точки A_1, A_2, A_3, A_4 касания лежат на одной окружности (рис. 33) или на одной прямой (рис. 34).

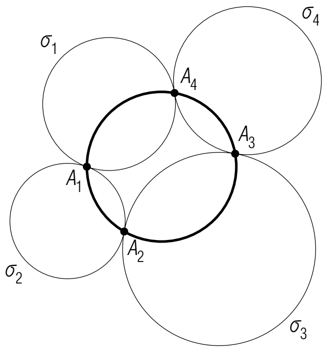

Рис. 33

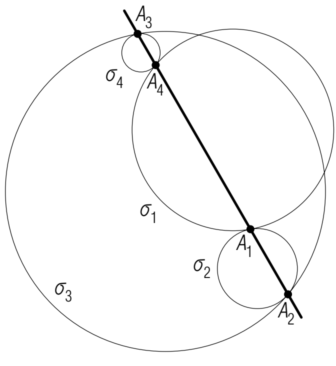

Рис. 34

Задачи

3.17. Найдите все значения двойного отношения четырёх точек A, B, C, D, если одно из них равно $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Докажите, что произведения длин противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ равны произведению длин его диагоналей.

3.18. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне BC, через точку N — прямая, параллельная стороне AC. Эти прямые пересекают сторону AB в точках P и Q. Докажите, что четыре точки M, N, P, Q лежат на окружности.

3.19. Основание каждой высоты треугольника ортогонально спроецировано на две прилежащие стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных проекций лежат на окружности.

3.20. Даны три точки A, B, C. Найдите множество точек M, для которых аргумент двойного отношения (MA, BC) является постоянным.

§ 14. Геометрический смысл уравнения $z\bar{z}+az+b\bar{z}+c=0$

14.1. Общее уравнение окружности в сопряжённых комплексных координатах. Окружность с центром $S(s)$ и радиусом R имеет уравнение

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=R^2, \tag{14.1}$$

где z — координата переменной точки окружности.

Пусть дано уравнение

$$z\bar{z}+az+b\bar{z}+c=0, \tag{14.2}$$

на комплексные коэффициенты a, b, c которого не накладывается заранее никаких условий. Требуется найти множество точек, координаты которых ему удовлетворяют. С этой целью удобно представить его в эквивалентном виде:

$$(z+b)(\bar{z}+a)=ab-c. \tag{14.3}$$

Рассмотрим все возможные случаи для коэффициентов a, b, c.

1. Сравнивая уравнение (14.3) с уравнением (14.1) окружности, приходим к выводу, что уравнение (14.3), а значит, и уравнение (14.2) задаёт окружность тогда и только тогда, когда $a=\bar{b}$ и $ab-c$ — действительное число. В этом случае $ab-c=a\bar{a}-c$, а значит, c должно быть действительным числом. Итак, уравнение

$$z\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0, \quad c=\bar{c}, \ b\bar{b}>c, \tag{14.4}$$

есть уравнение окружности с центром $s=-b$ и радиусом $R=\sqrt{b\bar{b}-c}$.

2. При $a=\overline{b}$ и $c=ab$ уравнению (14.3) $(z+b)(\overline{z}+\overline{b})=0$ удовлетворяет единственная точка $s=-b$. В частности, этот случай имеет место при $a=b=c=0$. Соблюдая аналогию, говорят, что уравнением $(z+b)\times\times(\overline{z}+\overline{b})=0$ задаётся окружность с центром $s=-b$ *нулевого радиуса*.

3. Если $a=\overline{b}$, $c=\overline{c}$, но $b\overline{b}<c$, то $\sqrt{b\overline{b}-c}$ — чисто мнимое число. Полагаем $\sqrt{b\overline{b}-c}=iR$, тогда (14.3) можно записать так:

$$(z+b)(\overline{z}+\overline{b})=-R^2. \tag{14.5}$$

Уравнению (14.5) не удовлетворяет ни одна точка плоскости, поскольку левая часть неотрицательна, а правая отрицательна при любом z. Это уравнение задаёт окружность мнимого радиуса iR с действительным центром, имеющим комплексную координату $s=-b$.

4. Когда $a=\overline{b}$, но $c\neq\overline{c}$, уравнение (14.3) противоречиво: левая часть его действительна, а правая — нет. В этом случае оно не задаёт никакого геометрического образа (даже мнимого!).

5. Осталось рассмотреть случай, когда $a\neq\overline{b}$. Тогда из уравнения (14.2) вычтем уравнение $z\overline{z}+\overline{a}\overline{z}+\overline{b}z+\overline{c}=0$, получающееся из (14.2) переходом к сопряжённым комплексным числам, получим:

$$(a-\overline{b})z+(b-\overline{a})\overline{z}+c-\overline{c}=0,$$

откуда

$$\overline{z}=\frac{(a-\overline{b})z+c-\overline{c}}{\overline{a}-b}.$$

Подставив этот результат в уравнение (14.2), приводим последнее к виду

$$(a-\overline{b})z^2+(a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c})z+\overline{a}c-b\overline{c}=0. \tag{14.6}$$

При $a\neq\overline{b}$ уравнения (14.2) и (14.6) равносильны. В зависимости от того, отличен ли от нуля или же равен нулю дискриминант

$$D=(a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c})^2-4(a-\overline{b})(\overline{a}c-b\overline{c})$$

квадратного уравнения (14.6), оно будет определять две различные (действительные!) или две совпавшие точки. При $D=0$ совпавшие точки имеют комплексную координату

$$z=\frac{a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c}}{2(\overline{b}-a)}.$$

В частности, при $c=ab$ как уравнение (14.3), так и уравнение (14.6) даёт пару точек $z_1=-b$ и $z_2=-\overline{a}$.

Итак, *уравнением* (14.2) *задаётся либо окружность* (*действительная, мнимая, нулевого радиуса*), *либо две точки* (*различные или же совпавшие*), *либо пустое множество точек.*

14.2. Уравнение окружности по трём точкам. Если окружность $z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\gamma=0$, $\gamma=\overline{\gamma}$ проходит через точки A, B, C, то

$$a\overline{a}+\overline{\alpha}a+\alpha\overline{a}+\gamma=0,$$
$$b\overline{b}+\overline{\alpha}b+\alpha\overline{b}+\gamma=0,$$
$$c\overline{c}+\overline{\alpha}c+\alpha\overline{c}+\gamma=0.$$

Однородная линейная система

$$\begin{cases} 1\cdot z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\gamma=0, \\ 1\cdot a\overline{a}+\overline{\alpha}a+\alpha\overline{a}+\gamma=0, \\ 1\cdot b\overline{b}+\overline{\alpha}b+\alpha\overline{b}+\gamma=0, \\ 1\cdot c\overline{c}+\overline{\alpha}c+\alpha\overline{c}+\gamma=0 \end{cases}$$

относительно 1, $\overline{\alpha}$, α, γ имеет ненулевое решение (так как окружность определяется тремя неколлинеарными точками), поэтому её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} z\overline{z} & z & \overline{z} & 1 \\ a\overline{a} & a & \overline{a} & 1 \\ b\overline{b} & b & \overline{b} & 1 \\ c\overline{c} & c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{14.7}$$

Наряду с (13.4) это уравнение представляет собой уравнение окружности по трём данным точкам.

14.3. Ортогональные окружности. Две пересекающиеся окружности называются *ортогональными*, если касательные к ним в их общей точке перпендикулярны. Тогда, очевидно, касательная к одной из ортогональных окружностей в их общей точке содержит центр другой окружности.

Для того, чтобы окружности (A, R) и (B, r) были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $|AB|^2=R^2+r^2$, или

$$(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=R^2+r^2. \tag{14.8}$$

Если окружности заданы уравнениями

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0, \quad \alpha_0=\overline{\alpha}_0$$

и

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0=0, \quad \beta_0=\overline{\beta_0},$$

то $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $R^2=\alpha\overline{\alpha}-\alpha_0$, $r^2=\beta\overline{\beta}-\beta_0$, и поэтому критерий (14.8) их ортогональности трансформируется так:

$$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha_0+\beta_0. \tag{14.9}$$

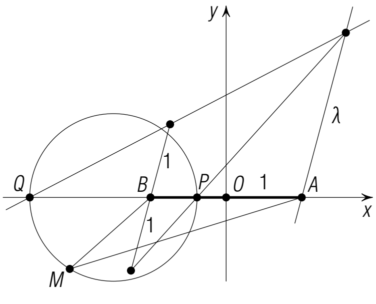

Рис. 35

З а д а ч а 1. Найти множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек A и B постоянно.

■ Пусть $M(z)$ — произвольная точка искомого множества, а точкам A и B соответствуют комплексные числа 1 и -1. По условию $MA/MB=\lambda=\text{const}$, или $MA^2=\lambda^2 MB^2$. Переходя к комплексным координатам, получаем уравнение

$$(z-1)(\overline{z}-1)=\lambda^2(z+1)(\overline{z}+1),$$

которое преобразуется к виду

$$z\overline{z}(1-\lambda^2)-(z+\overline{z})(1+\lambda^2)=\lambda^2-1. \qquad (14.10)$$

При $\lambda=1$ оно становится таким:

$$z+\overline{z}=0.$$

Это — уравнение мнимой оси, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку AB.

Если $\lambda\neq 1$, то уравнение (14.10) запишем в такой форме:

$$z\overline{z}-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(z+\overline{z})+1=0. \qquad (14.11)$$

Сравнивая это уравнение с (14.2), приходим к выводу, что оно определяет окружность с центром $s=\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}$ и радиусом $R=\sqrt{\alpha\beta-\gamma}=\left|\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right|$. Так как λ — действительное число, то же самое можно сказать и про s. Следовательно, центр окружности (14.11) лежит на прямой AB. Эта окружность называется *окружностью Аполлония* для отрезка AB и отношения λ. Простая проверка показывает, что окружность Аполлония проходит через точки $P\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$ и $Q\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, делящие отрезок AB в отношениях λ и $-\lambda$ соответственно. Отрезок PQ — диаметр этой окружности (рис. 35). ■

Задача 2. На окружности σ взяты четыре произвольные точки A, B, C, D. Окружности σ_1, σ_2, σ_3 с центрами A, B, C соответственно, проходящие через точку D, попарно пересекаются в точках M_1, M_2, M_3 (рис. 36). Доказать, что точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны.

■ Пусть окружность σ является единичной, а точка D имеет координату $d=1$. Используя уравнение (14.1) и тот факт, что окружность σ_1 имеет центр $A(a)$ и содержит точку $D(1)$, получаем её уравнение

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a})=(1-a)(1-\overline{a}),$$

или

$$z\overline{z}-\overline{a}z-a\overline{z}=1-a-\overline{a}.$$

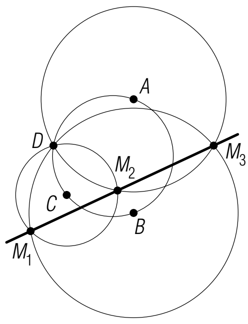

Рис. 36

Аналогично, окружности σ_2 и σ_3 будут

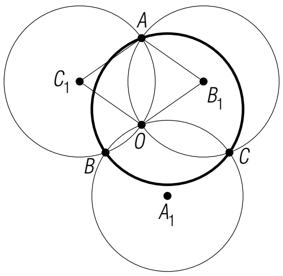

Рис. 37

иметь уравнения

$$z\overline{z}-\overline{b}z-b\overline{z}=1-b-\overline{b} \quad \text{и} \quad z\overline{z}-\overline{c}z-c\overline{z}=1-c-\overline{c}.$$

Решая систему уравнений окружностей σ_1 и σ_2, находим координату второй общей точки M_3 этих окружностей:

$$m_3=a+b-ab.$$

Аналогично,

$$m_2=c+a-ca, \quad m_1=b+c-bc.$$

Отсюда находим

$$\frac{m_2-m_1}{m_3-m_1}=\frac{(a-b)(1-c)}{(a-c)(1-b)}.$$

Это число является действительным, поскольку сопряжено само себе, и потому точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны. ■

Задача 3. Три равные окружности имеют общую точку O и вторично пересекаются в точках A, B, C. Доказать, что окружность, описанная около треугольника ABC, равна данным (рис. 37).

■ Примем общую точку O окружностей за начало. Центры окружностей OBC, OCA, OAB обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно. Так как четырёхугольник AB_1OC_1 — ромб, $a=b_1+c_1$ и аналогично $b=c_1+a_1$, $c=a_1+b_1$. Поскольку данные окружности равны, то $|a_1|=|b_1|=|c_1|=1$. Положим $a_1+b_1+c_1=s$. Очевидно, точки A, B, C лежат на окружности $(z-s)(\overline{z}-\overline{s})=1$ с центром s и радиусом 1. ■

Заметим попутно, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на единичной окружности $z\overline{z}=1$, равной окружности ABC. В силу (4.10) точка S является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, ортоцентр треугольника ABC совпадает с точкой O. В самом деле, если H — ортоцентр треугольника ABC, то, как известно,

$$\overrightarrow{SH}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}.$$

Следовательно,

$$h-s=a-s+b-s+c-s=a+b+c-3s=2(a_1+b_1+c_1)-3s=-s, \quad h=0.$$

Задача 4. Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку $M(m)$ ортогонально данной окружности

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0.$$

■ Если окружность $z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0=0$ обладает заданным свойством, то

$$\begin{cases} m\overline{m}+\overline{\beta}m+\beta\overline{m}+\beta_0=0, \\ \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha_0+\beta_0. \end{cases}$$

Исключая β_0, получаем уравнение относительно β:

$$(\overline{\beta}+\overline{m})\beta+(\alpha+m)\overline{\beta}+m\overline{m}-\alpha_0=0. \quad (14.12)$$

им определяется прямая с нормальным вектором $\alpha+m$, который равен вектору $\overrightarrow{AM}$, где $A(-\alpha)$ — центр данной окружности. Следовательно, прямая (14.12) перпендикулярна прямой AM (рис. 38).

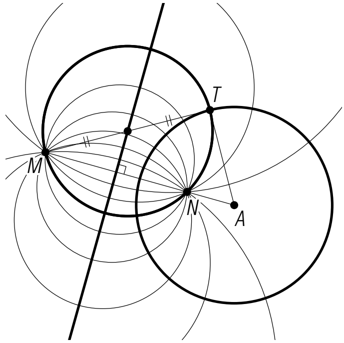

Рис. 38

Задачи

3.21. Найдите множество точек, определяемое уравнением $z=\dfrac{c+i}{2c-i}$, где c — переменное действительное число.

3.22. Найдите центр окружности, описанной около треугольника ABC, если начало совпадает с точкой A.

3.23. Дан четырёхугольник $ABCD$. При каких условиях существует точка M, проекции которой на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны? Найдите комплексную координату точки M, если даны комплексные координаты a, b, c, d точек A, B, C, D.

3.24. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC дана произвольная точка P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников APC и BPC, ортогональны.

3.25. Окружности с центрами S и S_1 пересекаются в точках A и B. Прямые SA и S_1A пересекают окружности S_1 и S вторично в точках C и D. Докажите, что точки B, S, D, C, S_1 принадлежат одной окружности.

3.26. Две окружности (S, R) и (S_1, R_1) пересекаются в точках A и B. Прямая t пересекает окружность (S, R) в точках C и C_1, а окружность (S_1, R_1) — в точках D и D_1. Докажите, что углы DAC_1 и D_1BC либо равны, либо их сумма равна $180°$.

3.27. Найдите множество точек, для которых сумма квадратов расстояний до вершин правильного многоугольника постоянна.

3.28. Найдите множество точек, для которых сумма квадратов расстояний до сторон правильного многоугольника постоянна.

3.29. Найдите множество ортоцентров треугольников ABC, вписанных в окружность (O, R), если точки A и B фиксированы, а точка C пробегает эту окружность.

3.30. Докажите, что множество точек, для каждой из которых расстояния до сторон данного треугольника обратно пропорциональны расстояниям до соответствующих противоположных вершин, есть окружность, описанная около данного треугольника.

3.31. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\widehat{C}=90^\circ$. Найдите множество точек M таких, что симметричные каждой из них относительно прямых BA и BC точки M_1 и M_2 лежат на прямой, содержащей точку C.

3.32. На окружности даны точки A и B. Найдите множество точек M пересечения хорд AA_1 и BB_1 ($\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{MB_1}$), для которых $\alpha+\beta=2$.

§ 15. Гармонический четырёхугольник

15.1. Гармоническая четвёрка точек. В общем случае существует шесть значений, которые может принимать двойное отношение четырёх точек A, B, C, D при всевозможных их перестановках:

$$\omega,\quad \frac{1}{\omega},\quad 1-\omega,\quad 1-\frac{1}{\omega},\quad \frac{1}{1-\omega}\quad \text{и}\quad 1-\frac{1}{1-\omega}$$

(§ 13), причём $\omega\neq 1$, поскольку точки различны. Однако при $\omega=-1$ получается всего лишь три значения: -1, 2 и $1/2$. Оказывается, в этом случае четвёрка точек A, B, C, D (которую называют *гармонической четвёркой*) обладает замечательными свойствами. Так как $\omega=(AB, CD)=-1$ — действительное число, точки лежат на одной окружности или на одной прямой (теорема § 13).

Если точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ коллинеарны и $(AB, CD)=-1$, т. е. $\frac{c-a}{b-c}:\frac{d-a}{b-d}=-1$, то $\frac{c-a}{b-c}=-\frac{d-a}{b-d}$. Значит, точки C и D делят отрезок AB в равных по абсолютной величине отношениях (внутренним и внешним образом). Говорят, что пара C, D *гармонически разделяет* пару A, B. Поскольку $(CD, AB)=-1$, пара A, B, в свою очередь, гармонически разделяет пару C, D. Тремя данными точками A, B, C четвёртая точка, которая в паре с точкой C гармонически разделяет пару A, B, определяется на прямой AB однозначно (рис. 39): через данные точки A и B проводим произвольные параллельные прямые m и n. Пусть произвольная прямая, содержащая точку C, пересекает их в точках M и P соответственно. Отложим на прямой n отрезок BN равный BP. Тогда прямая MN пересекает прямую AB в искомой точке D,

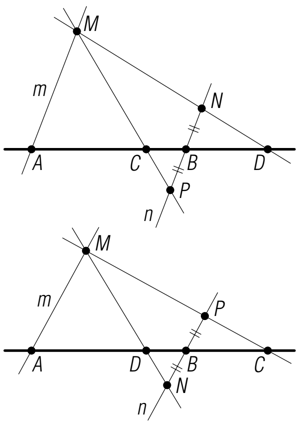

Рис. 39

если только точка C не является серединой отрезка AB. Истинность равенства $(AB, CD) = -1$ следует из подобия треугольников AMC и BPC, а также AMD и BND.

Сейчас нас больше интересует случай, когда точки A, B, C, D неколлинеарны, но $(AB, CD) = -1$. Тогда точки принадлежат одной окружности и потому никакие три из них не могут быть коллинеарными. Пары A, B и C, D разделяют друг друга, так как двойное отношение отрицательно (§ 13).

15.2. Гармонический четырёхугольник. Вписанный в окружность четырёхугольник $ACBD$ называется *гармоническим четырёхугольником,* если его вершины A, B и C, D образуют гармоническую четвёрку точек.

Какие же особенности имеет гармонический четырёхугольник?

1. Согласно определению для комплексных координат a, c, b, d его вершин A, C, B, D имеем:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = -1,$$

или

$$(a-c)(b-d) = -(b-c)(a-d), \tag{15.1}$$

откуда

$$|a-c| \cdot |b-d| = |b-c| \cdot |a-d|,$$

т. е.

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD|.$$

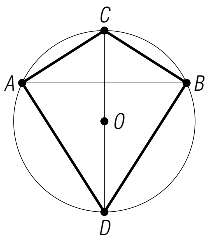

Рис. 40

Таким образом, *в гармоническом четырёхугольнике произведения длин противоположных сторон равны.* Согласно теореме Птолемея (§ 7) для любого вписанного выпуклого четырёхугольника $ACBD$ сумма произведений длин противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей. Поэтому в гармоническом четырёхугольнике $ACBD$

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot CD. \tag{15.2}$$

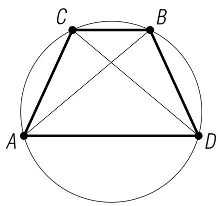

Рис. 41

Примером гармонического четырёхугольника может служить вписанный *дельтоид* — выпуклый вписанный четырёхугольник, симметричный относительно одной из диагоналей (рис. 40). В частности, гармоническим четырёхугольником является квадрат. Гармонический четырёхугольник может быть и трапецией, которая в этом случае должна быть равнобочной и иметь боковую сторону, равную среднему геометрическому её оснований (рис. 41): $AC = BD$, $AC^2 = AD \cdot BC$.

2. Пусть диагонали AB и CD гармонического четырёхугольника $ACBD$ пересекаются в точке M. Считая описанную окружность единичной, получаем:

$$\overline{m}=\frac{a+b-(c+d)}{ab-cd},$$

откуда

$$m=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}.$$

Найдём отношение $\lambda=\frac{a-m}{m-b}$, в котором точка M делит диагональ AB:

$$\lambda=\frac{a-m}{m-b}=\frac{b(a-c)(a-d)}{a(c-b)(b-d)}.$$

Поскольку $\frac{a-d}{b-d}=-\frac{a-c}{b-c}$, то $\lambda=\frac{b(a-c)^2}{a(c-b)^2}$. Учитывая, что $AC^2=(a-c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$ и $BC^2=-\frac{(b-c)^2}{bc}$, получаем: $\lambda=\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD^2}{BD^2}$. Итак,

$$\frac{m-a}{b-m}=\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD^2}{BD^2}$$

и аналогично

$$\frac{m-c}{d-m}=\frac{CB^2}{BD^2}=\frac{AC^2}{AD^2},$$

т. е. *в гармоническом четырёхугольнике точка пересечения диагоналей делит каждую из них в отношении, равном отношению квадратов длин прилежащих сторон.*

3. *На каждой из диагоналей гармонического четырёхугольника лежат точки пересечения касательных к описанной окружности в концах другой диагонали.*

■ Точка пересечения касательных в вершинах C и D имеет координату $\frac{2cd}{c+d}$, которая удовлетворяет уравнению $z+ab\bar{z}=a+b$ прямой AB. В самом деле,

$$\frac{2cd}{c+d}+ab\cdot\frac{2}{c+d}=a+b,$$

или

$$2(ab+cd)=(a+b)(c+d),$$

а это эквивалентно условию (15.1) гармоничности четырёхугольника $ACBD$. ■

Последнее свойство позволяет построить гармонический четырёхугольник по трём заданным его вершинам A, B, C. Четвёртая вершина D строится с помощью точки P пересечения прямой AB и касательной к окружности ABC в точке C: она является точкой касания второй касательной к этой окружности, проходящей через точку P (рис. 42).

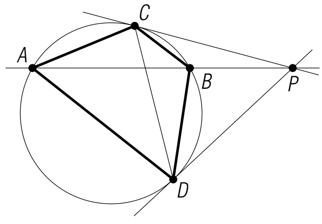

Рис. 42

Задачи

3.33. Докажите, что биссектрисы противоположных углов гармонического четырёхугольника пересекаются на диагонали, не содержащей вершины этих углов.

3.34. Докажите, что каждая диагональ гармонического четырёхугольника содержит центр окружности Аполлония (§ 14), проходящей через концы другой диагонали.

§ 16. Поляры и полюсы относительно окружности

16.1. Полярно сопряжённые точки. Точки A и B называются *полярно сопряжёнными* относительно окружности $\omega(S, R)$, если их комплексные координаты удовлетворяют равенству

$$(a-s)(\overline{b}-\overline{s})+(\overline{a}-\overline{s})(b-s)=2R^2. \qquad (16.1)$$

Поскольку в левой части этого равенства присутствуют лишь разности координат, оно не зависит от выбора начальной точки. Более того, оно сохраняется при замене декартовой системы координат другой декартовой системой. Доказательство этого факта опускаем.

Если начальная точка совпадает с центром S окружности, то равенство (16.1) упрощается:

$$a\overline{b}+\overline{a}b=2R^2. \qquad (16.2)$$

Из определения вытекает ряд следствий.

1. При $a=b$ получаем $a\overline{a}=R^2$, т. е. $A\in\omega$. Следовательно, точка A полярно сопряжена сама себе тогда и только тогда, когда она принадлежит окружности ω.

2. Согласно формуле (2.4), $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{a\overline{b}+\overline{a}b}{2|a|\cdot|b|}$, или $\cos\varphi=$ $=\dfrac{R^2}{|a|\cdot|b|}$. Следовательно, угол $\varphi=\widehat{AOB}$ либо острый, либо равен нулю.

3. Так как $|b|=\dfrac{R^2}{|a|\cos\varphi}$, при $|a|<R$ получаем $|b|>R$. Значит, если точка $A\neq O$ лежит внутри окружности ω, то точка B лежит вне окружности.

4. Центр окружности ω не сопряжён ни с какой точкой, так как при $a=0$ равенство (16.2) не выполняется ни при каком b, как и равенство (16.1) при $a=s$.

6—7685.—Я. П. Понарин.

16.2. Поляра точки относительно окружности. Для фиксированной точки A, отличной от центра окружности ω, имеется бесконечное множество сопряжённых с ней точек $M(z)$, так как каждым из уравнений

$$(a-s)(\overline{z}-\overline{s})+(z-s)(\overline{a}-\overline{s})=2R^2, \tag{16.3}$$

$$a\overline{z}+\overline{a}z=2R^2 \tag{16.4}$$

задаётся *прямая линия* (§ 11). Уравнение (16.3) эквивалентно уравнению

$$(\overline{a}-\overline{s})z+(a-s)\overline{z}=2(R^2-s\overline{s})+a\overline{a}+\overline{a}s, \tag{16.5}$$

в котором коэффициенты при z и $\overline{z}$ сопряжены, а свободный член — действительное число.

Итак, множество точек плоскости, полярно сопряжённых с данной точкой A относительно окружности $\omega(S, R)$ при $A\neq S$, есть прямая, называемая *полярой* точки A относительно окружности ω. Уравнения (16.3) и (16.5) являются уравнениями поляры точки A относительно окружности ω, уравнение (16.4) — их частный вид при $S=O$.

16.3. Построение поляры. Полюс прямой. Для выяснения способа построения поляры данной точки A заметим, что прямая OA, имеющая уравнение $\overline{a}z-a\overline{z}=0$, *перпендикулярна* поляре (§ 11) и пересекает её в точке C с координатой $c=\dfrac{R^2}{\overline{a}}$. Точку C можно построить так: если точка A лежит внутри окружности ω, то через неё проводим перпендикуляр к OA, пересекающий ω в точке $T(t)$ (рис. 43). Касательная к ω в точке T пересекает прямую OA в искомой точке C. Действительно, полученные прямоугольные треугольники OAT и OTC подобны и противоположно ориентированы. На основании (6.3) получаем: $\dfrac{a-o}{\overline{t}-o}=\dfrac{t-o}{\overline{c}-o}$, или $a\overline{c}=t\overline{t}=R^2$. Из $a\overline{c}=R^2$ следует $\overline{a}c=R^2$. Это и подтверждает правильность построения точки C. Если точка A находится вне окружности ω, то построение выполняется в обратном порядке (точки A и C меняются ролями). Если $A\in\omega$, то сравнение (16.4) с (3.17) показывает, что полярой точки A будет касательная к ω в этой точке.

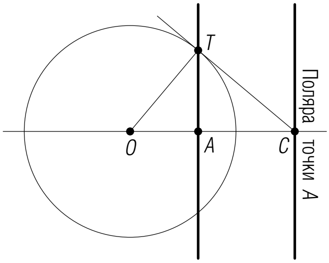

Рис. 43

Таким образом, для каждой точки $A\neq$ $\neq O$ имеется поляра относительно ω, содержащая все точки, полярно сопряжённые точке A.

Из описанного способа построения поляры явствует, что и верно и обратное: для каждой прямой, не проходящей через центр O окружности ω, имеется единственная точка A, которая полярно сопряжена любой точке этой прямой. Точку A называют *полюсом* данной прямой относительно окружности.

Чтобы построить полюс заданной прямой m, не содержащей центр окружности ω, достаточно построить поляру p ортогональной проекции P центра O окружности ω на прямую m. Тогда точка $M = p \cap OP$ и будет полюсом прямой m.

Полюсы и поляры относительно окружности обладают замечательным свойством: *если точка A лежит на поляре точки B, то точка B лежит на поляре точки A.* В самом деле, уравнение поляры точки A есть уравнение (16.4), а $\overline{b}z + b\overline{z} = 2R^2$ — уравнение поляры точки B. Принадлежность точки A поляре точки B и принадлежность точки B поляре точки A выражаются одним и тем же равенством (16.2).

Доказанное свойство называют свойством взаимности полюсов и поляр. Из этого свойства следует, что *поляры всех точек, принадлежащих прямой l, проходят через полюс этой прямой* (требуется лишь, чтобы $O \notin l$).

16.4. Другое определение полярной сопряжённости точек. Если точки A и B полярно сопряжены относительно окружности $z\overline{z} = R^2$, то $a\overline{b} + \overline{a}b = 2R^2$. Найдём точки пересечения прямой AB с окружностью (если они существуют). Уравнение прямой AB можно записать с помощью действительного параметра λ так (§ 1):

$$z = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \overline{\lambda}, \tag{16.6}$$

откуда $\overline{z} = \dfrac{\overline{a} + \lambda\overline{b}}{1 + \lambda}$. Выполняя подстановки z и $\overline{z}$ в уравнение $z\overline{z} = R^2$ окружности, приходим к уравнению относительно λ:

$$\frac{(1 + \lambda b)(\overline{a} + \lambda\overline{b})}{(1 + \lambda)^2} = R^2.$$

С учётом того, что $a\overline{b} + \overline{a}b = 2R^2$, оно приводится к виду

$$\lambda^2 (b\overline{b} - R^2) = R^2 - a\overline{a}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{R^2 - a\overline{a}}{b\overline{b} - R^2}}.$$

Если $|OA| < R$, то $|OB| > R$, т. е. при $a\overline{a} < R^2$ будет $b\overline{b} > R^2$, прямая AB пересекает окружность ω, и поэтому оба значения λ действительны. Если же $|OA| > R$, то $|OB|$ может быть больше, меньше или равно R. Этот случай приходиться опустить, так как тогда λ может оказаться и мнимым числом, а согласно (16.6) оно должно быть действительным.

Итак, при $|OA| < R$ оба значения λ равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Это значит, что точки M и N

6*—7685.—Я. П. Понарин.

пересечения прямой AB и окружности ω делят отрезок AB внутренним и внешним образом в равных по абсолютной величине отношениях:

$$\frac{m-a}{b-m}=-\frac{n-a}{b-n},$$

отсюда

$$\frac{a-m}{b-m}:\frac{a-n}{b-n}=-1 \tag{16.7}$$

Следовательно, точки A, B, M, N образуют *гармоническую четвёрку* (§ 15).

Таким образом, мы пришли к другому, общепринятому определению полярной сопряжённости двух точек относительно окружности.

Определение. Точки A и B называются *полярно сопряжёнными* относительно окружности (при условии, что одна из них лежит внутри окружности), если эти точки гармонически делят хорду MN, высекаемую окружностью на прямой AB.

Из этого определения следует определение полярной сопряжённости точек, выраженное формулами (16.1) или (16.2). В самом деле, пусть выполняется равенство (16.7) и отношения $\frac{m-a}{b-m}=\lambda$ и $\frac{n-a}{b-n}=$ $=-\lambda$ — действительные числа (точки M и N принадлежат прямой AB). Тогда $m=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$, $n=\frac{a-\lambda b}{1-\lambda}$. Точки M и N принадлежат окружности $z\overline{z}=R^2$, следовательно, $m\overline{m}=n\overline{n}=R^2$, или $(a+\lambda b)(\overline{a}+\lambda\overline{b})=(1+\lambda)^2R^2$ и $(a-\lambda b)(\overline{a}-\lambda\overline{b})=(1-\lambda)^2R^2$. Раскрывая скобки и вычитая из первого равенства второе, получаем: $a\overline{b}+\overline{a}b=2R^2$. ■

Из изложенного следует, что для получения поляры точки A (при $|OA|<R$) относительно окружности ω следует взять пучок прямых с центром A и на каждой из них построить точку, делящую высекаемую на ней хорду внешним образом в таком же отношении, в каком эта хорда делится точкой A. Множество всех таких точек есть прямая — поляра точки A относительно ω.

Если точка A лежит вне ω, то получаем не все точки поляры, а только те, которые лежат внутри ω на прямой, проходящей через точки касания касательных, проведённых к ω через A.

Таким образом, определение полярной сопряжённости точек через формулы (16.1) и (16.2) оказывается предпочтительнее определения через гармонические пары точек (A, B) и (M, N) с элементарно-геометрической точки зрения. Однако оно проигрывает в другом: определение через гармонические пары может быть распространено на любую кривую второго порядка и имеет глубокое геометрическое содержание с проективной точки зрения, а определение указанными формулами имеет место только для окружности на евклидовой плоскости.

16.5. Построение поляры данной точки одной линейкой. Для этого построения необходимо доказать такое свойство: *если диагонали вписанного в окружность ω четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а прямые AB и CD — в точке Q, то точки P и Q полярно сопряжены относительно окружности ω.*

■ Примем окружность ω за единичную. Согласно (2.20) имеем:

$$\overline{p}=\frac{a+c-(b+d)}{ac-bd},\quad \overline{q}=\frac{a+b-(c+d)}{ab-cd},$$

откуда

$$p=\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd},\quad q=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}.$$

Требуется проверить, что $p\overline{q}+\overline{p}q=2$ (считаем, что $R^2=1$). Находим:

$$p\overline{q}+\overline{p}q=\frac{(ac(b+d)-bd(a+c))(a+b-c-d)+(a+c-b-d)(ab(c+d)-cd(a+b))}{(ac-bd)(ab-cd)}=$$

$$=\frac{(b+d)(c(a+b)(a+d)-a(b+c)(c+d))+(a+c)(b(c+d)(a+d)-d(a+b)(b+c))}{(ac-bd)(ab-cd)}=$$

$$=\frac{(b+d)(a-c)(ac-bd)+(a+c)(b-d)(ac-bd)}{(ac-bd)(ab-cd)}=$$

$$=\frac{(b+d)(a-c)+(a+c)(b-d)}{ab-cd}=2.$$ ■

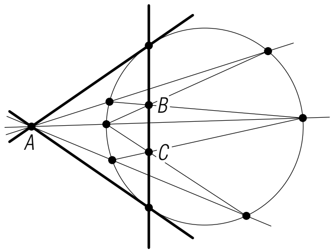

Рис. 44

Чтобы построить поляру точки A, проводим через неё две произвольные секущие окружности и находим с помощью получившегося вписанного четырёхугольника полярно сопряжённую ей точку B. Проведя через A третью секущую, находим аналогично ещё одну точку C, полярно сопряжённую с A (рис. 44, 45). Прямая BC — поляра точки A — построена одной линейкой.

Построив поляру для внешней точки A, мы получаем две точки пересечения поляры с окружностью ω и, соединяя их с A, получим две касательные к окружности из внешней точки. Это построение касательных выполнено одной линейкой.

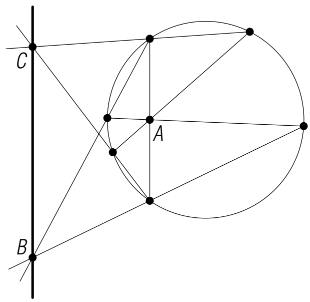

Рис. 45

З а д а ч а 1. Две окружности ортогональны. Доказать, что две диаметрально противоположные точки одной из них полярно сопряжены относительно другой.

■ Пусть даны окружности $z\overline{z}=1$ и $(z-s)(\overline{z}-\overline{s})=R^2$. Так как по условию они ортогональны, имеем: $R^2 = s\overline{s} - 1$. Пусть две диаметрально противоположные точки первой окружности имеют координаты a и $-a$. Проверим, что выполняется равенство (16.1):

$$(a-s)(-\overline{a}-\overline{s})+(\overline{a}-\overline{s})(-a-s)=-2a\overline{a}+2s\overline{s}=2R^2,$$

поскольку $a\overline{a}=1$ и $-1+s\overline{s}=R^2$. ■

Задача 2. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, точка H — его ортоцентр. Доказать, что

$$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2.$$

■ В силу формулы (2.5) для скалярного произведения векторов полярная сопряжённость точек A и B относительно окружности $\omega(S, R)$ характеризуется равенством

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=R^2. \tag{16.8}$$

Имея это в виду, построим окружность с центром M и радиусом $R=\frac{1}{2}|AB|$. Она пройдёт через основания A_1 и B_1 высот треугольника ABC, проведённых из вершин A и B. В четырёхугольнике ABA_1B_1 диагонали пересекаются в точке H, а прямые AB_1 и BA_1 — в точке C. Поэтому точки H и C полярно сопряжены относительно окружности $\left(M, \frac{1}{2}AB\right)$. В силу (16.8) будет истинно $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{4}AB^2$. ■

Задачи

3.35. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ и построены точки $P=AC\cap BD$, $M=AB\cap CD$, $N=AD\cap BC$. Докажите, что центр O описанной около четырёхугольника окружности является ортоцентром треугольника MNP.

3.36. Из точки A опущен перпендикуляр AP на поляру точки B относительно окружности с центром O, а из точки B опущен перпендикуляр BQ на поляру точки A относительно той же окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}$.

§ 17. Пучки окружностей

17.1. Степень точки относительно окружности. Если дана точка M и окружность $\omega(S, R)$, то число SM^2-R^2 называют *степенью точки M* относительно окружности ω. Условимся обозначать $SM^2-R^2=\psi(M)$.

Если точка M лежит вне окружности ω, то $\psi(M)>0$ и $\psi(M)$ равна квадрату длины отрезка касательной к окружности ω, проведённой из точки M. Если точка M находится на окружности ω, то $\psi(M)=0$. Когда же точка M располагается внутри ω, $\psi(M) < 0$ и $|\psi(M)|$ равен квадрату длины полухорды, проходящей через M перпендикулярно SM.

Если прямая, содержащая точку M, пересекает ω в точках A и B, то $\psi(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Согласно определению,

$$\psi(M) = (s - m)(\overline{s} - \overline{m}) - R^2 \tag{17.1}$$

17.2. Радикальная ось двух окружностей определяется как множество точек плоскости, каждая из которых имеет одну и ту же степень относительно каждой из двух данных окружностей.

Если (A, R) и (B, r) — данные окружности и $P(z)$ — точка искомого множества, то это множество имеет уравнение:

$$(a - z)(\overline{a} - \overline{z}) - R^2 = (b - z)(\overline{b} - \overline{z}) - r^2,$$

или

$$(\overline{a} - \overline{b})z + (a - b)\overline{z} - a\overline{a} + b\overline{b} + R^2 - r^2 = 0. \tag{17.2}$$

Если $a \neq b$, то полученным уравнением определяется прямая с нормальным вектором $a - b$. Следовательно, радикальной осью двух неконцентрических окружностей

$$(a - z)(\overline{a} - \overline{z}) = R^2 \quad \text{и} \quad (b - z)(\overline{b} - \overline{z}) = r^2$$

является прямая (17.2), перпендикулярная линии центров этих окружностей.

При $a = b$ и $R \neq r$ равенство (17.2) противоречиво, т. е. концентрические окружности не имеют радикальной оси.

Если окружности заданы уравнениями

$$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = \overline{\alpha}_0$$

и

$$z\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \beta_0 = 0, \quad \beta_0 = \overline{\beta}_0,$$

то $a = -\alpha$, $b = -\beta$, $R^2 = \alpha\overline{\alpha} - \alpha_0$, $r^2 = \beta\overline{\beta} - \beta_0$, и поэтому уравнение (17.2) их радикальной оси принимает вид:

$$(\overline{\alpha} - \overline{\beta})z + (\alpha - \beta)\overline{z} + \alpha_0 - \beta_0 = 0. \tag{17.3}$$

Формально это уравнение получается путём почленного вычитания уравнения одной окружности из уравнения другой.

Если окружности имеют общие точки, то эти точки принадлежат радикальной оси окружностей, поскольку они имеют одну и ту же, нулевую, степень относительно каждой из окружностей. Следовательно, радикальная ось двух пересекающихся окружностей содержит их общую хорду, радикальная ось двух касающихся окружностей совпадает с их общей касательной, которая перпендикулярна линии центров. Если окружности лежат одна вне другой, не касаясь, то их радикальная ось проходит через середины отрезков общих касательных с концами в точках касания.

Взаимное расположение двух окружностей характеризуется такими условиями:

а) если $|R-r|<|\alpha-\beta|<R+r$, то они имеют две общие точки;

б) при $|R-r|=|\alpha-\beta|$ окружности касаются внутренним образом;

в) при $|\alpha-\beta|=R+r$ они касаются внешним образом;

г) когда $|R-r|>|\alpha-\beta|$, одна окружность лежит внутри другой, не касаясь её;

д) если $|\alpha-\beta|>R+r$, то одна окружность лежит вне другой, не касаясь её.

17.3. Радикальный центр трёх окружностей. *Если центры трёх окружностей неколлинеарны, то три радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной точке.* В самом деле, точка пересечения двух радикальных осей имеет одну и ту же степень относительно каждой из трёх данных окружностей, вследствие чего она должна принадлежать и третьей радикальной оси. Она называется *радикальным центром* трёх данных окружностей.

Комплексная координата радикального центра трёх окружностей

$$\begin{aligned} &z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0,\\ &z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0=0,\\ &z\overline{z}+\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z}+\gamma_0=0, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \overline{\alpha} & 1\\ \beta & \overline{\beta} & 1\\ \gamma & \overline{\gamma} & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

находится как координата точки пересечения их радикальных осей:

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\alpha-\beta)\overline{z}+\alpha_0-\beta_0=0,\\ &(\overline{\beta}-\overline{\gamma})z+(\beta-\gamma)\overline{z}+\beta_0-\gamma_0=0. \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

Уравнение $(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})z+(\gamma-\alpha)\overline{z}+\gamma_0-\alpha_0=0$ третьей радикальной оси является следствием уравнений (17.4). Их система даёт искомую координату

$$z_0=\frac{\begin{vmatrix} \alpha_0-\beta_0 & \alpha-\beta\\ \beta_0-\gamma_0 & \beta-\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{\alpha}-\overline{\beta} & \alpha-\beta\\ \overline{\beta}-\overline{\gamma} & \beta-\gamma \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_0 & 1\\ \beta & \beta_0 & 1\\ \gamma & \gamma_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \overline{\alpha} & 1\\ \beta & \overline{\beta} & 1\\ \gamma & \overline{\gamma} & 1 \end{vmatrix}}. \tag{17.5}$$

Если первая окружность единичная: $z\overline{z}-1=0$, то

$$z_0=\frac{\beta(1+\gamma_0)-\gamma(1+\beta_0)}{\beta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\beta}}. \tag{17.6}$$

С помощью радикального центра легко построить радикальную ось двух непересекающихся окружностей. Для этого достаточно провести произвольную окружность, пересекающую две данные, и построить радикальный центр этих трёх окружностей (рис. 46).

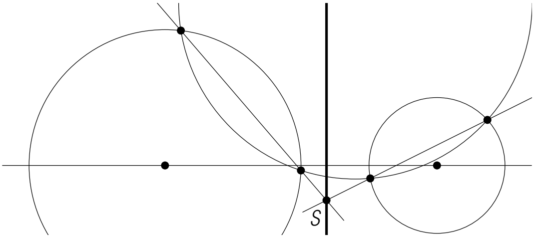

Рис. 46

17.4. Пучки окружностей. Возьмём две неконцентрические окружности

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0 \quad \text{и} \quad z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0=0$$

и рассмотрим множество окружностей, заданное уравнением

$$\lambda(z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0)+(1-\lambda)(z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0)=0, \qquad (17.7)$$

где λ — действительный параметр, $\lambda=\overline{\lambda}$. Это множество замечательно тем, что любые две его окружности имеют одну и ту же радикальную ось. В самом деле, если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то радикальная ось окружностей, соответствующих λ_1 и λ_2, имеет уравнение

$$(\lambda_1\overline{\alpha}+(1-\lambda_1)\overline{\beta}-\lambda_2\overline{\alpha}-(1-\lambda_2)\overline{\beta})z+(\lambda_1\alpha+(1-\lambda_1)\beta-\lambda_2\alpha-(1-\lambda_2)\beta)\overline{z}+$$
$$+\lambda_1\alpha_0+(1-\lambda_1)\beta_0-\lambda_2\alpha_0-(1-\lambda_2)\beta_0=0.$$

В левой части можно выделить множитель $\lambda_1-\lambda_2$, сокращая на который, получаем уравнение

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\alpha-\beta)\overline{z}+\alpha_0-\beta_0=0. \qquad (17.8)$$

Таким образом, радикальная ось двух произвольных окружностей из семейства (17.7) совпадает с радикальной осью двух данных окружностей (не зависит от λ).

Определение. Множество окружностей, каждая пара которых имеет одну и ту же радикальную ось, называется *пучком окружностей*.

Центр произвольной окружности пучка (17.7) имеет комплексную координату $-\lambda\alpha+(\lambda-1)\beta$, а, значит, коллинеарен с центрами двух первоначально взятых окружностей. Следовательно, центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой — *линии центров пучка*. Она имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ -\alpha & -\overline{\alpha} & 1 \\ -\beta & -\overline{\beta} & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=0. \qquad (17.9)$$

Пучок окружностей задаётся любыми двумя его окружностями. Если две окружности пересекаются, то любая окружность пучка обязательно содержит их точки пересечения. Такой пучок называется *эллиптическим* (рис. 47). Если две окружности касаются, то любая окружность определяемого ими пучка касается их в той же точке (рис. 48). Такой пучок называется *параболическим*. Если же две окружности не имеют общих точек, то любые две окружности заданного ими пучка также не имеют общих точек (рис. 49). Такой пучок называется *гиперболическим*.

Точка пересечения радикальной оси пучка окружностей и его линии центров называется центром пучка. Из системы уравнений (17.3) и (17.9) находим его координату c:

$$c=\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta-\alpha_0+\beta_0}{2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}. \tag{17.10}$$

Через каждую точку плоскости, не принадлежащую радикальной оси пучка окружностей, проходит одна и только одна окружность этого пучка. Соответствующее ей значение параметра λ определяется подстановкой в (17.7) координаты данной точки. Построение окружности эллиптического или параболического пучка, проходящей через данную точку, легко выполняется с помощью его характеристических точек — общих точек всех окружностей пучка. Для гиперболического пучка это делается иначе, о чём будет сказано ниже.

17.5. Ортогональные пучки окружностей. Если окружность $z\overline{z}+\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z}+\gamma_0=0$ одновременно ортогональна окружностям $z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0$ и $z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0=0$, то она ортогональна любой окружности заданного ими пучка

$$\lambda(z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0)+(1-\lambda)(z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\beta_0)=0.$$

В самом деле, согласно (14.9), имеем:

$$\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\gamma=\alpha_0+\gamma_0 \quad \text{и} \quad \beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma=\beta_0+\gamma_0.$$

Тогда будет выполнено условие ортогональности окружности $z\overline{z}+\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z}+\gamma_0=0$ и произвольной окружности пучка:

$$\overline{\gamma}(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)+\gamma(\lambda\overline{\alpha}+(1-\lambda)\overline{\beta})=\gamma_0+\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0.$$

Действительно, это равенство эквивалентно такому:

$$\lambda(\gamma\overline{\alpha}+\overline{\gamma}\alpha)+(1-\lambda)(\gamma\overline{\beta}+\overline{\gamma}\beta)=\gamma_0+\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0,$$

а оно верно в силу данных условий ортогональности. ■

Центр окружности, ортогональной каждой окружности пучка, лежит на его радикальной оси, так как

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(-\gamma)+(\alpha-\beta)(-\overline{\gamma})+\alpha_0-\beta_0=-(\gamma\overline{\alpha}+\overline{\gamma}\alpha)+(\gamma\overline{\beta}+\overline{\gamma}\beta)+\alpha_0-\beta_0=$$
$$=-(\alpha_0+\gamma_0)+(\beta_0+\gamma_0)+\alpha_0-\beta_0=0.$$

Нетрудно проверить, что если окружность с центром на радикальной оси пучка окружностей ортогональна одной окружности пучка, то она ортогональна и каждой окружности этого пучка.

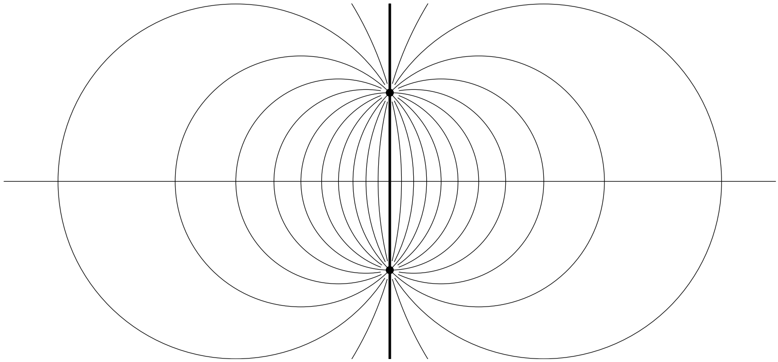

Рис. 47

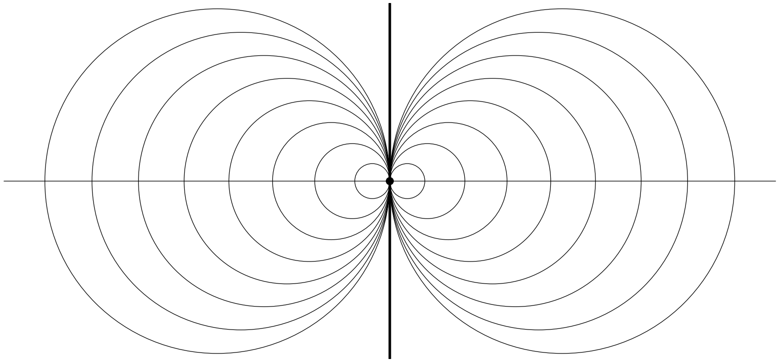

Рис. 48

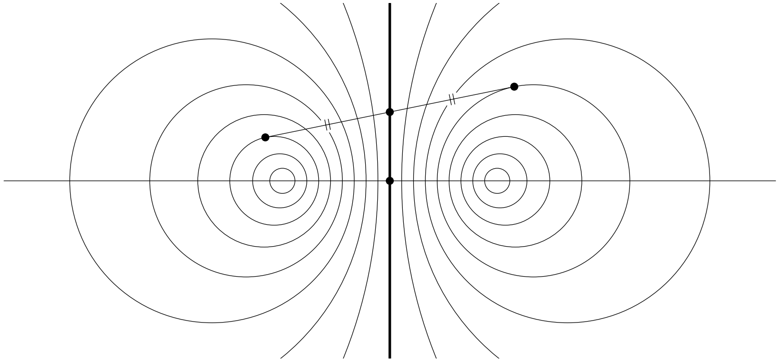

Рис. 49

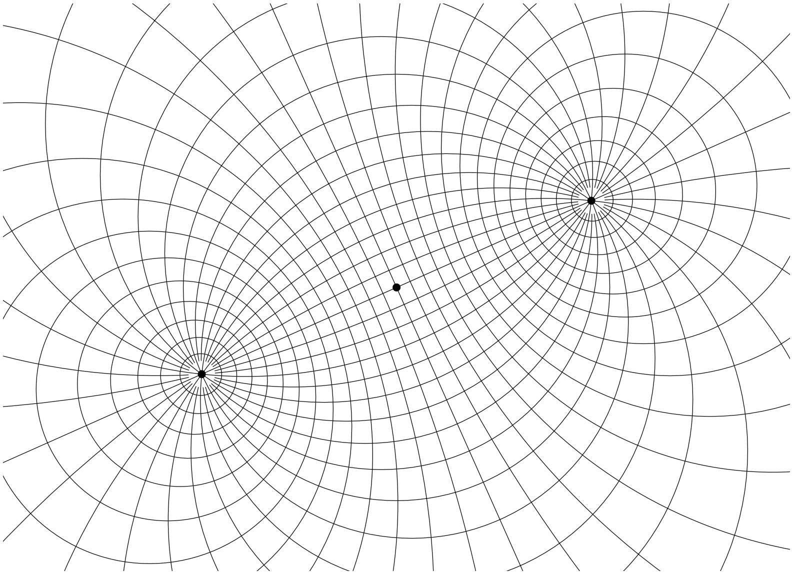

Рис. 50

Множество всех окружностей, ортогональных окружностям данного пучка, образует пучок окружностей (рис. 50).

■ Пусть окружность $z\overline{z}+\overline{s}z+s\overline{z}+\mu=0$, $\mu=\overline{\mu}$, ортогональна окружности $z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha_0=0$ пучка (17.7), т. е.

$$\alpha\overline{s}+\overline{\alpha}s=\alpha_0+\mu,$$

и её центр лежит на радикальной оси этого пучка:

$$(\alpha-\beta)(-\overline{s})+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(-s)+\alpha_0-\beta_0=0.$$

Выразим из этих уравнений параметр s:

$$s=\frac{\alpha(\alpha_0-\beta_0)-(\alpha-\beta)(\alpha_0+\mu)}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}.$$

Тогда уравнение $z\overline{z}+\overline{s}z+s\overline{z}+\mu=0$ примет вид

$$z\overline{z}+\frac{\alpha_0\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta_0-\mu(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}z+\frac{\alpha_0\beta-\alpha\beta_0-\mu(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}\overline{z}+\mu=0, \quad (17.11)$$

где μ — действительный параметр. Множество окружностей (17.11) есть пучок, так как любые две окружности (при $\mu_1\neq\mu_2$) имеют одну и ту же радикальную ось:

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=0,$$

совпадающую с линией центров данного пучка (17.7). ■

Если данный пучок окружностей гиперболический, то ортогональный ему пучок окружностей является эллиптическим, и наоборот. Для параболического пучка ортогональный ему пучок также будет параболическим. Доказательство этих утверждений не приводим.

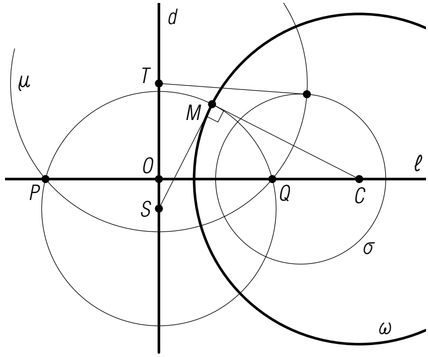

Рис. 51

З а д а ч а. Гиперболический пучок окружностей задан окружностью σ и его радикальной осью d. Построить окружность этого пучка, проходящую через данную точку M.

■ Проведём произвольную окружность μ ортогонального данному пучку (рис. 51), которая пересекает линию l центров данного пучка в точках P и Q. Они являются общими точками всех окружностей ортогонального (эллиптического) пучка, которому принадлежит и окружность PQM с центром S ($S \in d$). Ортогональная ей окружность ω, проходящая через данную точку M, является искомой. Её центр C принадлежит прямой l и $CM \perp SM$. ■

Задачи

3.37. Найдите множество точек, для каждой из которых разность степеней относительно двух данных окружностей имеет заданную величину.

3.38. Найдите множество точек, для каждой из которых отношение степеней относительно двух данных окружностей имеет заданную величину.

3.39. Докажите, что множество окружностей, проходящих через данную точку и пересекающих данную окружность в двух диаметрально противоположных точках, есть эллиптический пучок.

3.40. Постройте окружность, принадлежащую заданному пучку и касающуюся данной прямой.

Глава 4

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

§ 18. Подобия и движения

18.1. Первоначальные сведения о преобразованиях подобия. *Преобразованием подобия* (или *подобием*) называется преобразование, которое каждые две точки A и B отображает в такие две точки A' и B', что $A'B' = kAB$, где k — постоянное действительное положительное число, называемое коэффициентом подобия.

В частности, при $k=1$ расстояния AB и $A'B'$ равны, т. е. подобие является *движением*. Гомотетия с коэффициентом k ($k \neq 0$) является подобием с коэффициентом $|k|$.

Фигура F' называется подобной фигуре F, если существует подобие, отображающее F в F'. В частности, подобные треугольники являются соответственными при подобии.

Преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, есть также подобие с коэффициентом $\dfrac{1}{k}$. Композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом $k_1 k_2$. Поэтому отношение подобия на множестве всех фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Существует два рода подобий плоскости. Подобие первого рода отображает каждый треугольник в одинаково ориентированный с ним (подобный) треугольник, а подобие второго рода меняет ориентацию каждого треугольника на противоположную.

Из определения подобия сразу следует, что оно отображает прямую в прямую, отрезок в отрезок и сохраняет отношение любых двух отрезков, коллинеарных векторов.

Преобразование подобия плоскости задаётся тремя парами соответственных точек: $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, заданных так, что треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC. Однако если род подобия указан (известен), то для его задания достаточно наличия двух пар соответственных точек.

18.2. Формулы подобий. Составим формулы подобия первого и второго рода, обозначая через z и z' координаты соответственных точек M и M'. На основании (8.1) при одинаковой ориентации треугольников ABM и $A'B'M'$ имеем:

$$\frac{z'-a'}{z-a}=\frac{b'-a'}{b-a}=\sigma,$$

откуда

$$z'=\sigma z+\rho, \quad \rho=a'-\sigma a. \tag{18.1}$$

При противоположных ориентациях этих треугольников получаем:

$$\frac{z'-a'}{\overline{z}-\overline{a}}=\frac{b'-a'}{\overline{b}-\overline{a}}=\sigma,$$

откуда

$$z'=\sigma\overline{z}+\rho, \quad \rho=a'-\sigma\overline{a}. \tag{18.2}$$

Формулы (18.1) и (18.2) сохраняют силу и для всех точек M прямой AB. Действительно, в силу инвариантности отношения коллинеарных векторов

$$\frac{z-a}{b-a}=\frac{z'-a'}{b'-a'}.$$

Вследствие коллинеарности точек A, B, M

$$\frac{z-a}{b-a}=\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

Поэтому

$$\frac{z'-a'}{z-a}=\frac{b'-a'}{b-a}, \qquad \frac{z'-a'}{\overline{z}-\overline{a}}=\frac{b'-a'}{\overline{b}-\overline{a}},$$

откуда и следуют (18.1) и (18.2).

Итак, при подобии плоскости $M(z)\mapsto M(z')$ комплексные координаты z и z' связаны формулой (18.1) для подобия первого рода и формулой (18.2) для подобия второго рода.

Проведём обратное рассуждение: пусть преобразование плоскости определено одной из формул

$$z'=\sigma z+\rho \quad \text{или} \quad z'=\sigma\overline{z}+\rho,$$

где σ и ρ — постоянные комплексные числа, $\sigma\neq 0$. Тогда это преобразование является подобием, соответственно, первого или второго рода. Действительно, если точки $A(a)$ и $B(b)$ переходят в точки $A'(a')$ и $B'(b')$, то при первом преобразовании $|a'-b'|=|\sigma|\cdot|a-b|$, а при втором $|a'-b'|=|\sigma|\cdot|\overline{a}-\overline{b}|=|\sigma|\cdot|a-b|$. Следовательно, в обоих случаях $|A'B'|=|\sigma|\cdot|AB|$. А это — характеристическое свойство подобий согласно определению подобия.

Очевидно, если $|\sigma|=k=1$, то формулами (18.1) и (18.2) задаются движения плоскости первого и второго рода соответственно.

18.3. Угол подобия. Возьмём прямую (§ 11)

$$\bar{p}z+p\bar{z}+q=0, \quad q=\bar{q}. \tag{18.3}$$

Из формулы (18.1) $z=(z'-\rho)/\sigma$, что при подстановке в уравнение (18.3) даёт уравнение образа прямой (18.3):

$$\bar{\sigma}\bar{p}z+\sigma p\bar{z}+(\sigma\bar{\sigma}q-\bar{\sigma}\bar{p}\rho-\sigma p\bar{\rho})=0, \tag{18.4}$$

где штрихи опущены. Это уравнение определяет *прямую*, поскольку коэффициенты при z и $\bar{z}$ комплексно сопряжены и свободный член — число действительное (сопряжено само себе). При подобиях второго рода (18.2) образом прямой (18.3) является прямая

$$\bar{\sigma}pz+\sigma\overline{pz}+(\sigma\bar{\sigma}q-\sigma\bar{p}\bar{\rho}-\bar{\sigma}p\rho)=0. \tag{18.5}$$

Нетрудно заметить, что в коэффициенты уравнений прямых (18.3), (18.4), (18.5) таковы, что согласно признаку (12.4) параллельности прямых, *образы параллельных прямых параллельны.*

Ориентированный угол между любой прямой (18.3) *и её образом* (18.4) *при подобии* $z'=\sigma z+\rho$ *первого рода постоянен и равен* $\alpha=\arg\sigma$. В самом деле, согласно (12.2), этот угол равен $\alpha=\arg\dfrac{\sigma p}{p}=\arg\sigma$. Он называется *углом подобия первого рода.* Для подобий второго рода это свойство не выполняется, так как ориентированный угол между прямой и её образом равен $\arg\dfrac{\sigma\bar{p}}{p}$, и поэтому зависит от p, т. е. от выбора прямой. Однако и подобие второго рода связано с некоторым постоянным углом. В самом деле, прямая m, симметричная относительно оси Ox прямой (l) $\bar{p}z+p\bar{z}+q=0$, имеет уравнение $\overline{pz}+pz+q=0$. Поэтому ориентированный угол между образом прямой l при симметрии с осью Ox и образом (18.5) прямой l при подобии второго рода равен $\arg\dfrac{\sigma\bar{p}}{\bar{p}}=\arg\sigma=\alpha$.

18.4. Частные случаи подобий первого рода. *Неподвижные точки* подобий находятся с помощью формул (18.1) и (18.2) при условии $z'=z$. Для подобия первого рода при $\sigma\neq 1$ неподвижная точка S, называемая *центром подобия,* имеет координату

$$s=\frac{\rho}{1-\sigma}. \tag{18.6}$$

Эта формула позволяет построить центр S подобия первого рода по коэффициентам σ и ρ. Для этого сначала построим точку с координатой $1-\sigma$, а затем, пользуясь способом подобных треугольников (§ 1), построим частное $\dfrac{\rho}{1-\sigma}$ (рис. 52).

Если $\sigma=1$, то формула (18.1) принимает вид:

$$z'=z+\rho. \tag{18.7}$$

Этой формулой задаётся *перенос* на вектор, соответствующий комплексному числу ρ, так как $z'-z=\rho=\text{const}$.

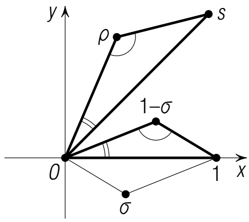

Рис. 52

Пусть $|\sigma|=1$, но $\sigma\neq 1$. Тогда подобие (18.1) первого рода является движением с одной неподвижной точкой S (18.6), причём ориентированный угол между любой прямой и её образом равен $\alpha=\arg\sigma$. Следовательно, при $|\sigma|=1$ и $\sigma\neq 1$ формулой $z'=\sigma z+\rho$ задаётся *поворот* с центром $s=\rho/(1-\sigma)$ на угол $\alpha=\arg\sigma$.

Очевидно, $\sigma z+\rho=\sigma z+(1-\sigma)\dfrac{\rho}{1-\sigma}$. Поэтому поворот с центром $s=\rho/(1-\sigma)$ записывается формулой

$$z'=\sigma z+(1-\sigma)s, \quad |\sigma|=1, \quad \sigma\neq 1. \qquad (18.8)$$

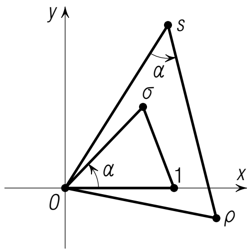

Рис. 53

В этой формуле параметр s можно рассматривать независимым от σ. Тогда она включает и *тождественное* движение при $\sigma=1$. Если $\sigma=-1$, то она определяет *центральную симметрию*

$$z'=-z+\rho \qquad (18.9)$$

с центром $\rho/2$.

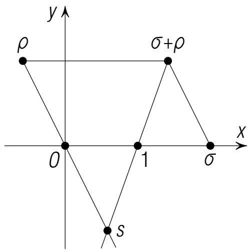

Рис. 54

По коэффициентам σ и ρ формулы $z'=\sigma z+$ $+\rho$ поворота легко строится его центр s. В самом деле, так как $|\sigma|=1$, треугольник с вершинами в точках 0, 1, σ — равнобедренный с углом $\alpha=\arg\sigma$ при вершине O (рис. 53). При $z=0$ получаем $z'=\rho$, поэтому треугольник с вершинами в точках 0, ρ, s также равнобедренный с тем же углом α при вершине s. Отсюда вытекает способ построения точки s по точкам 0, 1, σ, ρ.

Пусть теперь в формуле (18.1) коэффициент σ — *действительное* число, отличное от нуля и единицы. Представляя снова эту формулу в виде

$$z'=\sigma z+(1-\sigma)s, \quad \sigma=\overline{\sigma}, \qquad (18.10)$$

где $s=\rho/(1-\sigma)$ — центр подобия, получаем, что точки z, z', s коллинеарны. Следовательно, подобие (18.1) является *гомотетией* с центром s и коэффициентом σ, через которые она записывается формулой (18.10).

Как по точкам σ и ρ построить центр s гомотетии? Точки O и ρ, 1 и $\sigma+\rho$ — соответственные при гомотетии $z'=\sigma z+\rho$, $\sigma=\overline{\sigma}$, поэтому её центр s есть общая точка прямых, одна из которых содержит точки O и ρ, а другая — точки 1 и $\sigma+\rho$ (рис. 54).

7—7685.—Я. П. Понарин.

18.5. Частные случаи подобий второго рода. Исследуем на неподвижные точки подобие второго рода $z'=\sigma\bar{z}+\rho$. При $z'=z$ получаем

$$z=\sigma\bar{z}+\rho. \tag{18.11}$$

Отсюда $\bar{z}=\bar{\sigma}z+\bar{\rho}$, и при подстановке в (18.11) имеем уравнение относительно z для неподвижных точек подобия второго рода:

$$z(1-\sigma\bar{\sigma})=\rho+\sigma\bar{\rho}. \tag{18.12}$$

Возможны три случая.

1. Если $\rho+\sigma\bar{\rho}=0$, $\rho\neq 0$, то отсюда $\bar{\rho}+\bar{\sigma}\rho=0$ и $\rho\bar{\rho}=\sigma\bar{\sigma}\rho\bar{\rho}$, поэтому $\sigma\bar{\sigma}=1$, т. е. $|\sigma|=1$. В этом случае условие (18.12) выполняется при всех z, а уравнение (18.11) задаёт прямую линию, так как его можно представить в форме $\bar{\rho}z-\sigma\bar{\rho}\bar{z}-\rho\bar{\rho}=0$ приведённого уравнения (11.5) прямой, поскольку $\rho=-\sigma\bar{\rho}$. Итак, при $\rho+\sigma\bar{\rho}=0$ подобие $z'=$ $=\sigma\bar{z}+\rho$ второго рода является движением и имеет прямую (18.11) неподвижных точек, т. е. представляет собой *симметрию* относительно этой прямой. Ось симметрии проходит через точку $\frac{1}{2}\rho$. Используя условие $\rho+\sigma\bar{\rho}=0$, уравнение $z=\sigma\bar{z}+\rho$ оси симметрии $z'=\sigma\bar{z}+\rho$ можно привести к виду

$$\bar{\rho}z+\rho\bar{z}=\rho\bar{\rho}.$$

Она проходит через точку $\frac{1}{2}\rho$ и перпендикулярна вектору ρ.

2. Если $\rho+\sigma\bar{\rho}\neq 0$, но $\sigma\bar{\sigma}=1$, то условие (18.12) противоречиво. Значит, в этом случае подобие второго рода является движением, не имеющим неподвижных точек, т. е. представляет собой *переносную симметрию*.

3. При $1-\sigma\bar{\sigma}\neq 0$, т. е. $|\sigma|\neq 1$, подобие второго рода имеет единственную неподвижную точку — *центр подобия*,

$$s=\frac{\rho+\sigma\bar{\rho}}{1-\sigma\bar{\sigma}}. \tag{18.13}$$

Займёмся подробнее переносной симметрией

$$z'=\sigma\bar{z}+\rho, \quad \rho+\sigma\bar{\rho}\neq 0, \quad |\sigma|=1. \tag{18.14}$$

Эту формулу можно представить, очевидно, в такой форме:

$$z'=\sigma\bar{z}+\omega+(\rho-\omega).$$

Параметр ω определяется из условия $\omega+\sigma\bar{\omega}=0$, так чтобы преобразование $z_1=\sigma\bar{z}+\omega$ было осевой симметрией, а вектор $\rho-\omega$ был параллелен её оси $z=\sigma\bar{z}+\omega$, или $\bar{\omega}z-\sigma\bar{\omega}\bar{z}-\omega\bar{\omega}=0$. Указанное требование параллельности эквивалентно требованию перпендикулярности нормального вектора $-\sigma\bar{\omega}=\omega$ прямой и вектора $\rho-\omega$: $\bar{\omega}(\rho-\omega)+\omega(\bar{\rho}-\bar{\omega})=0$.

Решая систему

$$\begin{cases} \overline{\omega}(\rho-\omega)+\omega(\overline{\rho}-\overline{\omega})=0, \\ \omega+\sigma\overline{\omega}=0, \end{cases}$$

находим $\omega=\dfrac{1}{2}(\rho-\sigma\overline{\rho})$, $\rho-\omega=\dfrac{1}{2}(\rho+\sigma\overline{\rho})$. Таким образом, формулу (18.14) переносной симметрии мы представили в виде

$$z'=\sigma\overline{z}+\frac{1}{2}(\rho-\sigma\overline{\rho})+\frac{1}{2}(\rho+\sigma\overline{\rho}), \quad \rho+\sigma\overline{\rho}\neq 0.$$

Это показывает, что она является композицией осевой симметрии

$$z_1=\sigma\overline{z}+\frac{1}{2}(\rho-\sigma\overline{\rho}) \tag{18.15}$$

относительно прямой

$$z=\sigma\overline{z}+\frac{1}{2}(\rho-\sigma\overline{\rho}) \tag{18.16}$$

и переноса $z'=z_1+\dfrac{1}{2}(\rho+\sigma\overline{\rho})$ на вектор $\dfrac{1}{2}(\rho+\sigma\overline{\rho})$, параллельный этой прямой. Ось проходит через точку $\rho/2$.

Задача 1. Написать формулу осевой симметрии, если уравнение её оси $\overline{p}z+p\overline{z}+q=0$, $q=\overline{q}$.

■ Если $M'(z')$ — образ точки $M(z)$ при осевой симметрии с осью l, то точка $M_0\left(\dfrac{z+z'}{2}\right)$ лежит на l и вектор $\overrightarrow{M'M}$ перпендикулярен l. Эти два условия дают систему

$$\begin{cases} \overline{p}\dfrac{z+z'}{2}+p\dfrac{\overline{z}+\overline{z}'}{2}+q=0. \\ p(\overline{z}-\overline{z}')-\overline{p}(z-z')=0. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем: $\overline{p}z'+p\overline{z}+q=0$, откуда

$$z'=-\frac{p}{\overline{p}}\overline{z}-\frac{q}{\overline{p}}. \quad ■ \tag{18.17}$$

Задача 2. Найти формулу осевой симметрии, если точки $A(a)$ и $B(b)$ переходят при ней друг в друга.

■ Осевая симметрия описывается формулой $z'=\sigma\overline{z}+\rho$ при $\rho+\sigma\overline{\rho}=0$. Следует выразить σ и ρ через a и b. Поскольку $b=\sigma\overline{a}+\rho$ и $a=\sigma\overline{b}+\rho$, то $b-a=\sigma(\overline{a}-\overline{b})$, откуда $\sigma=-\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}$, а тогда $\rho=b-\sigma\overline{a}=\dfrac{a\overline{a}-b\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}$. Таким образом,

$$z'=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\overline{z}+\frac{a\overline{a}-b\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}. \tag{18.18}$$

7*—7685.—Я. П. Понарин.

Условие $\rho+\sigma\overline{\rho}=0$ выполняется:

$$\frac{a\overline{a}-b\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\cdot\frac{a\overline{a}-b\overline{b}}{a-b}=0. \qquad \blacksquare$$

Задача 3. Написать формулу осевой симметрии, ось которой проходит через точки $A(a)$ и $B(b)$.

Решение аналогично предыдущему. Ответ:

$$z'=\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\overline{z}+\frac{\overline{a}b-a\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}. \tag{18.19}$$

Задача 4. Составить формулу переносной симметрии, если дана её ось $\overline{p}z+p\overline{z}+q=0$, $q=\overline{q}$, и вектор переноса, соответствующий комплексному числу r.

■ Переносная симметрия есть композиция осевой симметрии (18.17) и переноса $z'=z+r$, которые перестановочны. При подстановке в (18.17) вместо $\overline{z}$ числа $\overline{z}+\overline{r}$ получаем:

$$z'=-\frac{p}{\overline{p}}(\overline{z}+\overline{r})-\frac{q}{\overline{p}}.$$

Поскольку векторы p и r перпендикулярны, то $-p\overline{r}=\overline{p}r$, и поэтому

$$z'=-\frac{p}{\overline{p}}\overline{z}+r-\frac{q}{\overline{p}}, \tag{18.20}$$

или $\overline{p}z'+p\overline{z}+q=\overline{p}r$. Условие $\rho+\sigma\overline{\rho}\neq 0$ выполнено:

$$r-\frac{q}{\overline{p}}-\frac{p}{\overline{p}}\left(\overline{r}-\frac{q}{p}\right)=r-\frac{p\overline{r}}{\overline{p}}=2r\neq 0. \qquad \blacksquare$$

Задача 5. Фигуры F и F_1 являются соответственными при подобии первого рода. От произвольной точки O откладываются векторы $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{XX_1}$, где X и X_1 — соответственные точки фигур F и F_1. Доказать, что для всевозможных точек X, множество точек M есть фигура Φ, подобная фигуре F.

■ Пусть $F\mapsto F_1$ при подобии $z_1=\sigma z+\rho$ первого рода. Тогда $z_1-z=(\sigma-1)z+\rho$, а значит, $m=(\sigma-1)z+\rho$, где m — координата точки $M\in\Phi$. Это означает, что $\Phi\backsim F$, коэффициент подобия равен $|\sigma-1|$. ■

Задача 6. Доказать, что подобие первого рода сохраняет двойное отношение четырёх точек плоскости.

■ Пусть A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при подобии $z'=\sigma z+\rho$. Тогда $a'=\sigma a+\rho$, $b'=\sigma b+\rho$, $c'=\sigma c+\rho$, $d'=\sigma d+\rho$. Находим:

$$\frac{a'-c'}{b'-c'}:\frac{a'-d'}{b'-d'}=$$

$$=\frac{(\sigma a+\rho)-(\sigma c+\rho)}{(\sigma b+\rho)-(\sigma c+\rho)}:\frac{(\sigma a+\rho)-(\sigma d+\rho)}{(\sigma b+\rho)-(\sigma d+\rho)}=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}. \qquad \blacksquare$$

Задачи

4.1. Комплексные числа $a=1+2i$ и $c=3+6i$ являются координатами противоположных вершин квадрата. Найдите координаты остальных вершин этого квадрата.

4.2. Найдите центр поворота, который отображает отрезок AB в данный отрезок CD, если известны комплексные координаты точек A, B, C, D.

4.3. Стороны двух равных правильных треугольников соответственно перпендикулярны. В каком отношении сторона одного треугольника делится двумя сторонами другого, если эти треугольники имеют общий центр?

4.4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямые, проходящие через точку B, вторично пересекают окружности в точках, которые являются соответственными при подобии с центром A, отображающем одну из окружностей в другую.

4.5. Дан треугольник ABC и точка M. Докажите, что треугольник с вершинами в центроидах треугольников BCM, CAM и ABM гомотетичен треугольнику ABC. Найдите коэффициент и центр гомотетии.

4.6. Две данные прямые l и t непараллельны. Найдите множество четвёртых вершин квадратов, для каждого из которых две вершины принадлежат прямой l, а третья — прямой t.

4.7. Окружности с центрами S и S_1 пересекаются в точках A и B. Прямая, содержащая точку A, пересекает окружности вторично в точках C и D соответственно. Отрезок CD делится точкой M в том же отношении, в котором середина хорды AB делит отрезок SS_1. Докажите, что множество точек M есть окружность с диаметром AB.

4.8. Одно подобие первого рода задано парами точек $A\mapsto A_1$ и $B\mapsto B_1$, другое — парами $A\mapsto B$ и $A_1\mapsto B_1$. Докажите, что эти подобия имеют общий центр.

4.9. Дано подобие первого рода и точка S. Найдите множество точек M таких, что прямые MM_1, соединяющие точки M с их образами M_1 при этом подобии, проходят через S.

§ 19. Представление подобий композициями гомотетий и движений. Оси подобий второго рода

19.1. Теоремы о классификации подобий. Будем вести речь только о подобиях, отличных от движений и гомотетий. Поэтому в формулах $z'=\sigma z+\rho$ и $z'=\sigma\bar{z}+\rho$ считаем $\sigma\neq\bar{\sigma}$ и $|\sigma|\neq 1$. Положим $\sigma=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)=k\varepsilon$, где $k=|\sigma|$, $\varepsilon=\cos\alpha+i\sin\alpha$, и запишем формулы подобий первого и второго рода так:

$$z'=k\left(\varepsilon z+\frac{\rho}{k}\right)\quad\text{и}\quad z'=k\left(\varepsilon\bar{z}+\frac{\rho}{k}\right). \tag{19.1}$$

Отсюда видно, что подобие первого рода есть композиция поворота $z_1=\varepsilon z+\rho/k$ около точки $\rho/(k-\sigma)$ на угол $\alpha=\arg\sigma$ и гомотетии $z'=kz_1$ с центром в начале координат и коэффициентом, равным коэффициенту подобия. Подобие второго рода представлено композицией движения второго рода $z_1=\varepsilon\bar{z}+\rho/k$ и гомотетии $z'=kz_1$.

Формулы подобий первого и второго рода можно представить также в форме

$$z'=\varepsilon z_1+\rho \quad \text{и} \quad z'=\varepsilon\bar{z}_1+\rho, \tag{19.2}$$

где $z_1=kz$. Следовательно, подобие первого и второго рода является композицией гомотетии $z_1=kz$ с центром в начале координат и коэффициентом, равным коэффициенту подобия; и движения, соответственно, первого или второго рода. Для подобия первого рода соответствующее движение $z'=\varepsilon z_1+\rho$ есть поворот с центром $\rho/(1-\varepsilon)$ на угол $\alpha=\arg\varepsilon=\arg\sigma$.

Однако гораздо больший интерес и практическую ценность имеют другие представления подобий, позволяющие их классифицировать.

Теорема 1. *Подобие первого рода, отличное от гомотетии и движения, является коммутативной композицией гомотетии и поворота с общим центром.*

■ Введя комплексный параметр δ, придадим формуле подобий первого рода такой вид:

$$z'=k\left(\varepsilon z+\frac{\rho}{k}-\delta\right)+k\delta. \tag{19.3}$$

Преобразование

$$z_1=\varepsilon z+\frac{\rho}{k}-\delta$$

есть поворот на угол α вокруг точки $\dfrac{\rho-k\delta}{k-\sigma}$. Преобразование $z'=kz_1+$ $+k\delta$ — гомотетия с центром $\dfrac{k\delta}{1-k}$. Имея в распоряжении параметр δ, потребуем, чтобы центры поворота и гомотетии совпадали:

$$\frac{\rho-k\delta}{k-\sigma}=\frac{k\delta}{1-k}=s,$$

откуда

$$\delta=\frac{\rho(1-k)}{k(1-\sigma)} \quad \text{и} \quad s=\frac{\rho}{1-\sigma}.$$

Таким образом, найдено желаемое представление подобия первого рода.

В полученной композиции гомотетия и поворот перестановочны, так как при указанном значении δ имеет место равенство:

$$\varepsilon(kz+k\delta)+\frac{\rho}{k}-\delta=\sigma z+\rho=z', \tag{19.4}$$

которое проверяется подстановкой $\delta=\dfrac{\rho(1-k)}{k(1-\sigma)}$. ■

Композиция гомотетии и поворота с общим центром называется *гомотетическим поворотом.*

Теорема 2. *Всякое подобие второго рода, отличное от движения, является коммутативной композицией гомотетии и осевой симметрии, ось которой содержит центр гомотетии.*

■ Формуле $z'=\sigma\bar{z}+\rho$ подобий второго рода придадим вид:

$$z'=k(\varepsilon\bar{z}+\rho/k-\mu)+k\mu, \tag{19.5}$$

где μ — неизвестное пока комплексное число. Потребуем, чтобы преобразование

$$z_1=\varepsilon\bar{z}+\rho/k-\mu$$

было осевой симметрией, т. е. чтобы $\rho/k-\mu+\varepsilon(\bar{\rho}/k-\bar{\mu})=0$, или $\rho+\varepsilon\bar{\rho}=k\mu+\sigma\bar{\mu}$, и чтобы её ось $z=\varepsilon\bar{z}+\rho/k-\mu$ содержала центр $k\mu/(1-k)=s$ гомотетии $z'=kz_1+k\mu$. Из системы полученных уравнений

$$\begin{cases} k\mu+\sigma\bar{\mu}=\rho+\varepsilon\bar{\rho}, \\ \dfrac{k\mu}{1-k}=\dfrac{\sigma\bar{\mu}}{1-k}+\dfrac{\rho}{k}-\mu \end{cases}$$

находим

$$\mu=\frac{\rho+\sigma\bar{\rho}}{k(1+k)}.$$

Поэтому ось симметрии имеет уравнение

$$kz=\sigma\bar{z}+\frac{k\rho-\sigma\bar{\rho}}{1+k} \tag{19.6}$$

и

$$s=\frac{\rho+\sigma\bar{\rho}}{1-k^2}=\frac{\rho+\sigma\bar{\rho}}{1-\sigma\bar{\sigma}}. \tag{19.7}$$

В полученной композиции осевая симметрия и гомотетия перестановочны. В самом деле, при найденном значении μ имеет место равенство:

$$\varepsilon(k\bar{z}+k\bar{\mu})+\rho/k-\mu=\sigma\bar{z}+\rho=z',$$

которое проверяется подстановкой. Но преобразование $\bar{z}_1=k\bar{z}+k\bar{\mu}$ есть та же самая гомотетия, что и ранее, а $z'=\varepsilon\bar{z}_1+\rho/k-\mu$ — прежняя осевая симметрия. ■

Композиция гомотетии и осевой симметрии, ось которой содержит центр гомотетии, называется *гомотетической симметрией.*

19.2. Оси подобия второго рода. Составим уравнения двойных прямых подобия $z'=\sigma\bar{z}+\rho$ второго рода, называемых его *осями.*

Согласно теореме 2 подобие второго рода есть коммутативная композиция осевой симметрии и гомотетии, центр которой лежит на оси симметрии. Очевидно, эта ось отображается в себя при данном подобии. Ясно также, что отображается в себя и прямая, перпендикулярная ей и проходящая через неподвижную точку (центр) подобия. Ось симметрии имеет уравнение (19.6)

$$kz-\sigma\overline{z}=\frac{k\rho-\sigma\overline{\rho}}{1+k}, \quad k=|\sigma|. \tag{19.6}$$

Следовательно, вторая двойная прямая будет иметь уравнение $k(z-s)+\sigma(\overline{z}-\overline{s})=0$, где $s=\dfrac{\rho+\sigma\overline{\rho}}{1-k^2}$, или

$$kz+\sigma\overline{z}=\frac{k\rho+\sigma\overline{\rho}}{1+k}. \tag{19.8}$$

Учитывая, что $\sigma=\varepsilon k$, уравнения двойных прямых подобия $z'=\sigma\overline{z}+\rho$ можно написать и так:

$$z=\varepsilon\overline{z}+\frac{\rho-\varepsilon\overline{\rho}}{1+k}, \tag{19.9}$$

$$z=-\varepsilon\overline{z}+\frac{\rho+\varepsilon\overline{\rho}}{1-k} \tag{19.10}$$

Теорема. *Множество точек $P(z)$, каждая из которых делит в отношении k или $-k$ отрезок, соединяющий произвольную точку $M'(z_0')$ с её прообразом $M(z_0)$ при подобии второго рода, есть двойная прямая этого подобия.*

■ В силу условия теоремы имеем равенство

$$z=\frac{z_0'+kz_0}{1+k}.$$

Так как $z_0'=\sigma\overline{z}_0+\rho$, после подстановки получаем:

$$(1+k)z=\sigma\overline{z}_0+\rho+kz_0.$$

Сделаем переход к сопряжённым комплексным числам:

$$(1+k)\overline{z}=\overline{\sigma}z_0+\overline{\rho}+k\overline{z}_0.$$

Исключим из полученной системы уравнений параметры z_0 и $\overline{z}_0$, для чего умножим первое уравнение на k, второе — на σ и вычтем из первого второе:

$$k(1+k)z-\sigma(1+k)\overline{z}=k\rho-\sigma\overline{\rho},$$

или

$$kz-\sigma\overline{z}=\frac{k\rho-\sigma\overline{\rho}}{1+k},$$

а это уравнение совпадает с уравнением (19.6) двойной прямой.

Аналогичным путём для отношения $-k$ получаем вторую двойную прямую:

$$kz+\sigma\overline{z}=\frac{k\rho+\sigma\overline{\rho}}{1-k}. \qquad ■$$

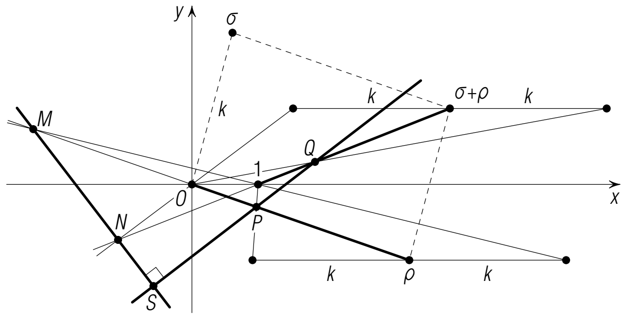

Рис. 55

Доказанное свойство даёт способ построения двойных прямых подобия второго рода и его центра. Можно использовать любые две пары соответственных точек, в частности, пары $0 \mapsto \rho$ и $1 \mapsto \sigma + \rho$. На рис. 55 построены точки P и Q, делящие отрезки $[\rho, 0]$ и $[\sigma+\rho, 1]$ в отношении $k{:}1$, и точки M и N, делящие эти же отрезки в отношении $(-k){:}1$, $k = |\sigma|$.

§ 20. Композиции подобий

20.1. Композиции подобий первого рода. Пусть даны два подобия φ_1 и φ_2 первого рода с формулами $z' = \sigma_1 z + \rho_1$ и $z' = \sigma_2 z + \rho_2$ соответственно. Формулу их композиции $\varphi_2 \circ \varphi_1$ мы получим, если во вторую подставим вместо z координату $\sigma_1 z + \rho_1$ образа точки $M(z)$ при подобии φ_1:

$$z' = \sigma_2(\sigma_1 z + \rho_1) + \rho_2.$$

Следовательно, формула композиции $\varphi_2 \circ \varphi_1$ заданных подобий имеет вид

$$z' = \sigma_1 \sigma_2 z + \sigma_2 \rho_1 + \rho_2 \tag{20.1}$$

(подобие φ_1 выполнено первым, подобие φ_2 — вторым). Из неё видно, что эта композиция также будет подобием первого рода с коэффициентом $k = |\sigma_1 \sigma_2| = |\sigma_1| \cdot |\sigma_2| = k_1 k_2$ и углом подобия $\alpha = \arg \sigma_1 \sigma_2 = \arg \sigma_1 + \arg \sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. Если $\sigma_1 \sigma_2 \neq 1$, т. е. когда композиция отлична от переноса, центр преобразования (20.1) имеет координату

$$s = \frac{\rho_2 + \sigma_2 \rho_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}. \tag{20.2}$$

Рассмотрим некоторые частные, но важные случаи.

1. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, то φ_1 и φ_2 — переносы на векторы ρ_1 и ρ_2. Тогда формула (20.1) композиции принимает вид $z' = z + (\rho_1 + \rho_2)$, а значит, композиция $\varphi_2 \circ \varphi_1$ есть перенос на вектор $\rho_1 + \rho_2$. Очевидно, в этом случае композиция коммутативна.

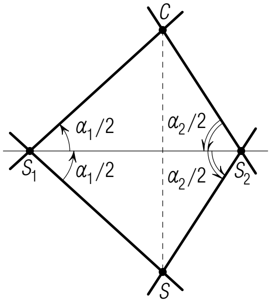

Рис. 56

2. Если $|\sigma_1|=|\sigma_2|=1$, но $\sigma_1\neq 1$ и $\sigma_2\neq 1$, то φ_1 и φ_2 — повороты на углы $\alpha_1=\arg\sigma_1$ и $\alpha_2=\arg\sigma_2$ с центрами $s_1=\dfrac{\rho_1}{1-\sigma_1}$ и $s_2=\dfrac{\rho_2}{1-\sigma_2}$. Тогда $|\sigma_1\sigma_2|=1$, и, согласно (20.1), композиция $\varphi_2\circ\varphi_1$ является *поворотом* при $\sigma_1\sigma_2\neq 1$ и *переносом* при $\sigma_1\sigma_2=1$ и $s_1\neq s_2$. Из равенства $\sigma_1\sigma_2=1$ следует $\arg\sigma_1+\arg\sigma_2=0$ или $\arg\sigma_1+\arg\sigma_2=2\pi$. Если $\sigma_1\sigma_2\neq 1$, то центром результирующего поворота является точка S с координатой (20.2). Из $s_1=s_2$ следует $s=s_1=s_2$.

Итак, *композицией двух поворотов с общим центром является поворот с тем же центром на угол, равный сумме углов данных поворотов. Композиция двух поворотов с различными центрами есть перенос, если сумма углов поворотов равна нулю или 2π, и поворот около нового центра в остальных случаях.*

Центр S композиции поворотов просто строится по центрам S_1 и S_2 и углам α_1 и α_2. В самом деле, если точка C — образ точки S при повороте около S_1 на угол α_1, то образом точки C при втором повороте будет точка S (рис. 56). Поэтому $SS_1=CS_1$ и $SS_2=CS_2$. Эти равенства говорят о том, что точки S и C симметричны относительно прямой S_1S_2, откуда получаем: $\overrightarrow{\widehat{SS_1S_2}}=\alpha_1/2$ и $\overrightarrow{\widehat{S_1S_2S}}=\alpha_2/2$. Эти углы и позволяют построить искомый центр S.

3. Если $\sigma_1\neq 1$, но $|\sigma|_1=\sigma_2=1$, то имеем композицию поворота и переноса, которая будет поворотом на тот же угол α_1 вокруг точки

$$s=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-\sigma_1}. \tag{20.3}$$

4. Если $\sigma_1=\overline{\sigma_1}=k_1$ и $\sigma_2=\overline{\sigma}_2=k_2$, но $\sigma_1\neq 1$, $\sigma_2\neq 1$, то φ_1 и φ_2 — гомотетии с коэффициентами k_1 и k_2. При $k_1k_2\neq 1$ их композицией будет также гомотетия с коэффициентом k_1k_2. Центры этих трёх гомотетий

$$s_1=\frac{\rho_1}{1-\sigma_1},\quad s_2=\frac{\rho_2}{1-\sigma_2},\quad s=\frac{\sigma_2\rho_1+\rho_2}{1-\sigma_1\sigma_2}$$

или совпадают (при $s_1=s_2$) или же коллинеарны (при $s_1\neq s_2$), так как

$$\begin{vmatrix} s_1 & \overline{s}_1 & 1\\ s_2 & \overline{s}_2 & 1\\ s & \overline{s} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(1-\sigma_1\sigma_2)}\begin{vmatrix}\rho_1 & \overline{\rho}_1 & 1-\sigma_1\\ \rho_2 & \overline{\rho}_2 & 1-\sigma_2\\ \sigma_2\rho_1+\rho_2 & \sigma_2\overline{\rho}_1+\overline{\rho}_2 & 1-\sigma_1\sigma_2\end{vmatrix}=0$$

(третья строка есть линейная комбинация первых двух).

При $k_1k_2=1$ композицией двух гомотетий будет перенос, если $s_1\neq s_2$, и тождественное преобразование, если $s_1=s_2$.

Композиция двух гомотетий с общим центром коммутативна. Композиция двух гомотетий с различными центрами некоммутативна.

5. При $\sigma_1=1$ и $\sigma_2=\overline{\sigma}_2$ имеем композицию переноса и гомотетии. Так как тогда $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2=\overline{\sigma}_2=\overline{\sigma_1\sigma_2}$, эта композиция есть гомотетия с новым центром.

6) Квадрат подобия второго рода $z'=\sigma\overline{z}+\rho$ имеет формулу

$$z'=k^2z+\rho+\sigma\overline{\rho} \tag{20.4}$$

и, следовательно, является гомотетией с тем же центром, что и данное подобие, и коэффициентом $k^2=\sigma\overline{\sigma}$. Центр подобия f второго рода совпадает с центром его квадрата f^2, т. е. с центром гомотетии (20.4), который несложно строится по её формуле (§ 18).

20.2. Композиции подобий первого и второго рода. Композиция подобий $z'=\sigma_1\overline{z}+\rho_1$ и $z'=\sigma_2\overline{z}+\rho_2$ второго рода записывается формулой

$$z'=\sigma_2(\overline{\sigma}_1z+\overline{\rho}_1)+\rho_2,$$

или

$$z'=\overline{\sigma}_1\sigma_2z+\sigma_2\overline{\rho}_1+\rho_2, \tag{20.5}$$

и, значит, является подобием первого рода с коэффициентом $k=$ $=|\overline{\sigma}_1\sigma_2|=k_1k_2$ и углом $\alpha=\arg\overline{\sigma}_1\sigma_2=\arg\sigma_2-\arg\sigma_1=\arg(\sigma_2/\sigma_1)$.

Пусть оба данных подобия будут осевыми симметриями, что имеет место при выполнении условий $\rho_1+\sigma_1\overline{\rho}_1=0$ и $\rho_2+\sigma_2\overline{\rho}_2=0$. Оси симметрий имеют уравнения

$$z=\sigma_1\overline{z}+\rho_1 \quad \text{и} \quad z=\sigma_2\overline{z}+\rho_2.$$

Из указанных условий следует $|\sigma_1|=|\sigma_2|=1$ (§ 18). Если $\overline{\sigma}_1\sigma_2=1$, то композиция осевых симметрий — перенос на вектор $\sigma_2\overline{\rho}_1+\rho_2$. При $\overline{\sigma}_1\sigma_2=1$ уравнение оси второй симметрии запишется так: $z=\overline{z}/\overline{\sigma}_1+\rho_2$, или $z=\sigma_2\overline{z}+\rho_2$. Следовательно, оси симметрий параллельны.

Когда $\overline{\sigma}_1\sigma_2\neq1$, т. е. когда оси симметрий непараллельны, их композиция является *поворотом* на угол $\alpha=\arg(\sigma_2/\sigma_1)$ с центром

$$s=\frac{\sigma_2\overline{\rho}_1+\rho_2}{1-\overline{\sigma}_1\sigma_2}=\frac{\overline{\rho}_1-\overline{\rho}_2}{\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1}, \tag{20.6}$$

являющимся точкой пересечения осей симметрий.

Из приведённых уравнений осей

$$\overline{\rho}_1z=\overline{\rho}_1\sigma_1\overline{z}+\rho_1\overline{\rho}_1 \quad \text{и} \quad \overline{\rho}_2z=\overline{\rho}_2\sigma_2\overline{z}+\rho_2\overline{\rho}_2.$$

находим угол ψ между ними:

$$\psi=\arg\frac{\overline{\rho}_2\sigma_2}{\overline{\rho}_1\sigma_1}=\arg\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

при этом

$$\alpha=\arg\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\arg\left(\frac{\rho_2}{\overline{\rho}_2}:\frac{\rho_1}{\overline{\rho}_2}\right)=2\arg\frac{\rho_2}{\rho_1}=2\psi.$$

Итак, *композиция двух осевых симметрий является переносом, если их оси параллельны, и поворотом вокруг точки пересечения осей на удвоенный угол от оси первой симметрии до оси второй симметрии в противном случае.*

Рассмотрим композицию подобия φ_1 первого рода $z'=\sigma_1 z+\rho_1$ и подобия φ_2 второго рода $z'=\sigma_2\bar{z}+\rho_2$. Она представляется формулой

$$z'=\sigma_2(\bar{\sigma}_1\bar{z}+\bar{\rho}_1)+\rho_2,$$

или

$$z'=\bar{\sigma}_1\sigma_2\bar{z}+\sigma_2\bar{\rho}_1+\rho_2, \tag{20.7}$$

а значит, является подобием второго рода.

В частности, если φ_1 — перенос ($\sigma_1=1$), а φ_2 — осевая симметрия ($\rho_2+\sigma_2\bar{\rho}_2=0$), то (20.7) принимает вид:

$$z'=\sigma_2\bar{z}+\sigma_2(\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2).$$

А это — переносная симметрия с вектором

$$\frac{1}{2}(\sigma_2(\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2)+\sigma_2\bar{\sigma}_2(\rho_1-\rho_2))=\frac{1}{2}(\rho_1+\sigma_2\bar{\rho}_1)$$

и осью

$$z=\sigma_2\bar{z}+\frac{1}{2}(\sigma_2\bar{\rho}_1-\rho_1)+\rho_2.$$

З а д а ч а 1. При каком условии композиция трёх гомотетий есть 1) перенос, 2) тождественное преобразование?

■ Композиция трёх гомотетий

$$z'=\sigma_1 z+\rho_1, \quad z'=\sigma_2 z+\rho_2, \quad z'=\sigma_3 z+\rho_3 \qquad (\sigma_i=\bar{\sigma}_i,\ i=1,2,3)$$

выражается формулой

$$z'=\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1 z+\rho_1)+\rho_2)+\rho_3,$$

или

$$z'=\sigma_1\sigma_2\sigma_3 z+\sigma_2\sigma_3\rho_1+\sigma_3\rho_2+\rho_3. \tag{20.10}$$

Это — тождественное преобразование, если

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3=1 \quad \text{и} \quad \sigma_3\sigma_2\rho_1+\sigma_3\rho_2+\rho_3=0.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\sigma_3\sigma_2(1-\sigma_1)s_1+\sigma_3(1-\sigma_2)s_2+(1-\sigma_3)s_3=0,$$

где

$$s_1=\frac{\rho_1}{1-\sigma_1}, \quad s_2=\frac{\rho_2}{1-\sigma_2}, \quad s_3=\frac{\rho_3}{1-\sigma_3}$$

— центры данных гомотетий, или

$$(\sigma_2\sigma_3-1)s_1+\sigma_3(1-\sigma_2)s_2+(1-\sigma_3)s_3=0,$$

откуда

$$s_1=\frac{\sigma_3(1-\sigma_2)s_2+(1-\sigma_3)s_3}{1-\sigma_2\sigma_3}.$$

Так как σ_1, σ_2, σ_3 — действительные числа и

$$\frac{\sigma_3(1-\sigma_2)+1-\sigma_3}{1-\sigma_2\sigma_3}=1,$$

точки s_1, s_2, s_3 коллинеарны, причём

$$\overrightarrow{S_2S_1}=\frac{1-\sigma_3}{\sigma_3(1-\sigma_2)}\overrightarrow{S_1S_3}.$$

Если же $\sigma_1\sigma_2\sigma_3=1$, но $\sigma_3\sigma_2\rho_1+\sigma_3\rho_2+\rho_3\neq 0$, то преобразование (20.10) есть перенос. ■

Задача 2. В каких случаях композиция двух подобий первого рода, отличных от гомотетий и переноса, есть 1) тождественное преобразование, 2) перенос, 3) поворот?

■ Пусть даны подобия первого рода $z'=\sigma_1 z+\rho_1$ и $z'=\sigma_2 z+\rho_2$. Если S_1 и S_2 — центры этих подобий, то

$$\rho_1=s_1(1-\sigma_1), \quad \rho_2=s_2(1-\sigma_2).$$

Следовательно, эти подобия можно записать так:

$$z'=\sigma_1 z+(1-\sigma_1)s_1 \quad \text{и} \quad z'=\sigma_2 z+(1-\sigma_2)s_2.$$

Их композиция имеет формулу

$$z'=\sigma_1\sigma_2 z+\sigma_2(1-\sigma_1)s_1+(1-\sigma_2)s_2.$$

Это есть тождественное преобразование, если $\sigma_1\sigma_2=1$ и $\sigma_2(1-\sigma_1)s_1+(1-\sigma_2)s_2=0$. Последнему равенству придадим вид $(\sigma_2-1)s_1+(1-\sigma_2)s_2=0$, или $(\sigma_2-1)(s_1-s_2)=0$. Так как $\sigma_2\neq 1$, то отсюда следует, что центры подобий совпадают: $s_1=s_2$.

Если $\sigma_1\sigma_2=1$, но $s_1\neq s_2$, то рассматриваемая композиция — перенос на вектор $(\sigma_1-1)(s_1-s_2)$.

В случае, если $\sigma_1\sigma_2\neq 1$, но $|\sigma_1\sigma_2|=1$, эта композиция есть поворот около точки

$$s=\frac{\sigma_2(1-\sigma_1)s_1+(1-\sigma_2)s_2}{1-\sigma_1\sigma_2}$$

на угол $\varphi=\arg\sigma_1+\arg\sigma_2$. ■

Задача 3. Доказать, что композиция четырёх симметрий, оси которых содержат стороны вписанного в окружность четырёхугольника, взятые последовательно, есть перенос.

■ Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $z\bar{z}=1$. Тогда, согласно (3.12), прямые AB, BC, CD, DA имеют, соответственно, уравнения

$$z=-ab\bar{z}+a+b, \qquad z=-bc\bar{z}+b+c,$$
$$z=-cd\bar{z}+c+d, \qquad z=-ad\bar{z}+a+d.$$

На основании (18.17) формулы симметрий относительно этих прямых таковы:

$$z' = -ab\bar{z} + a + b, \qquad z' = -bc\bar{z} + b + c,$$
$$z' = -cd\bar{z} + c + d, \qquad z' = -ad\bar{z} + a + d.$$

Последовательными подстановками находим формулу их композиции:

$$z' = -ad(-\bar{c}\bar{d}(-bc(-\bar{a}\bar{b}z + \bar{a} + \bar{b}) + b + c) + \bar{c} + \bar{d}) + d + a,$$

или окончательно

$$z' = z + (b - d)(a\bar{c} - 1).$$

Это есть перенос на вектор $(b-d)(a\bar{c}-1)$. ■

Задачи

4.10. Найдите композицию двух центральных симметрий с центрами A и B.

4.11. Докажите, что композиция трёх центральных симметрий есть центральная симметрия.

4.12. Найдите композицию симметрии относительно прямой AB и симметрии относительно точки A.

4.13. Определите взаимное расположение точки и прямой, если симметрии относительно них перестановочны.

4.14. Докажите, что всякое движение второго рода есть композиция осевой и центральной симметрии.

4.15. При каком условии композиция двух осевых симметрий коммутативна?

4.16. Дан отрицательно ориентированный четырёхугольник, у которого диагонали равны и перпендикулярны. Докажите, что композиция поворотов около последовательных вершин этого четырёхугольника на углы $\pi/2$ есть тождественное преобразование.

4.17. Докажите, что композиция симметрий относительно последовательных сторон вписанного в окружность многоугольника с чётным числом сторон есть параллельный перенос.

4.18. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 имеют общую точку P и пересекаются вторично в точках A_{12}, A_{23}, A_{31}. Из произвольной точки A окружности ω_1 проведены прямые AA_{12} и AA_{13}, которые вторично пересекают окружности ω_2 и ω_3 в точках B и C. Докажите, что точки B, C, A_{23} коллинеарны.

4.19. Три окружности ω_1, ω_2, ω_3 попарно касаются в точках C, A, B соответственно. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках M_1 и M_2. Прямая AM_2 пересекает окружность ω_3 в точке M_3, прямая BM_3 пересекает окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки M_1 и N диаметрально противоположны.

4.20. Окружности ω и ω_1 ортогонально пересекаются в точках A и B. Из произвольной точки C окружности ω проведены прямые CA и CB, которые вторично пересекают окружность ω_1 в точках A_1 и B_1. Докажите, что прямые AB_1 и A_1B пересекаются на окружности ω.

4.21. Четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 касаются последовательно внешним образом в точках A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}. Произвольная прямая, проходящая через A_{12}, пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках M_1 и M_2. Прямая M_2A_{23} пересекает окружность ω_3 в точке M_3, и прямая M_3A_{34} пересекает окружность ω_4 в точке M_4. Докажите, что точки M_4, A_{41}, M_1 коллинеарны.

4.22. Даны точки $A(a)$ и $B(b)$. Постройте точку $C(c)$ так, чтобы $a^2+ab+b^2=3c(a+b-c)$.

§ 21. Аффинные преобразования евклидовой плоскости

21.1. Формула и свойства аффинных преобразований. Одним из возможных обобщений преобразований подобия являются аффинные преобразования, отображающие (по их определению) каждую прямую на прямую. Нашей целью является построить их краткую теорию с помощью комплексных чисел.

Прежде всего необходимо иметь формулу аффинного преобразования, т. е. выражение комплексной координаты z' образа данной точки $M(z)$ через координату z этой точки M. Как известно, аффинное преобразование плоскости в аффинных (и в частности, в прямоугольных декартовых) координатах имеет формулы

$$\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1, \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2, \end{aligned} \qquad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{21.1}$$

Положим $a_1=u_1+v_1$, $b_1=v_2-u_2$, $a_2=u_2+v_2$, $b_2=u_1-v_1$. Числа u_1, v_1, u_2, v_2 отсюда определяются однозначно. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} x' &= (u_1+v_1)x+i^2(u_2-v_2)y+c_1, \\ y' &= (u_2+v_2)x+(u_1-v_1)y+c_2. \end{aligned}$$

Теперь находим $x'+iy'=(u_1+iu_2)(x+iy)+(v_1+iv_2)(x-iy)+(c_1+ic_2)$. Введя обозначения $u_1+iu_2=a$, $v_1+iv_2=b$, $c_1+ic_2=c$, получаем искомую формулу аффинных преобразований евклидовой плоскости:

$$z'=az+b\overline{z}+c, \quad a\overline{a}\neq b\overline{b}. \tag{21.2}$$

Определитель $\delta\neq 0$ аффинного преобразования (21.2) равен

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1+v_1 & v_2-u_2 \\ u_2+v_2 & u_1-v_1 \end{vmatrix} = (u_1^2+u_2^2)-(v_1^2+v_2^2)=a\overline{a}-b\overline{b}.$$

Найдя z из системы

$$\begin{cases} az+b\overline{z}+c=z', \\ \overline{b}z+\overline{a}\overline{z}+\overline{c}=\overline{z} \end{cases}$$

и поменяв местами z и z', получаем *формулу обратного преобразования*

$$z'=\frac{1}{\delta}(\overline{a}z-b\overline{z}+b\overline{c}-\overline{a}c). \tag{21.3}$$

Его определитель равен $\frac{1}{\delta^2}(a\overline{a}-b\overline{b})=\frac{1}{\delta}$. Формула (21.3) имеет тот же вид, что и (21.2). Следовательно, преобразование, обратное аффинному преобразованию, также аффинное.

При $b=0$ или $a=0$ аффинные преобразования являются *подобиями*, соответственно, первого или второго рода.

Переходим к рассмотрению свойств (инвариантов) аффинных преобразований плоскости.

Характеристическим свойством аффинного преобразования является то, что *оно отображает каждую прямую в прямую*. Именно этим свойством и были определены аффинные преобразования. Его выполнение может быть проверено с помощью формулы (21.2).

Другим важным инвариантом аффинных преобразований является параллельность прямых: *образы любых двух параллельных прямых параллельны*, в чём легко убедиться, рассуждая от противного.

Аффинное преобразование плоскости сохраняет отношение трёх точек прямой. В самом деле, пусть точки M, N, P коллинеарны. Тогда их образы M', N', P' также будут коллинеарны. Полагаем $p=\lambda m+(a-\lambda)n$, $\lambda=\overline{\lambda}$, и находим:

$$\frac{m'-p'}{n'-p'}=\frac{(am+b\overline{m}+c)-(ap+b\overline{p}+c)}{(an+b\overline{n}+c)-(ap+b\overline{p}+c)}=\frac{a(m-p)+b(\overline{m}-\overline{p})}{a(n-p)+b(\overline{n}-\overline{p})}.$$

Так как $m-p=(1-\lambda)(m-n)$ и $n-p=-\lambda(m-n)$,

$$\frac{m'-p'}{n'-p'}-\frac{(1-\lambda)(a(m-n)+b(\overline{m}-\overline{n}))}{-\lambda(a(m-n)+b(\overline{m}-\overline{n}))}=\frac{1-\lambda}{-\lambda}=\frac{m-p}{n-p}. \qquad \blacksquare$$

Пусть теперь точки M, N, P неколлинеарны. Тогда будут неколлинеарны и их образы M', N', P' при аффинном преобразовании (21.1). Найдём отношение площадей ориентированных треугольников $M'N'P'$ и MNP. Согласно формуле площади (§ 7),

$$S(M'N'P')=\frac{-i}{4}((m'-n')(\overline{m}'-\overline{p}')-(\overline{m}'-\overline{n}')(m'-p')).$$

Выполняя подстановки

$$\begin{aligned} m'&=am+b\overline{m}+c, & \overline{m}'&=\overline{a}\overline{m}+\overline{b}m+\overline{c},\\ n'&=an+b\overline{n}+c, & \overline{n}'&=\overline{a}\overline{n}+\overline{b}n+\overline{c},\\ p'&=ap+b\overline{p}+c, & \overline{p}'&=\overline{a}\overline{p}+\overline{b}p+\overline{c}, \end{aligned}$$

получаем:

$$S(M'N'P')=\frac{-i}{4}(a\overline{a}-b\overline{b})((m-n)(\overline{m}-\overline{p})-(\overline{m}-\overline{n})(m-p)),$$

т. е.

$$S(M'N'P')=\delta\, S(MNP). \qquad (21.4)$$

Итак, *отношение площади ориентированного треугольника к площади его прообраза при аффинном преобразовании равно определителю* δ *этого преобразования.*

Отсюда сразу следует, что *отношение площадей любых двух треугольников сохраняется при аффинном преобразовании плоскости*:

$$\frac{S(ABC)}{S(MNP)}=\frac{S(A'B'C')}{S(M'N'P')}. \tag{21.5}$$

Это свойство обобщается для площадей многоугольников и произвольных фигур, но доказательство этого в наши задачи не входит.

При $\delta=\pm1$ аффинное преобразование сохраняет площади фигур и называется *эквиаффинным* преобразованием.

Из соотношения (21.4) видно, что при $\delta>0$ треугольники MNP и $M'N'P'$ ориентированы одинаково, а при $\delta<0$ они ориентированы противоположно. Аффинные преобразования, сохраняющие ориентацию треугольников, называются аффинными преобразованиями первого рода, а изменяющие ориентацию треугольников на противоположную — аффинными преобразованиями второго рода. Следовательно, при $\delta>0$ преобразование (21.1) — первого рода, при $\delta<0$ — второго рода.

21.2. Задание аффинного преобразования. Для задания аффинного преобразования нужно указать конкретные значения коэффициентов a, b, c в формуле (21.1). Геометрически этого можно достигнуть, если указать образы M_1', M_2', M_3' трёх неколлинеарных точек M_1, M_2, M_3. Тогда получаем систему относительно a, b, c:

$$\begin{cases} az_1+b\overline{z}_1+c=z_1', \\ az_2+b\overline{z}_2+c=z_2', \\ az_3+b\overline{z}_3+c=z_3', \end{cases}$$

где z_i — координаты точек M_i, а z_i' — координаты M_i' $(i=1, 2, 3)$. Определитель её матрицы

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, поскольку точки M_1, M_2, M_3 неколлинеарны, а значит, система имеет *единственное* решение $(a, b, c.)$

Итак, аффинное преобразование плоскости однозначно задаётся указанием трёх пар соответственных точек. Точнее говоря, *существует и только одно аффинное преобразование плоскости, которое три данные неколлинеарные точки* M_1, M_2, M_3 *отображает в три данные точки* M_1', M_2', M_3' *соответственно.*

Тогда образ M' любой точки M несложно находится построением. Для этого через M проведём прямые MN_1 и MN_2, параллельные соответственно прямым M_1M_2 и M_1M_3 (рис. 57), $N_1\in M_1M_3$, $N_2\in M_1M_2$.

8—7685.—Я. П. Понарин.

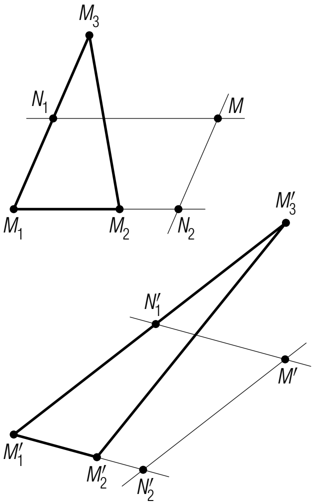

Рис. 57

Строим образы N_1' и N_2' точек N_1 и N_2, делящие отрезки $M_1'M_3'$ и $M_1'M_2'$ в тех же отношениях, в каких N_1 и N_2 делят M_1M_3 и M_1M_2 соответственно. руководствуясь свойством инвариантности параллельности прямых, строим искомую точку M' как точку пересечения прямых, проходящих через N_1' и N_2' параллельно, соответственно, прямым $M_1'M_2'$ и $M_1'M_3'$.

Наглядное представление об изменении фигуры при аффинном преобразовании может дать рис. 58. Квадраты переходят в параллелограммы.

21.3. Неподвижные точки аффинного преобразования являются важной его характеристикой. Заметим, что при $a=1$ и $b=c=0$ будет $z'=z$ для каждой точки плоскости (*тождественное преобразование*). Оставив этот тривиальный случай в стороне, займёмся решением уравнения

$$z=az+b\overline{z}+c, \quad a\overline{a}-b\overline{b}\neq 0, \tag{21.6}$$

из которого находятся координаты z неподвижных точек. Перепишем его:

$$(a-1)z+b\overline{z}+c=0, \tag{21.6a}$$

и возьмём сопряжённое ему уравнение

$$(\overline{a}-1)\overline{z}+\overline{b}z+\overline{c}=0.$$

Из этих двух уравнений исключим $\overline{z}$, полагая $a\neq 1$:

$$((a-1)(\overline{a}-1)-b\overline{b})z+(\overline{a}-1)c-b\overline{c}=0,$$

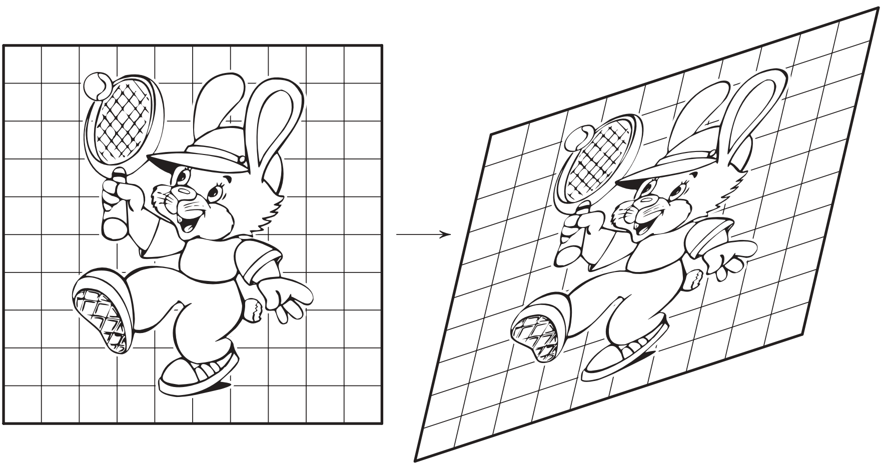

Рис. 58

или

$$(\delta+1-a-\overline{a})z=b\overline{c}+c(1-\overline{a}). \qquad (21.7)$$

Возможны такие три случая.

1. Если $|b|\neq|a-1|$, то уравнение (21.7) и, следовательно, уравнение (21.6) имеют единственное решение

$$s=\frac{b\overline{c}+c(1-\overline{a})}{\delta+1-a-\overline{a}}, \quad a\neq 1. \qquad (21.8)$$

Аффинное преобразование, имеющее единственную неподвижную точку, называется *центроаффинным*, а неподвижная точка — *центром* аффинного преобразования. В частности, этот случай имеет место при $b=0$ и $a\neq 1$, т. е. при подобии первого рода, отличном от переноса. Тогда (21.8) совпадает с (18.6).

2. Если $|b|=|a-1|$, но $b\overline{c}+c(1-\overline{a})\neq 0$, то уравнение (21.7) не имеет решения и аффинное преобразование не имеет неподвижных точек.

3. Пусть $|b|=|a-1|$, $a\neq 1$ и $b\overline{c}+c(1-\overline{a})=0$. Тогда уравнением (21.6а) задаётся *прямая линия* при любых значениях c (§ 11). Действительно, если $c\neq 0$, то после умножения уравнения на $\overline{c}$ окажется, что коэффициенты при z и $\overline{z}$ сопряжены, а свободный член $c\overline{c}$ — действительное число. Если же $c=0$, то условие $|b|=|a-1|$ есть условие прямой линии.

Прямая неподвижных точек называется *осью* аффинного преобразования. Таким преобразованием является, в частности, осевая симметрия.

Итак, аффинное преобразование $z'=az+b\overline{z}+c$ имеет ось

$$(a-1)z+b\overline{z}+c=0$$

при выполнении условий

$$|b|=|a-1|, \quad a\neq 1 \quad \text{и} \quad b\overline{c}+c(1-\overline{a})=0. \qquad (21.9)$$

Если $a=1$, то уравнение (21.6а) упрощается: $b\overline{z}+c=0$, или $\overline{b}z=-\overline{c}$. При $b\neq 0$ имеем единственную неподвижную точки $z=-\overline{c}/\overline{b}$ (центроаффинное преобразование), при $b=0$ и $c\neq 0$ — отсутствие неподвижных точек (перенос), а при $b=c=0$ — тождественное преобразование.

§ 22. Инвариантные пучки параллельных прямых и двойные прямые аффинного преобразования

22.1. Характеристическое уравнение и собственные числа аффинного преобразования. Как показано в предыдущем параграфе, аффинное преобразование сохраняет параллельность прямых, однако образ прямой не обязан быть ей параллелен. Большой интерес представляет отыскание таких прямых, которые отображаются в параллельные им прямые. При таком преобразовании весь пучок параллельных прямых при этом отображается в себя. Его называют *инвариантным пучком* параллельных прямых.

8*—7685.—Я. П. Понарин.

Любая пара точек M и N аффинным преобразованием отображается в пару их образов M_1 и N_1. Поэтому говорят, что вектор $\overrightarrow{MN}$ отображается в вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$. Условимся все векторы откладывать от начальной точки O. Так как образ точки O при аффинном преобразовании $z'=az+b\overline{z}+c$ имеет координату c, образ вектора $\overrightarrow{OM}(z)$ имеет координату $az+b\overline{z}$. Следовательно, комплексные координаты векторов при аффинном преобразовании преобразуются по формуле

$$z'=az+b\overline{z}. \tag{22.1}$$

Поставленная выше задача будет решена, если мы отыщем все векторы $\overrightarrow{p}(z)$, которые при преобразовании (22.1) переходят в коллинеарные им векторы $\lambda\overrightarrow{p}$, $\lambda=\overline{\lambda}$. Это приводит к уравнению

$$az+b\overline{z}=\lambda z, \quad \lambda=\overline{\lambda}.$$

Оно вместе со своим сопряжённым уравнением образует однородную линейную систему относительно z и $\overline{z}$:

$$\begin{cases} (a-\lambda)z+b\overline{z}=0, \\ \overline{b}z+(\overline{a}-\lambda)\overline{z}=0. \end{cases} \tag{22.2}$$

Поскольку нас интересуют лишь ненулевые решения системы, должно выполняться условие

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ \overline{b} & \overline{a}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{22.3}$$

или

$$(a-\lambda)(\overline{a}-\lambda)-b\overline{b}=0, \tag{22.3а}$$

или

$$\lambda^2-(a+\overline{a})\lambda+\delta=0. \tag{22.3б}$$

Уравнение (22.3) называется *характеристическим уравнением* аффинного преобразования, а его корни λ_1 и λ_2 — *собственными числами* аффинного преобразования.

Дискриминант характеристического уравнения равен $(a+\overline{a})^2-4\delta=(a-\overline{a})^2+4b\overline{b}$. Так как числа $a+\overline{a}$ и δ действительные, дискриминант — тоже действительное число. Нам нужны лишь действительные корни уравнения (22.3), существующие лишь при $(a+\overline{a})^2-4\delta\geqslant 0$. Это условие выполняется, в частности, при $\delta<0$. Следовательно, *собственные числа аффинного преобразования второго рода всегда действительны и различны.*

Для нахождения векторов, каждый из которых переходит в коллинеарный ему, надо при найденных действительных λ_1 и λ_2 решить систему (22.2), т. е., проще говоря, решить одно из уравнений

$$(a-\lambda)z+b\overline{z}=0, \quad \overline{b}z+(\overline{a}-\lambda)\overline{z}=0 \tag{22.4}$$

для $\lambda=\lambda_1=\overline{\lambda}_1$ и для $\lambda=\lambda_2=\overline{\lambda}_2$.

Если векторы откладывать от начала координат, то на z и $\overline{z}$ можно смотреть как на координаты точки — конца вектора. При таком подходе уравнение (22.4) есть уравнение одной из прямых, каждая из которых отображается при аффинном преобразовании $z'=az+b\overline{z}+c$ в параллельную ей. Значит, весь инвариантный пучок параллельных прямых имеет уравнение

$$(a-\lambda)z+b\overline{z}+\alpha=0, \tag{22.5}$$

где λ — одно из собственных чисел, α — произвольное комплексное число (параметр пучка).

Если аффинное преобразование имеет неподвижные точки, то каждая прямая инвариантного пучка, проходящая через неподвижную точку, является, очевидно, *двойной прямой* аффинного преобразования. Соответствующий двойной прямой параметр мы получим, если в уравнение (22.5) вместо z подставим координату неподвижной точки.

22.2. Характеристическая окружность аффинного преобразования. Для графического нахождения собственных чисел λ_1 и λ_2 и построения прямых инвариантных пучков параллельных прямых удобно использовать окружность $\varkappa$

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a})=b\overline{b} \tag{22.6}$$

с центром a и радиусом $|b|$. Если в её уравнение (22.6) подставить $z=\overline{z}=\lambda=\overline{\lambda}$, то получится характеристическое уравнение (22.3а). Это говорит о том, что действительные корни характеристического уравнения, если они существуют, служат координатами точек пересечения окружности (22.6) с действительной осью $z=\overline{z}$. Окружность (22.6) называется *характеристической окружностью* аффинного преобразования. Её уравнение перепишем так:

$$z\overline{z}-\overline{a}z-a\overline{z}+\delta=0. \tag{22.6а}$$

Поскольку $\delta\neq0$, окружность $\varkappa$ не проходит через начальную точку O. Если $\delta=a\overline{a}-b\overline{b}<0$, то начало O лежит внутри $\varkappa$ и обратно. Если же $\delta>0$, то O вне $\varkappa$ и обратно. Окружность $\varkappa$ содержит точку $K(a+b)$.

22.3. Инвариантные пучки прямых и двойные прямые. Для аффинного преобразования первого рода ($\delta>0$) возможны три случая: 1) окружность $\varkappa$ пересекает действительную ось в двух различных точках $P(\lambda_1)$ и $Q(\lambda_2)$, 2) окружность $\varkappa$ касается действительной оси: $\lambda_1=\lambda_2$, точки P и Q совпадают, 3) окружность $\varkappa$ не имеет общих точек с действительной осью. В последнем случае преобразование не имеет инвариантных пучков параллельных прямых. Для аффинных преобразований второго рода всегда имеет место лишь первый случай.

В первых двух случаях прямые инвариантных пучков легко строятся, так как прямые PK и QK принадлежат этим пучкам (рис. 59).

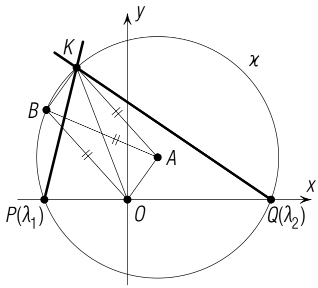

Рис. 59

В самом деле, прямая PK имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 1 \\ a+b & \overline{a}+\overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты при z и $\overline{z}$ в этом уравнении равны $\lambda_1 - \overline{a} - \overline{b}$ и $a+b-\lambda_1$ соответственно и они пропорциональны коэффициентам уравнения (22.4) прямой инвариантного пучка для собственного числа λ_2:

$$\frac{\lambda_1 - \overline{a} - \overline{b}}{a - \lambda_2} = \frac{a+b-\lambda_1}{b},$$

так как по теореме Виета для характеристического уравнения $\lambda_1 + \lambda_2 = a + \overline{a}$, и поэтому предыдущее равенство эквивалентно верному равенству $\lambda_1^2 - (a+\overline{a})\lambda_1 + a\overline{a} - b\overline{b} = 0$. Аналогично, прямая QK принадлежит тому же пучку, что и прямая (22.4) для $\lambda = \lambda_1$.

Если $a=0$, то отрезок PQ — диаметр окружности $\varkappa$, $K=B$, $B \in \varkappa$. Следовательно, *прямые, принадлежащие разным инвариантным пучкам подобия второго рода, перпендикулярны.*

При $\lambda_1 = \lambda_2$ имеется лишь один инвариантный пучок параллельных прямых.

Имеет место следующий замечательный факт:

Т е о р е м а. *Если λ — собственное действительное число аффинного преобразования, то множество точек, каждая из которых делит в отношении $-\lambda \neq -1$ отрезок, соединяющий точку с её прообразом, есть двойная прямая этого преобразования.*

■ Пусть $M(m) \mapsto M'(am + b\overline{m} + c)$ и $\overrightarrow{M'N} = -\lambda\overrightarrow{NM}$, $\lambda = \overline{\lambda}$. Если z — координата точки N, то

$$z = \frac{am + b\overline{m} + c - \lambda m}{1 - \lambda},$$

или

$$(1-\lambda)z = (a-\lambda)m + b\overline{m} + c.$$

Запишем сопряжённое этому уравнение и из полученной системы исключим $\overline{m}$:

$$(1-\lambda)(\overline{a}-\lambda)z - (1-\lambda)b\overline{z} = ((a-\lambda)(\overline{a}-\lambda) - b\overline{b})m + c(\overline{a}-\lambda) - b\overline{c}.$$

Но $(a-\lambda)(\overline{a}-\lambda) - b\overline{b} = 0$, поскольку λ — корень характеристического уравнения. Следовательно, множество точек $N(z)$ имеет уравнение

$$(\overline{a}-\lambda)z - b\overline{z} = \frac{c(\overline{a}-\lambda) - b\overline{c}}{1-\lambda}, \quad \lambda \neq 1, \tag{22.7}$$

которое можно записать в эквивалентном виде

$$(a-\lambda)z + b\overline{z} = \frac{c(a-\lambda) + b\overline{c}}{1-\lambda}, \tag{22.8}$$

где λ — уже *другой* корень характеристического уравнения.

Если $\lambda=\lambda_1$, то уравнение (22.7) — уравнение *прямой*, принадлежащей пучку (22.5) для λ_2, и наоборот, при $\lambda=\lambda_2$ прямая с уравнением (22.7) содержится в пучке (22.5) для λ_1, так как

$$\frac{\overline{a}-\lambda_1}{a-\lambda_2}=\frac{-b}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1+\lambda_2=a+\overline{a}.$$

Прямая (22.7) является *двойной* прямой аффинного преобразования: каждая её точка N отображается в точку N' этой же прямой, поскольку прямой (22.7) принадлежит и точка отрезка $N'N$, делящая его в отношении $-\lambda$. ■

При подобии второго рода ($a=0$) $\lambda_1=k$, $\lambda_2=-k$, и уравнение (22.7) переходит в уравнения (19.6) и (19.8) двойных прямых подобия.

Если $b=0$, $a=\overline{a}=k\neq 1$, то аффинное преобразование $z'=az+c$ является гомотетией (§ 18). В этом случае каждое из уравнений (22.4) превращается в тождество $0\cdot z+0\cdot\overline{z}=0$. Это значит, что любой пучок параллельных прямых инвариантен.

Если $b=0$, $a=\overline{a}=1$, то это параллельный перенос $z'=z+c$. Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=1$ уравнение (22.4) становится тривиальным. Отсюда следует тот же вывод, что и для гомотетии.

Доказанная теорема позволяет построить двойные прямые аффинного преобразования.

§ 23. Частные случаи аффинных преобразований

23.1. Сжатия и сдвиги. Рассмотрим подробнее аффинное преобразование $z'=az+b\overline{z}+c$, имеющее прямую неподвижных точек — ось аффинного преобразования. Для него выполняются условия (21.9):

$$|b|=|a-1|, \quad a\neq 1, \quad b\overline{c}+c(1-\overline{a})=0.$$

Примем ось $(a-1)z+b\overline{z}+c=0$ аффинного преобразования за действительную ось Ox: $z-\overline{z}=0$. Тогда, очевидно, $c=0$, $b=1-a$. Следовательно, аффинное преобразование с осью $z=\overline{z}$ записывается формулой

$$z'=az+(1-a)\overline{z}, \quad a\neq 1 \tag{23.1}$$

Выясним особенности этого преобразования.

1. Из формулы (23.1) получаем:

$$z'-z=(a-1)(z-\overline{z}) \tag{23.2}$$

и

$$\frac{z'-z}{\overline{z}'-\overline{z}}=\frac{(a-1)(z-\overline{z})}{(\overline{a}-1)(\overline{z}-z)}=-\frac{a-1}{\overline{a}-1},$$

или

$$(z'-z)(\overline{a}-1)+(\overline{z}'-\overline{z})(a-1)=0.$$

Это означает, что *векторы $z'-z$ и $a-1$ перпендикулярны*. Если M', M, A, E — точки с координатами соответственно z', z, a, 1, то $MM'\perp AE$.

Так как точки A и E постоянны, *прямые, соединяющие соответственные при аффинном преобразовании точки M и M', параллельны.* Их направление называется *направлением аффинного преобразования*. Оно, очевидно, характеризуется вектором $(a-1)i$ (с точностью до действительного ненулевого множителя). Каждая прямая этого пучка — двойная.

Если $a-1$ — чисто мнимое число, т. е. $a-1=-(\overline{a}-1)$, или $a+\overline{a}=2$, $a\neq 1$, то направление аффинного преобразования совпадает с направлением его оси. В этом случае аффинное преобразование называется *сдвигом* вдоль прямой. Если направление аффинного преобразования не совпадает с направлением его оси, то оно называется *сжатием* к прямой.

Формуле (23.1) можно придать эквивалентный вид, выразив параметр a через вектор $p=(1-a)i$ направления преобразования:

$$z'=(1+pi)z-pi\overline{z}. \tag{23.3}$$

2. *Соответственные прямые MN и $M'N'$ пересекаются на оси аффинного преобразования или параллельны ей.* Это ясно и без вычислений. Действительно, если l — ось преобразования и $MN\cap l=L$, то $L'=L$, и точки M', N', L' коллинеарны, так как коллинеарны их прообразы M, N, L. Если же $MN\parallel l$, то и $M'N'\parallel l$ (рассуждение от противного).

Эти два свойства преобразования, имеющего прямую неподвижных точек, позволяют с лёгкостью построить образ N' данной точки M по заданной оси l и паре соответственных точек $D\mapsto D'$. Пусть $MD\cap l=F$. Искомая точка M' есть точка пересечения прямой FD' и прямой, проходящей через M параллельно DD' (рис. 60, 61).

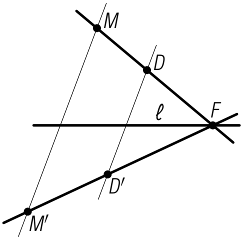

Рис. 60

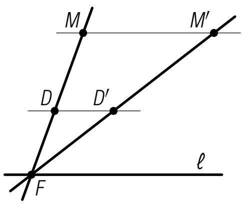

Рис. 61

Как построить образ данной точки M при сжатии или сдвиге, пользуясь формулой (23.1) этого преобразования? Здесь обращаемся к характеристической окружности $\varkappa$ с центром в точке $A(a)$ и радиусом $|1-a|$. Она проходит через точку $E(1)$, а значит, имеет с действительной осью (осью преобразования) ещё одну общую точку, которая, в частности, может совпадать с E. Сжатие всегда имеет собственное число $\lambda_1=1$, отвечающее его оси. Второе собственное число равно $\lambda_2=a+\overline{a}-1=\delta$ и соответствует направлению сжатия. Точка $D(i)$ отображается в точку $D'((2a-1)i)$, которая очень просто строится (рис. 62): точка C, диаметрально противоположная точке E, имеет координату $2a-1$, поэтому D' есть образ точки C при повороте около начала на угол 90°. Пара $D\mapsto D'$ позволяет построить образ любой заданной точки M.

3. Согласно теореме предыдущего параграфа, *ось сжатия делит каждый из отрезков $M'M$, соединяющих точку M' с её прообразом M, в отношении* $-\lambda_2=1-a-\overline{a}$:

$$\overrightarrow{M'N}=(1-a-\overline{a})\overrightarrow{NM},$$

или

$$\overrightarrow{M'N}=(a+\overline{a}-1)\overrightarrow{MN}.$$

Поскольку $\delta\neq 0$, то $a+\overline{a}\neq 1$. Число $\lambda_2=a+\overline{a}-1=\delta$ называется *коэффициентом сжатия*.

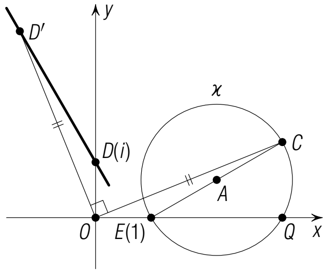

Рис. 62

Если a — действительное число, то направление сжатия перпендикулярно его оси. В этом случае сжатие называется *прямым сжатием*.

4. Для сдвига ($a+\overline{a}=2$, $a\neq 1$) характерно то, что вектор $1-a$ перпендикулярен действительной оси (оси сдвига). Следовательно, характеристическая окружность $\varkappa$ касается оси в точке $E(1)$. Сдвиг имеет равные собственные числа $\lambda_1=\lambda_2=1$ (рис. 63), и является эквиаффинным преобразованием первого рода ($\delta=1$).

Из равенства (23.2) следует, что

$$|z'-z|=2|a-1|\cdot\frac{|z-\overline{z}|}{2},$$

т. е. при сдвиге каждая точка смещается параллельно его оси на расстояние $|z'-z|$, пропорциональное расстоянию $|z-\overline{z}|/2$ от неё до оси. Число $2|a-1|$ (коэффициент пропорциональности) называется *коэффициентом сдвига*.

23.2. Косая симметрия представляет собой важный частный случай сжатия — инволютивное сжатие. Преобразование f^{-1}, обратное аффинному преобразованию f (23.1), имеет формулу

$$z'=\frac{\overline{a}}{a+\overline{a}-1}z+\frac{a-1}{a+\overline{a}-1}\overline{z}, \tag{23.4}$$

т. е. также является аффинным преобразованием с той же осью. Равенство $f^{-1}=f$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{a}}{a+\overline{a}-1}=a,$$

откуда $a=-\overline{a}$, т. е. когда a — чисто мнимое число.

Итак, *формулой* (23.1) *при* $a+\overline{a}=0$ *задаётся косая симметрия с действительной осью*. Коэффициент сжатия в этом случае равен $\delta=a+\overline{a}-1=-1$. Следовательно, ось косой симметрии делит пополам каждый отрезок, соединяющий

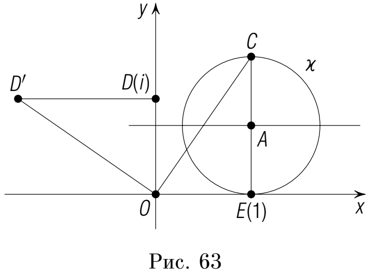

Рис. 63

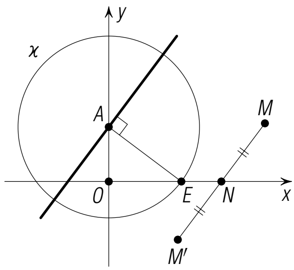

Рис. 64

соответственные точки. Собственные числа равны 1 и -1. Графическое представление дано на рис. 64. При $a=0$ получаем *осевую симметрию* относительно действительной оси.

Поскольку $p=(1-a)i$ — вектор направления косой симметрии и $a+\overline{a}=0$, то $a=1+pi$, $\overline{a}=1-\overline{p}i$, и $(1+pi)+(1-\overline{p}i)=0$, откуда $i=\dfrac{2}{\overline{p}-p}$ и поэтому $1+pi=\dfrac{\overline{p}+p}{\overline{p}-p}$, $-pi=-\dfrac{2p}{\overline{p}-p}$. Следовательно, формула (23.3) для косой симметрии с действительной осью $z=\overline{z}$ и направлением p может быть записана так:

$$z'=\frac{\overline{p}+p}{\overline{p}-p}z-\frac{2p}{\overline{p}-p}\overline{z}. \tag{23.5}$$

Если $a=0$, то $p=i$ и формула (23.5) переходит в формулу $z'=\overline{z}$ осевой симметрии.

Так как $\delta=-1<0$, косая симметрия есть эквиаффинное преобразование второго рода (§ 21).

Выведем формулу косой симметрии по её оси $\overline{u}z+u\overline{z}+v=0$ $(v=\overline{v})$ и направлению p. Условие неколлинеарности направления p данной оси можно записать в таком виде: $p\overline{u}+\overline{p}u\neq 0$ (векторы p и u неперпендикулярны). Если $M(z)\mapsto M'(z')$, то векторы $z'-z$ и p коллинеарны, и точка $(z'+z)/2$ лежит на оси. Поэтому выполнена система

$$\begin{cases} z'-z=\alpha p \quad (\alpha=\overline{\alpha}), \\ \overline{u}\dfrac{z'+z}{2}+u\dfrac{\overline{z}'+\overline{z}}{2}+v=0. \end{cases}$$

Исключая из неё α и $\overline{z}'$, получаем искомую формулу косой симметрии:

$$z'=\frac{(\overline{p}u-p\overline{u})z-2pu\overline{z}-2pv}{\overline{p}u+p\overline{u}}, \tag{23.6}$$

которая обобщает формулу (23.5).

23.3. Эллиптический поворот. Образ окружности при аффинном преобразовании называется *эллипсом*. Рассмотрим прямое (ортогональное) сжатие g к действительной оси

$$z'=az+(1-a)\overline{z}, \quad a=\overline{a}, \quad a\neq 1, \quad \delta=2a-1\neq 0. \tag{23.7}$$

Обратное преобразование g^{-1} имеет формулу:

$$z'=\frac{1}{2a-1}(az+(a-1)\overline{z}). \tag{23.8}$$

Окружность $z\bar{z}=R^2$ при сжатии g переходит в эллипс (рис. 65). Чтобы получить его уравнение, надо в уравнении окружности заменить z на правую часть формулы (23.8):

$$(az+(a-1)\bar{z})(a\bar{z}+(a-1)z)= \\ =R^2(2a-1)^2.$$

Преобразуем это уравнение к такому виду:

$$\frac{(z+\bar{z})^2}{(2R)^2}-\frac{(z-\bar{z})^2}{(2R(2a-1))^2}=1. \quad (23.9)$$

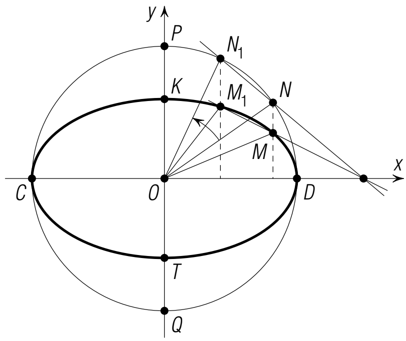

Рис. 65

Коэффициент сжатия равен $\delta=2a-1$, следовательно, $\dfrac{|OK|}{|OP|}=2a-1$. Величины $2R$ и $2R(2a-1)=|KT|$ называются, соответственно, *большой и малой осями* эллипса (23.9), если $|\delta|<1$.

Возьмём две произвольные точки N и N_1 окружности. Пусть M и M_1 — их образы при сжатии g. Точку N можно отобразить в N_1 поворотом f около центра O на некоторый угол t:

$$z'=\tau z, \quad \arg\tau=t, \quad |\tau|=1, \quad \tau\neq\bar{\tau}. \tag{23.10}$$

Очевидно, точку M эллипса можно отобразить в точку M_1 этого же эллипса композицией $\omega=g\circ f\circ g^{-1}$ ($M\mapsto N\mapsto N_1\mapsto M_1$). Найдём формулу преобразования ω, используя последовательно (23.8), (23.10) и (23.7). Для композиции $f\circ g^{-1}$ получаем:

$$z'=\frac{\tau}{2a-1}(az+(a-1)\bar{z}),$$

затем для ω находим искомую формулу:

$$z'=\frac{a^2\tau-(1-a)^2\bar{\tau}}{2a-1}z+\frac{a(a-1)(\tau-\bar{\tau})}{2a-1}\bar{z}. \tag{23.11}$$

Преобразование ω является аффинным, отличным от подобия, с определителем $\delta=1$ (проверку опустим). Оно имеет единственную неподвижную точку O и не имеет инвариантных пучков, так как дискриминант его характеристического уравнения равен $(\tau+\bar{\tau})^2-4<$ <0, поскольку $|\tau+\bar{\tau}|<|\tau|+|\bar{\tau}|=2$. Следовательно, преобразование ω — эквицентроаффинное без инвариантных пучков параллельных прямых. При нём каждая точка M плоскости ($M\neq O$) смещается по соответствующему эллипсу, который отображается на себя. Поэтому по аналогии с окружностью и с обычным поворотом оно называется *эллиптическим поворотом*.

Кратко эллиптический поворот можно записать формулой:

$$z' = az + b\overline{z}, \quad |a+\overline{a}| < 2, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1. \tag{23.12}$$

Эту формулу можно представить так:

$$z' = (a+b)\left(\frac{a}{a+b}z + \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\overline{z}\right). \tag{23.13}$$

Это означает, что эллиптический поворот является композицией сжатия

$$z' = \frac{a}{a+b}z + \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\overline{z}$$

к действительной оси и подобия первого рода

$$z' = (a+b)z$$

с центром в начале O.

23.4. Параболический поворот. Композиция сдвига и переноса, не параллельного оси сдвига, называется *параболическим поворотом.*

Если ось сдвига принять за действительную ось, то он записывается формулой

$$z' = az + (1-a)\overline{z}, \quad a + \overline{a} = 2, \quad a \neq 1. \tag{23.14}$$

Для композиции этого сдвига и переноса $z' = z + c$, $c \neq \overline{c}$, получаем выражение

$$z' = az + (1-a)\overline{z} + c, \quad a + \overline{a} = 2, \quad a \neq 1. \tag{23.15}$$

Так как для параболического поворота (23.15)

$$\delta = a\overline{a} - (1-a)(1-\overline{a}) = a + \overline{a} - 1 = 1,$$

это аффинное преобразование является эквиаффинным преобразованием первого рода. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, и потому данное преобразование имеет только один инвариантный пучок параллельных прямых, параллельных оси сдвига (23.14).

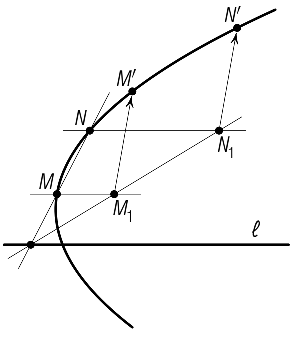

Рис. 66

Название параболического поворота обусловлено тем, что при нём каждая точка смещается по некоторой параболе, и всякую параболу можно отобразить на себя параболическим поворотом, определяемым парой соответственных точек, лежащих на ней. При этом ось сдвига совпадает с осью параболы (рис. 66).

Задачи

4.23. Аффинное преобразование задано формулой

$$z'=\left(2+\frac{1}{2}i\right)z+\left(-1+\frac{3}{2}i\right)\overline{z}-(2+6i).$$

Напишите формулу обратного преобразования, уравнения образов и прообразов осей координат. Найдите неподвижные точки этого преобразования.

4.24. Найдите двойные прямые аффинного преобразования

$$z'=\frac{1}{2}(5-7i)z-\frac{1}{2}(5+5i)\overline{z}-(4+22i).$$

4.25. Покажите, что аффинное преобразование

$$z'=\left(\frac{13}{2}+i\right)z+\left(-\frac{5}{2}+5i\right)\overline{z}+1+2i$$

есть сжатие. Найдите его ось, направление и коэффициент.

4.26. Покажите, что аффинное преобразование

$$z'=(1+2i)z+2\overline{z}+2+2i$$

есть сдвиг. Найдите его ось и коэффициент.

4.27. Покажите, что аффинное преобразование

$$z'=2iz-(2+i)\overline{z}+3-i$$

есть косая симметрия. Найдите её ось и направление.

4.28. Аффинное преобразование имеет прямую неподвижных точек (ось)

$$(1-i)z+(1+i)\overline{z}=0$$

и пару соответственных точек $A(-1+2i)\mapsto A'(1+i)$. Напишите формулу этого преобразования.

4.29. Напишите формулу сдвига, если его ось имеет уравнение

$$(1+i)z+(1-i)\overline{z}+2=0,$$

а прямая $(2+i)z+(2-i)\overline{z}=0$ отображается в прямую $iz-i\overline{z}+4=0$.

4.30. Покажите, что

1) композиция двух косых симметрий с общей осью и различными направлениями есть сдвиг вдоль этой оси;

2) композиция двух косых симметрий с параллельными осями и общим направлением есть перенос.

4.31. Докажите, что композиция двух косых симметрий, оси которых параллельны, а направления различны, есть параболический поворот.

4.32. Докажите, что композиция двух подобий второго рода с общими инвариантными пучками параллельных прямых есть гомотетия, перенос или тождественное преобразование.

§ 24. Инверсия

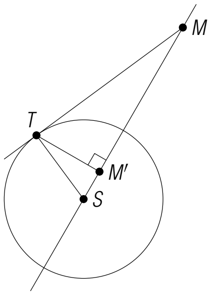

Рис. 67

24.1. Определение и формула инверсии. *Инверсией* плоскости относительно окружности с центром S и радиусом R называется преобразование, которое всякую точку M плоскости, отличную от S, отображает в такую точку M', что $SM \cdot SM' = R^2$ и M' принадлежит лучу SM. Окружность (S, R) называется *окружностью инверсии,* точка S — *центром* (или *полюсом*) *инверсии.*

Построение образа M' точки M выполнено на рис. 67. Если точка M находится вне круга (S, R), то через неё проводим касательную к окружности инверсии, и из точки T касания опускаем перпендикуляр TM' на луч SM. Тогда из подобия треугольников STM' и STM получаем пропорцию $\dfrac{SM}{ST} = \dfrac{ST}{SM'}$, откуда $SM \cdot SM' = R^2$.

В определении инверсии точки M и M' равноправны. Следовательно, образом точки M' при этой же инверсии будет точка M, т. е. инверсия — преобразование *инволютивное.*

Найдём формулу инверсии при задании точек комплексными числами. Пусть точкам S, M, M' соответствуют комплексные числа s, z, z'. Тогда равенство $SM \cdot SM' = R^2$ при переходе к квадратам расстояний даёт:

$$(s - z)(\overline{s} - \overline{z}) \cdot (s - \overline{z}')(\overline{s} - \overline{z}') = R^4, \tag{24.1}$$

Коллинеарность точек S, M, M' приводит к равенству:

$$(s - z)(\overline{s} - \overline{z}') = (\overline{s} - \overline{z})(s - z'). \tag{24.2}$$

Из (24.1) и (24.2) следует:

$$(\overline{s} - \overline{z})(s - z') = R^2,$$

откуда

$$z' = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{s}} + s, \tag{24.3}$$

или

$$z' = \frac{\overline{z}s + R^2 - s\overline{s}}{\overline{z} - \overline{s}}. \tag{24.4}$$

Сонаправленность лучей SM и SM', т. е. требуемая определением принадлежность точки M' лучу SM, обеспечивается тем, что каждое из произведений (24.2) положительно (равно R^2).

Итак, инверсия плоскости относительно окружности (S, R) записывается любой из формул (24.3) и (24.4).

В частном случае, когда $s=0$, формула инверсии наиболее проста:

$$z'=\frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{24.5}$$

Из формул (24.4) и (24.5) видно, что центр инверсии не имеет образа. Это сразу было оговорено в определении инверсии.

Верно и обратное, преобразование плоскости, заданное формулой

$$z'=\frac{a\bar{z}+b}{\bar{z}-\bar{a}}, \quad b=\bar{b}, \quad b+a\bar{a}>0, \tag{24.6}$$

является инверсией относительно окружности с центром в точке $S(a)$ и радиусом $R=\sqrt{b+a\bar{a}}$.

Понятие инверсии можно расширить, заменяя требование $b+a\bar{a}>$ >0 ослабленным требованием $b+a\bar{a}\neq 0$. Тогда в случае, когда $b+a\bar{a}<0$, радиус окружности инверсии приходится считать мнимым: $\sqrt{b+a\bar{a}}=iR$. Формула (24.3) приобретает такой вид:

$$z'=\frac{(iR)^2}{\bar{z}-\bar{s}}+s,$$

или

$$z'=\frac{R^2}{-\bar{z}+\bar{s}}+s. \tag{24.3a}$$

Это преобразование представляет собой коммутативную композицию обычной инверсии (24.3) и симметрии $z'=-z+2s$ с общим центром S.

Итак, формулой

$$z'=\frac{a\bar{z}+b}{\bar{z}-\bar{a}}, \quad b=\bar{b}, \quad b+a\bar{a}\neq 0. \tag{24.6a}$$

задаётся *обобщённая инверсия*.

Найдём зависимость между расстоянием AB и расстоянием $A'B'$, где A, B — произвольные точки, а A', B' — их образы при инверсии. Примем центр инверсии за начало O, тогда она задаётся формулой (24.5). Поэтому

$$a'-b'=R^2\left(\frac{1}{\bar{a}}-\frac{1}{\bar{b}}\right)=R^2\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}},$$

откуда

$$|a'-b'|=R^2\frac{|\bar{b}-\bar{a}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=R^2\frac{|a-b|}{|a|\cdot|b|},$$

а это означает, что

$$A'B'=R^2\frac{AB}{OA\cdot OB}. \tag{24.7}$$

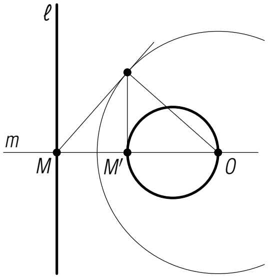

Рис. 68

24.2. Образы прямых и окружностей при инверсии. Без ограничения общности рассуждений окружность инверсии можно принять за единичную $z\bar{z}=1$. Тогда формула инверсии примет вид $z'=1/\bar{z}$, удобный для практики. Учитываем, что $z\neq 0$.

Пусть задана прямая l с уравнением $\bar{p}z+p\bar{z}+q=0$, $q=\bar{q}$. При подстановке в это уравнение $z=1/\bar{z}'$, и $\bar{z}=1/z'$ получаем, опуская в окончательном результате штрихи:

$$qz\bar{z}+\bar{p}z+p\bar{z}=0, \quad q=\bar{q}. \tag{24.8}$$

При $q=0$ этим уравнением задаётся прямая, совпадающая с заданной прямой l. Если $q\neq 0$, то оно является уравнением окружности (§ 14), содержащей центр O инверсии. Окружность (24.8), являющаяся образом данной прямой l, имеет центр $-p/q$ и радиус $|p|/|q|$. Заметим, что центр лежит на прямой $\bar{p}z=p\bar{z}$, проходящей через центр инверсии перпендикулярно l. Это позволяет с лёгкостью построить полученную окружность — образ прямой l: проводим прямую m через центр инверсии перпендикулярно l (рис. 68), строим образ M' точки $M=m\cap l$ при инверсии, тогда отрезок OM' является диаметром искомой окружности (24.8).

Итак, 1) *прямая, содержащая центр инверсии, отображается при этой инверсии в себя*, 2) *прямая, не содержащая центр инверсии, отображается в окружность, проходящую через него*. Поскольку инверсия инволютивна, то и 3) *окружность, содержащая центр инверсии, отображается в прямую, не содержащую его*.

Возьмём теперь окружность

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2, \quad s\bar{s}\neq r^2, \tag{24.9}$$

не проходящую через центр O инверсии $z'=1/\bar{z}$. Её образ имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{\bar{z}}-s\right)\left(\frac{1}{z}-\bar{s}\right)=r^2,$$

(штрихи опущены), которое приводится к виду

$$(s\bar{s}-r^2)z\bar{z}-\bar{s}z-s\bar{z}+1=0. \tag{24.10}$$

Так как $s\bar{s}-r^2\neq 0$, этим уравнением задаётся окружность с центром $\dfrac{s}{s\bar{s}-r^2}$ и радиусом $\dfrac{r}{|s\bar{s}-r^2|}$, не проходящая через центр O инверсии. Центр инверсии, центр данной окружности (24.9) и центр её образа (24.10) коллинеарны, поскольку число $s\bar{s}-r^2$ действительное. Это позволяет построить образ окружности по образам двух её диаметрально противоположных точек, коллинеарных с центром инверсии (рис. 69).

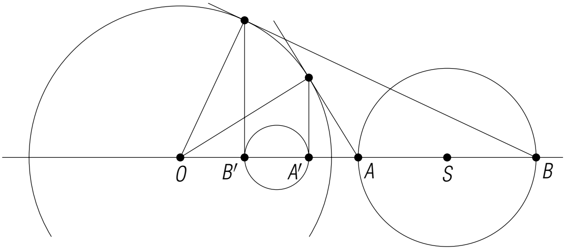

Рис. 69

Отношение радиусов окружностей (24.9) и (24.10) равно

$$r : \frac{r}{|s\overline{s}-r^2|} = |s\overline{s}-r^2| = |OS^2-r^2|.$$

В частном случае, когда окружность (24.9) совпадает с окружностью $z\overline{z}=1$ инверсии (при $s=0$, $r=1$), уравнение (24.10) принимает вид $z\overline{z}=1$, т. е. *окружность инверсии отображается этой инверсией в себя*. Более того, *каждая точка окружности инверсии неподвижна при этой инверсии*, что непосредственно видно из формулы инверсии $z'=1/\overline{z}$ и уравнения окружности $z\overline{z}=1$ инверсии, из которых следует $z'=z$.

При $s=0$ и $r\neq 1$ уравнение (24.10) будет таким:

$$z\overline{z}=\frac{1}{r^2}.$$

Следовательно, окружность радиуса r, концентричная окружности инверсии, отображается этой инверсией в окружность радиуса $1/r$, также концентричную окружности инверсии.

24.3. Свойство конформности инверсии: *инверсия сохраняет величину угла между окружностями, а также между окружностью и прямой, но изменяет его ориентацию на противоположную.*

■ Пусть заданы две окружности (прямая и окружность), одна из которых проходит через точки A, B, C, а другая — через точки A, B, D. Если A', B', C', D' — образы этих точек при инверсии $z'=1/\overline{z}$, то их двойное отношение ω' равно числу, комплексно сопряжённому двойному отношению ω точек A, B, C, D:

$$\omega'=\frac{a'-c'}{b'-c'}:\frac{a'-d'}{b'-d'}=\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}:\frac{\overline{a}-\overline{d}}{\overline{b}-\overline{d}}=\overline{\omega}.$$

Согласно геометрическому смыслу аргумента двойного отношения ω (§ 13) он равен ориентированному углу между окружностями (прямой и окружностью) ABC и ABD, но

$$\arg\omega'=\arg\overline{\omega}=-\arg\omega. \qquad ■$$

9—7685.—Я. П. Понарин.

В частности, инверсия отображает две ортогональные окружности в две ортогональные окружности (окружность и прямую).

Так как $|\omega'|=|\omega|$, *инверсия сохраняет двойное отношение расстояний между точками.*

З а д а ч а 1. Доказать, что окружность ортогональна окружности инверсии тогда и только тогда, когда отображается этой инверсией в себя.

■ Пусть окружность $z\overline{z}=1$ инверсии и окружность γ, описываемая уравнением $(z-s)(\overline{z}-\overline{s})=r^2$, имеют общую точку $A(a)$. Тогда $a\overline{a}=1$ и $(a-s)(\overline{a}-\overline{s})=r^2$. Условие $OA\perp SA$ ортогональности окружностей имеет вид

$$a(\overline{a}-\overline{s})+\overline{a}(a-s)=0,$$

или

$$s\overline{a}+\overline{s}a=2, \tag{24.11}$$

что при учёте равенства $(a-s)(\overline{a}-\overline{s})=r^2$ эквивалентно соотношению

$$s\overline{s}-r^2=1. \tag{24.12}$$

А при этом условии уравнения (24.9) и (24.10) окружности γ и её образа совпадают.

Обратно, если эти уравнения совпадают, то $s\overline{s}-r^2=1$. Но это — критерий ортогональности окружности γ и окружности $z\overline{z}=1$ инверсии. ■

З а д а ч а 2. Доказать, что окружность, содержащая две взаимно инверсные точки, ортогональна окружности инверсии.

■ Если при инверсии $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$ относительно окружности $z\overline{z}=1$ имеем пары соответственных точек $A\mapsto B$ и $B\mapsto A$, то $a\overline{b}=\overline{a}b=1$. Согласно условию окружность $(z-s)(\overline{z}-\overline{s})=r^2$ содержит точки A и B:

$$\begin{cases} a\overline{a}-s\overline{a}-\overline{s}a+s\overline{s}-r^2=1, \\ b\overline{b}-s\overline{b}-\overline{s}b+s\overline{s}-r^2=1. \end{cases}$$

Умножим первое равенство на b, второе — на a и вычтем из полученного первого полученное второе:

$$(a-b)+(s\overline{s}-r^2)(b-a)=0,$$

откуда

$$s\overline{s}-r^2=1,$$

что означает ортогональность данной окружности и окружности инверсии. ■

З а д а ч а 3. Прямые, содержащие стороны AB и CD вписанного в окружность γ четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке P. Окружности, описанные около треугольников ADP и BCP, пересекаются вторично в точке Q. Доказать, что точка Q инверсна точке M пересечения диагоналей четырёхугольника относительно окружности γ (рис. 70).

■ Примем точку P за начало. Тогда, согласно (3.1), $a\overline{b}=\overline{a}b$ и $c\overline{d}=\overline{c}d$. По свойству секущих $a\overline{a}\cdot b\overline{b}=c\overline{c}\cdot d\overline{d}$. Поэтому

$$a\overline{b}=\overline{a}b=c\overline{d}=\overline{c}d. \qquad (24.13)$$

Составим уравнения окружностей ADP и BCP:

$$\begin{cases} z\overline{z}(a\overline{d}-\overline{a}d)-z\overline{a}\overline{d}(a-d)+\overline{z}ad(\overline{a}-\overline{d})=0, \\ z\overline{z}(b\overline{c}-\overline{b}c)-z\overline{b}\overline{c}(b-c)+\overline{z}bc(\overline{b}-\overline{c})=0. \end{cases}$$

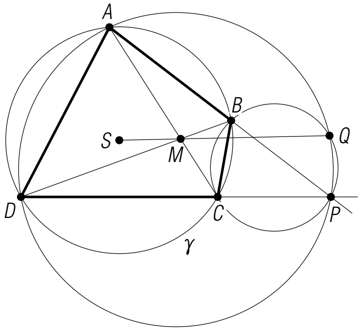

Рис. 70

При решении этой системы учитываем (24.13). Очевидно, она имеет ненулевое решение, соответствующее общей точке P окружностей. Второе её решение равно

$$q=\frac{ac-bd}{a+c-(b+d)}. \qquad (24.14)$$

Если выполнить перенос системы координат, то точкам A, B, C, D, P, Q будут соответствовать уже другие комплексные числа a_1, b_1, c_1, d_1, p_1, q_1 такие, что $a=a_1+\rho$, $b=b_1+\rho$, $c=c_1+\rho$, $d=d_1+\rho$, $p=p_1+\rho$, $q=q_1+\rho$. Подставляя эти выражения для координат в формулу (24.14), получаем:

$$q_1=\frac{a_1c_1-b_1d_1}{a_1+c_1-(b_1+d_1)}.$$

Значит, формула (24.14) истинна и тогда, когда начальная точка совпадает с центром окружности γ. Но тогда, в силу (4.1),

$$\overline{m}=\frac{a+c-(b+d)}{ac-bd}.$$

Следовательно, $q=1/\overline{m}$. Это значит, что точка Q инверсна точке M относительно окружности γ, описанной около четырёхугольника $ABCD$. ■

Задача 4. Найти композицию инверсий относительно трёх попарно ортогональных окружностей.

■ Пусть даны окружности

$$z\overline{z}=1, \quad (z-a)(\overline{z}-\overline{a})=r^2, \quad (z-b)(\overline{z}-\overline{b})=R^2,$$

для которых наложены условия попарной ортогональности:

$$a\overline{a}-r^2=1, \quad b\overline{b}-R^2=1, \quad (a-b)(\overline{a}-\overline{b})=R^2+r^2.$$

С учётом первых двух условий третье приводится к виду $a\overline{b}+\overline{a}b=2$, или $1-a\overline{b}=\overline{a}b-1$.

9*—7685.—Я. П. Понарин.

Инверсии f_1, f_2, f_3 относительно данных окружностей задаются соответственно формулами:

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}, \quad z' = \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, \quad z' = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{b}} + b.$$

Находим композицию $f_2 \circ f_1$:

$$z' = \frac{(r^2 - a\overline{a})z + a}{1 - \overline{a}z}, \quad \text{или} \quad z' = \frac{z - a}{\overline{a}z - 1}$$

и композицию $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$:

$$z' = \frac{R^2}{\dfrac{\overline{z} - \overline{a}}{a\overline{z} - 1} - \overline{b}} + b.$$

С помощью условий ортогональности окружностей эта формула преобразуется к виду

$$z' = \frac{\overline{z}(a - b) + 1 - a\overline{b}}{\overline{z}(a\overline{b} - 1) + \overline{a} - \overline{b}}.$$

Этой формулой определяется инверсия с центром $\dfrac{a - b}{a\overline{b} - 1}$ и радиусом ρ таким, что $\rho^2 = \dfrac{R^2 + r^2 + (a\overline{b} - 1)^2}{-(a\overline{b} - 1)^2}$. Это число является действительным, поскольку $a\overline{b} - 1$ — чисто мнимое. ■

Задачи

4.33. Точки A и A_1, B и B_1 являются соответственными при инверсии с центром O. Докажите, что треугольники OAB и OB_1A_1 подобны и противоположно ориентированы.

4.34. Найдите композицию инверсий относительно двух концентрических окружностей с радиусами R и r.

4.35. Вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ инверсны точкам A, B, C относительно двух концентрических окружностей. Докажите, что эти треугольники гомотетичны.

§ 25. Круговые преобразования первого рода

25.1. Конформная плоскость. Рассмотренное преобразование инверсии определяется не на всей евклидовой плоскости, а только на евклидовой плоскости с одной исключённой точкой — центром инверсии, так как центр инверсии не имеет образа. Во многих случаях, как мы увидим далее, это обстоятельство причиняет неудобства. Чтобы устранить указанный «дефект», к евклидовой плоскости чисто умозрительно добавляют ещё одну точку $\mathscr{Q}$, которую называют *бесконечно удалённой*. Этой точке ставят в соответствие особое комплексное число, обозначаемое символом ∞, при этом $\dfrac{1}{0}=\infty$.

Евклидова плоскость, дополненная одной бесконечно удалённой точкой $\mathscr{Q}$, называется *конформной плоскостью*. Любую её точку, отличную от $\mathscr{Q}$, будем называть *собственной* точкой.

Условимся, что точка $\mathscr{Q}$ лежит на любой прямой евклидовой плоскости и не лежит ни на одной из окружностей евклидовой плоскости. Согласно этому соглашению, две пересекающиеся прямые на конформной плоскости, как и две пересекающиеся окружности, имеют две общие точки — одну на «конечном расстоянии», другую — точку $\mathscr{Q}$, а две параллельные прямые имеют только одну общую точку $\mathscr{Q}$. Говорят, что параллельные прямые *касаются* друг друга в этой точке.

Введёнными соглашениями окружности и прямые уравниваются в правах, и между ними можно не делать различия. Прямую евклидовой плоскости считают окружностью бесконечного радиуса.

Операции с введённым особым числом ∞ *определяются* следующим образом:

— при любом z

$$z+\infty=\infty, \tag{25.1}$$

— при $z\neq 0$

$$z\cdot\infty=\infty, \tag{25.2}$$

— при $z\neq\infty$

$$z-\infty=\infty, \qquad \frac{\infty}{z}=\infty, \qquad \frac{z}{\infty}=0. \tag{25.3}$$

Разность $\infty-\infty$, произведение $0\cdot\infty$ и отношения $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ приходится считать не имеющими смысла уже без какой-либо надежды выйти из этого затруднения.

25.2. Круговые преобразования первого рода. Переходим к изучению преобразования конформной плоскости, определяемого формулой

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{25.4}$$

где a, b, c, d — постоянные комплексные числа и $\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$. При $ad-bc=0$ эта формула принимает вид $z'=\text{const}$ и не представляет интереса.

Это преобразование соответственно виду функции $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ называется *дробно-линейным преобразованием* первого рода. Величина $\delta=ad-bc$ называется его детерминантом.

При $c=0$ преобразование (25.4) является подобием первого рода, которое уже рассмотрено в § 18. Поэтому в дальнейшем, если не сделано оговорки, предполагаем $c\neq 0$.

При принятых выше соглашениях формула (25.4) каждому значению z ставит в соответствие одно и только одно значение z'. В частности, $z=-d/c$ соответствует ∞, а $z=\infty$ соответствует a/c. Если $c=0$, то $z=\infty$ переходит в $z'=\infty$.

Преобразование, обратное преобразованию (25.4), выражается формулой

$$z'=\frac{-dz+b}{cz-a}, \tag{25.5}$$

т. е. также является дробно-линейным преобразованием первого рода с тем же детерминантом $\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix}=ad-bc$.

Теорема 1. *Всякое дробно-линейное преобразование первого рода является композицией инверсии и подобия второго рода.*

■ Мы желаем, чтобы преобразование $z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$ было представлено в виде

$$z'=\sigma\left(\frac{R^2}{z-s}+\overline{s}\right)+\rho,$$

т. е. как композиция инверсии $z'=\dfrac{R^2}{\overline{z}-\overline{s}}+s$ и подобия $z'=\sigma\overline{z}+\rho$ второго рода. Проверкой убеждаемся, что

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Поэтому $\quad s=-\dfrac{d}{c}, \quad \sigma=\dfrac{bc-ad}{c^2R^2}, \quad \rho=\dfrac{a}{c}-\sigma\overline{s}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\overline{d}(bc-ad)}{c^2\overline{c}R^2}.$ ■

Как видим, представление дробно-линейного преобразования первого рода композицией инверсии и подобия второго рода неоднозначно: оно зависит от выбора радиуса окружности инверсии.

Из свойств подобий, инверсии и доказанной теоремы получаются важные свойства дробно-линейных преобразований первого рода.

Следствие 1. Дробно-линейные преобразования первого рода отображают множество прямых и окружностей в себя.

Из-за этого свойства дробно-линейные преобразования называют также *круговыми преобразованиями*.

Следствие 2. Круговые преобразования первого рода сохраняют величину и ориентацию углов между окружностями, а также между окружностями и прямыми.

Следствие 3. Круговые преобразования первого рода отображают ортогональные окружности в ортогональные окружности.

Следствие 4. Круговые преобразования первого рода переводят каждые две инверсные относительно окружности точки в две точки, инверсные относительно образа этой окружности.

Теорема 2. *Круговые преобразования первого рода сохраняют двойное отношение четырёх точек плоскости.*

■ Сначала предполагаем, что все четыре точки собственные. Если $z'=f(z)$ — круговое преобразование (25.4) и $f(z_i)=z'_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), то при $i\neq j$

$$z'_i-z'_j=\frac{az_i+b}{cz_i+d}-\frac{az_j+b}{cz_j+b}=\frac{(ad-bc)(z_i-z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}.$$

Поэтому

$$\frac{z'_1-z'_3}{z'_2-z'_3}:\frac{z'_1-z'_4}{z'_2-z'_4}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}.$$

Если одна из точек совпадает с $\mathscr{Q}(\infty)$, то на основании соглашений (25.1)—(25.3) это равенство остаётся в силе, модифицируясь. Исключаются случаи, когда оно теряет смысл. ■

25.3. Неподвижные точки. Положим в (25.4) $z'=z$ и решим полученное уравнение

$$z=\frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{или} \quad cz^2+(d-a)z-b=0. \tag{25.6}$$

Сначала считаем $c\neq 0$. Тогда уравнение (25.6) имеет два корня:

$$z_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{m}}{2c}, \quad m=(d-a)^2+4bc. \tag{25.7}$$

Из формулы (25.4) видно, что ∞ не является неподвижной точкой. Так что, если $m\neq 0$, то существуют ровно две неподвижные точки кругового преобразования первого рода. При $m=0$ такая точка одна.

При $c=0$ обязательно $a\neq 0$ и $d\neq 0$, так как иначе был бы равен нулю детерминант δ. Из формулы (25.4) видно, что в этом случае точка ∞ неподвижна. Если $a\neq d$, то из (25.6) находим вторую неподвижную точку $\dfrac{b}{d-a}$.

Если $c=0$ и $d=a$, то формула (25.4) имеет вид $z'=z+\dfrac{b}{d}$ и представляет собой перенос с единственной неподвижной точкой ∞. Итак, в случае, когда $c=0$, также существуют две неподвижные точки, если $m\neq 0$, и одна точка, если $m=0$.

Попутно доказано, что *круговое преобразование первого рода конформной плоскости, оставляющее неподвижной бесконечно удалённую точку, есть подобие первого рода.*

Следствие. Круговое преобразование первого рода, имеющее более двух неподвижных точек, является тождественным преобразованием.

Это вытекает также из инвариантности двойного отношения при круговом преобразовании, поскольку если бы оно имело три неподвижные точки, то была бы неподвижна и любая четвёртая точка.

Теорема 3. *Если круговое преобразование первого рода имеет две неподвижные точки P и Q, то двойное отношение (PQ, MM') постоянно для любой пары соответственных точек M и M'.*

■ Возьмём ещё одну фиксированную пару соответственных точек $A\mapsto A'$ при заданном круговом преобразовании первого рода. Тогда $(MA, PQ)=(M'A', PQ)$, или, в координатной форме,

$$\frac{m-p}{a-p}:\frac{m-q}{a-q}=\frac{m'-p}{a'-p}:\frac{m'-q}{a'-q},$$

откуда

$$\frac{m-p}{m-q}:\frac{m'-p}{m'-q}=\frac{(a-p)(a'-q)}{(a-q)(a'-p)}=\mathrm{const}=k, \tag{25.8}$$

т. е. $(MM', PQ)=(PQ, MM')=k$. ■

Следствие. Окружность Аполлония для отрезка PQ, соединяющего две неподвижные точки кругового преобразования первого рода, и отношения λ отображается этим преобразованием в окружность Аполлония для этого отрезка и отношения $\lambda/|k|$.

■ Из равенства (25.8) находим:

$$\frac{m-p}{m-q}=k\frac{m'-p}{m'-q},$$

откуда

$$\frac{MP}{MQ}=|k|\frac{M'P}{M'Q}.$$

Множество точек M, обладающих свойством $\dfrac{MP}{MQ}=\lambda=\mathrm{const}$, $\lambda\neq 1$, есть известная окружность Аполлония (§ 14, задача 1). Тогда множество точек M', обладающих свойством $\dfrac{M'P}{M'Q}=\dfrac{\lambda}{|k|}$, также является окружностью Аполлония для отрезка PQ, но уже для другого отношения $\lambda/|k|$. При $k=-1$ эти окружности совпадают. ■

З а д а ч а 1. На окружности γ даны точки A и B. Найти множество точек пересечения равных между собой хорд AC и BD этой окружности.

■ Пусть окружность γ единичная. Возможны два случая.

1. Если дуги AC и BD равны и одинаково ориентированы, то $\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$, или $d=\dfrac{bc}{a}$. Найдём координату точки M пересечения хорд AC и BD:

$$\overline{m}=\frac{a+c-(b+d)}{ac-bd}=\frac{a+c}{c(a+b)}.$$

Всегда можно считать $b=\overline{a}$. Рассмотрим преобразование, для любой точки C, переводящее её в соответствующую точку M, обозначая $c=z$ и $m=z'$, имеем:

$$\overline{z}'=\frac{a}{z(a+\overline{a})}+\frac{1}{a+\overline{a}},$$

откуда

$$z'=\frac{\overline{a}}{a+\overline{a}}z+\frac{1}{a+\overline{a}},$$

так как $1/\overline{z}=z$. Это — преобразование подобия первого рода. Следовательно, для всевозможных точек $C(z)$ окружности γ множество их образов $M(z')$ — окружность γ' с центром $s=\dfrac{1}{a+\overline{a}}$ радиуса $\dfrac{|\overline{a}|}{a+\overline{a}}$. Её уравнение:

$$z\overline{z}(a+\overline{a})-(z+\overline{z})=0.$$

Окружность γ', очевидно, проходит через начальную точку O и через точки $A(a)$ и $B(\overline{a})$.

2. Если дуги AC и BD равны и противоположно ориентированы, то $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{d}$. Если $c=b$ и $a=d$, то прямые AC и BD совпадают. Если же $c\neq b$, то полагаем $b=\overline{a}$, $c=z$ и находим точку $M(z')$ пересечения хорд AC и BD:

$$\overline{z}'=\frac{a+z-(b+d)}{az-bd}=\frac{z+a}{az+1}$$

Это — круговое преобразование первого рода. Для точек $C(z)$, принадлежащих единичной окружности $z'=\dfrac{a+z}{az+1}=\overline{z}'$, следовательно, их образы $M(z')$ лежат на действительной оси, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку AB. ■

Задача 2. Найти композицию двух инверсий относительно окружностей с различными центрами. При каком условии эти инверсии перестановочны?

■ Одну из окружностей инверсий можно принять за единичную $z\bar{z}=1$. Пусть вторая окружность имеет центр S и R. Тогда инверсии относительно этих окружностей выражаются формулами:

$$z'=\frac{1}{\bar{z}} \quad \text{и} \quad z'=\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{s}}+s.$$

Их композиция в данном порядке выражается формулой

$$z'=\frac{R^2}{\frac{1}{z}-\bar{s}}+s,$$

или

$$z'=\frac{(R^2-s\bar{s})z+s}{1-\bar{s}z}. \tag{25.9}$$

Это — круговое преобразование первого рода с детерминантом

$$\delta=\begin{vmatrix} R^2-s\bar{s} & s \\ -\bar{s} & 1 \end{vmatrix}=R^2\neq 0.$$

Композиция этих же инверсий, взятых в обратном порядке, записывается формулой

$$z'=\frac{z-s}{\bar{s}z+R^2-s\bar{s}}. \tag{25.10}$$

При условии $R^2-s\bar{s}=-1$, т. е. когда окружности инверсий ортогональны, формулы (25.9) и (25.10) совпадают. ■

Задача 3. Указать способ построения образа точки при круговом преобразовании $z'=\dfrac{1}{z}$.

■ Это преобразование представляет собой коммутативную композицию симметрии $z'=\bar{z}$ относительно действительной оси и инверсии $z'=\dfrac{1}{\bar{z}}$. Отсюда вытекает способ построения образа $M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$ точки $M(z)$ (рис. 71): $M(z)\mapsto M_1(\bar{z})\mapsto M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Действительная ось и окружность $z\bar{z}=1$ инверсии этим преобразованием отображаются в себя. ■

Задача 4. Композиция $g_2 \circ g_1$ двух инверсий совпадает с композицией инверсии g и симметрии f относительно радикальной оси окружностей инверсий g_1 и g_2. Доказать, что центр инверсии g является образом центра инверсии g_2 при инверсии g_1.

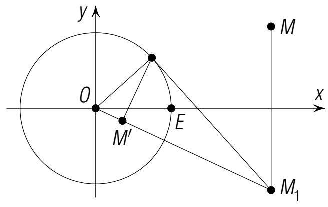

Рис. 71

■ Пусть окружность инверсии g_1 единичная ($z\bar{z}=1$), а окружность инверсии g_2 имеет уравнение $(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=R^2$. Тогда их композиция имеет формулу (25.9). Необходимо показать, что $g_2 \circ g_1 = f \circ g$, где f — симметрия относительно прямой $\bar{s}z+s\bar{z}+R^2-s\bar{s}-1=0$ — радикальной оси указанных окружностей (§ 17). Она записывается формулой (§ 18)

$$z'=-\frac{s}{\bar{s}}\bar{z}+\frac{1+s\bar{s}-R^2}{\bar{s}}.$$

Искомое преобразование g находится как композиция $f \circ (g_2 \circ g_1)$:

$$z'=-\frac{s}{\bar{s}}\cdot\frac{(R^2-s\bar{s})\bar{z}+\bar{s}}{1-s\bar{z}}+\frac{1+s\bar{s}-R^2}{\bar{s}}.$$

После упрощений эта формула принимает вид

$$z'=\frac{s\bar{z}+(R^2-s\bar{s}-1)}{s\bar{s}\bar{z}-\bar{s}},$$

или

$$z'=\frac{\frac{1}{\bar{s}}\bar{z}+\left(\frac{R^2}{s\bar{s}}-1-\frac{1}{s\bar{s}}\right)}{\bar{z}-\frac{1}{s}}.$$

При сравнении её с (24.4) видим, что это — инверсия с центром $1/\bar{s}$ и радиусом r, $r^2=\frac{R^2}{s\bar{s}}-1$. ■

§ 26. Круговые преобразования второго рода

26.1. Формула и свойства круговых преобразований второго рода. Сейчас предметом нашего изучения будет *дробно-линейное преобразование второго рода*

$$z'=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \qquad (26.1)$$

где a, b, c, d — постоянные комплексные числа и $\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$. Примером такого преобразования может служить инверсия (24.6).

Формуле (26.1) придадим вид (при $c \neq 0$):

$$z' = \frac{\frac{a}{c}\bar{z} + \frac{b}{c}}{\bar{z} + \frac{d}{c}}.$$

Это преобразование является инверсией, если одновременно выполнены условия

$$\frac{b}{c} = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}, \quad \frac{a}{c} = -\frac{\bar{d}}{\bar{c}}, \quad \frac{b}{c} + \frac{a\bar{a}}{c\bar{c}} \neq 0,$$

которые эквивалентны условиям

$$b\bar{c} = \bar{b}c, \quad a\bar{c} + c\bar{d} = 0, \quad c \neq 0. \tag{26.2}$$

поскольку всегда $\delta \neq 0$. Из первых двух равенств следует $a\bar{b} + b\bar{d} = 0$ и, наоборот, из равенств $a\bar{c} + c\bar{d} = 0$ и $a\bar{b} + b\bar{d} = 0$ вытекает $b\bar{c} = \bar{b}c$.

С целью единства подхода лучше опустить требование $c \neq 0$. Тогда при $c = 0$ и $a\bar{b} + b\bar{d} = 0$ формулой (26.1) задаётся *осевая симметрия* относительно прямой $dz = a\bar{z} + b$. Поэтому целесообразно считать осевую симметрию частным (предельным) случаем инверсии, а её ось рассматривать как окружность с центром ∞.

При $c = 0$ преобразование (26.1) представляет собой *подобие второго рода*. В дальнейшем, если нет оговорки, будем полагать $c \neq 0$.

Преобразование, обратное преобразованию (26.1), имеет формулу

$$z' = \frac{-\bar{d}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} - \bar{a}}, \tag{26.3}$$

т. е. является преобразование того же вида с определителем

$$\begin{vmatrix} -\bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & -\bar{a} \end{vmatrix} = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{\delta},$$

сопряжённым определителю δ данного преобразования (26.1).

Очевидно, *дробно-линейное преобразование* (26.1) *второго рода представляет собой композицию симметрии* $z' = \bar{z}$ *относительно действительной оси и дробно-линейного преобразования* (25.4) *первого рода.*

Теорема. *Всякое дробно-линейное преобразование второго рода является композицией инверсии и подобия первого рода.*

■ Мы хотим представить (26.1) в виде

$$z' = \sigma\left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{s}} + s\right) + \rho,$$

т. е. как композицию инверсии $z' = \dfrac{R^2}{\bar{z} - \bar{s}} + s$ и подобия $z' = \sigma z + \rho$

первого рода. Проверкой убеждаемся, что

$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{\bar{z}+\dfrac{d}{c}}.$$

Поэтому $s=-\dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}$, $\sigma=\dfrac{bc-ad}{c^2R^2}$, $\rho=\dfrac{a}{c}-\sigma s=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\bar{d}(bc-ad)}{c^2\bar{c}R^2}$. При этом центром подобия $z'=\sigma z+\rho$ является точка

$$s_1=\frac{\rho}{1-\sigma}=\frac{ac\bar{c}R^2+\bar{d}(bc-ad)}{\bar{c}(c^2R^2-bc+ad)}.$$

Центр s_1 подобия совпадает с центром s инверсии, если

$$\frac{ac\bar{c}R^2+\bar{d}(bc-ad)}{\bar{c}(c^2R^2-bc+ad)}=-\frac{\bar{d}}{\bar{c}},$$

или

$$ac\bar{c}R^2+\bar{d}(bc-ad)+\bar{d}(c^2R^2-bc+ad)=0,$$

т. е.

$$a\bar{c}+c\bar{d}=0. \qquad \blacksquare$$

Полученное представление дробно-линейного преобразования второго рода неоднозначно: оно зависит от выбора радиуса окружности инверсии.

Следствие 1. Дробно-линейное преобразование второго рода отображает множество прямых и окружностей в себя. Поэтому его называют также круговым преобразованием второго рода.

Следствие 2. Круговое преобразование второго рода сохраняет величины углов между окружностями, а также между окружностями и прямыми, но изменяет их ориентацию на противоположную.

Следствие 3. Круговое преобразование второго рода переводит двойное отношение четырёх точек плоскости в сопряжённое ему число и сохраняет двойное отношение расстояний между точками.

26.2. Неподвижные точки преобразования f (26.1) получаются при условии $z'=z$, которое приводит к уравнению

$$z=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\quad \delta=ad-bc\neq 0, \tag{26.4}$$

или

$$cz\bar{z}+dz-a\bar{z}-b=0. \tag{26.5}$$

При его исследовании рассмотрим два принципиально различных случая: $c\neq 0$ и $c=0$ (когда f — подобие второго рода).

I. Пусть $c \neq 0$. Из формулы (26.1) видно, что точка ∞ не является неподвижной при f. Запишем уравнение (26.5) в виде

$$z\bar{z}+\frac{d}{c}z-\frac{a}{c}\bar{z}-\frac{b}{c}=0. \tag{26.6}$$

Используя результаты § 14, делаем следующие выводы:

1. При $\frac{d}{c}=-\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$, $\frac{b}{c}=\frac{\bar{b}}{\bar{c}}$ и $-\frac{ad}{c^2}+\frac{b}{c}=\frac{bc-ad}{c^2}>0$. т. е. при $\bar{a}c+\bar{c}d=0$, $b\bar{c}=\bar{b}c$ и $\delta<0$ уравнение (26.6), а значит, и (26.5) является уравнением окружности с центром $s=\frac{a}{c}$ и радиусом R, $R^2=-\frac{\delta}{c^2}$. Тогда преобразование f есть *инверсия* относительно этой окружности, каждая точка которой неподвижна.

2. Если $\bar{a}c+\bar{c}d=0$, $b\bar{c}=\bar{b}c$, $\delta>0$, то уравнением (26.6) или (26.5) задаётся окружность мнимого радиуса. В этом случае неподвижных действительных точек нет, а преобразование f представляет собой коммутативную композицию инверсии относительно окружности

$$\left(z-\frac{a}{c}\right)\left(\bar{z}-\frac{\bar{a}}{\bar{c}}\right)=\frac{\delta}{c^2}$$

и симметрии с центром $s=\frac{a}{c}$.

3. Если $\bar{a}c+\bar{c}d=0$, но $b\bar{c}\neq\bar{b}c$, то неподвижных точек нет.

4. Если $\bar{a}c+\bar{c}d\neq 0$, то уравнение (26.6) подстановкой $\bar{z}=\frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$ приводим к виду

$$(\bar{a}c+\bar{c}d)z^2-(a\bar{a}-d\bar{d}+b\bar{c}-b\bar{c})z-(a\bar{b}+b\bar{d})=0. \tag{26.7}$$

В зависимости от дискриминанта этому уравнению удовлетворяют две различные или же две совпадающие точки.

II. Пусть $c=0$. В этом случае уже $a\neq 0$ и $d\neq 0$, так как в противном случае $\delta=0$. Тогда f является подобием $z'=\frac{a}{d}\bar{z}+\frac{b}{d}$, всегда имеющим неподвижную точку ∞. Уравнение (26.5) становится линейным:

$$dz-a\bar{z}-b=0. \tag{26.8}$$

Руководствуясь результатами § 11, получаем такие выводы:

1. Если $|a|=|d|$ и $a\bar{b}+b\bar{d}=0$, то уравнение (26.8) есть уравнение прямой, каждая точка которой неподвижна, т. е. f — *осевая симметрия* относительно этой прямой. Ось содержит и точку ∞.

2. При $|a|=|d|$ и $a\bar{b}+b\bar{d}\neq 0$ неподвижных точек, кроме ∞, не существует, преобразование f — *переносная симметрия*.

3. Если $|a| \neq |d|$, то, кроме ∞, преобразование f имеет ещё одну неподвижную точку $\dfrac{a\bar{b}+b\bar{d}}{d\bar{d}-a\bar{a}}$ (центр подобия второго рода).

Таким образом, *круговое преобразование второго рода, отличное от подобия и инверсии, имеет не более двух неподвижных точек. Если же круговое преобразование второго рода имеет более двух неподвижных точек, то они принадлежат одной прямой или одной окружности и это преобразование является соответственно осевой симметрией или инверсией.*

26.3. Задание кругового преобразования можно осуществить на основании такой теоремы.

Теорема. *Существует единственное круговое преобразование указанного рода, при котором три данные точки M_1, M_2, M_3 переходят соответственно в три заданные точки N_1, N_2, N_3.*

■ Если при круговом преобразовании первого рода $M_1 \mapsto N_1$, $M_2 \mapsto N_2$, $M_3 \mapsto N_3$ и $M(z) \mapsto M'(z')$, то

$$(MM_1, M_2M_3) = (M'N_1, N_2N_3),$$

т. е.

$$\frac{z-m_2}{m_1-m_2} : \frac{z-m_3}{m_1-m_3} = \frac{z'-n_2}{n_1-n_2} : \frac{z'-n_3}{n_1-n_3}, \tag{26.9}$$

откуда

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

где

$$\begin{aligned}
a &= (m_1-m_2)n_1n_2 + (m_2-m_3)n_2n_3 + (m_3-m_1)n_3n_1,\\
b &= (m_1-m_3)((m_3-m_2)n_3n_2 + (n_2-n_3)m_2n_2 + n_1(m_2n_3-m_3n_2)),\\
c &= (n_1m_2-n_2m_1) + (n_2m_3-n_3m_2) + (n_3m_1-n_1m_3),\\
d &= (n_1-n_3)(m_1-m_3)(m_2-m_3).
\end{aligned}$$

Для кругового преобразования второго рода с указанными парами соответственных точек должно выполняться равенство

$$\frac{\bar{z}-\bar{m}_2}{\bar{m}_1-\bar{m}_2} : \frac{\bar{z}-\bar{m}_3}{\bar{m}_1-\bar{m}_3} = \frac{z'-n_2}{n_1-n_2} : \frac{z'-n_3}{n_1-n_3}, \tag{26.10}$$

откуда также получаются аналогичные выражения для коэффициентов a, b, c, d формулы (26.1).

Свойствами (26.9) и (26.10) обладает каждое круговое преобразование соответственно первого и второго рода. Поэтому существует лишь одно круговое преобразование первого рода и одно круговое преобразование второго рода, при каждом из которых $M_i \mapsto N_i$ $(i=1, 2, 3)$. ■

Из доказанной теоремы следует, что *любую окружность или прямую можно отобразить* (причём бесконечным множеством способов) *круговым преобразованием первого или второго рода в любую заданную окружность или прямую.* В самом деле, для этого надо лишь обеспечить, чтобы какие-либо три точки окружности или прямой перешли три точки другой окружности или прямой. В частности, данную окружность или прямую всегда можно отобразить в себя, указав на ней же образы трёх её точек.

Для того, чтобы четвёрку точек A, B, C, D можно было перевести в четвёрку точек A_1, B_1, C_1, D_1, необходимо, чтобы их двойные отношения были равны, либо были комплексно сопряжёнными числами. Исходя из геометрического смысла аргумента и модуля двойного отношения четырёх точек (§ 13), этому факту можно придать более интересную геометрическую интерпретацию: необходимо, чтобы величина угла между окружностями ABC и ABD) была равна величине угла между окружностями $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1D_1$ (без учёта ориентации) и двойное отношение расстояний между точками A, B, C, D равнялось двойному отношению расстояний между точками A_1, B_1, C_1, D_1. Угол между окружностями ABC и ABD равен $\overrightarrow{\widehat{BCA}}-\overrightarrow{\widehat{BDA}}$ (см. рис. 36, с. 75), а двойное отношение расстояний между точками A, B, C, D равно $\dfrac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$, следовательно, необходимо, чтобы

$$\overrightarrow{\widehat{BCA}}-\overrightarrow{\widehat{BDA}}=\overrightarrow{\widehat{B_1C_1A_1}}-\overrightarrow{\widehat{B_1D_1A_1}}$$

(здесь углы ориентированные) и

$$\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=\frac{A_1C_1\cdot B_1D_1}{B_1C_1\cdot A_1D_1}.$$

Если четырёхугольник $ACBD$ *выпуклый*, то углы BCA и BDA ориентированы противоположно и поэтому их разность равна сумме одинаково ориентированных противоположных углов при вершинах C и D четырёхугольника $ACBD$. Таким образом, *для того, чтобы выпуклый четырёхугольник $ACBD$ мог быть отображён круговым преобразованием в выпуклый четырёхугольник $A_1C_1B_1D_1$, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов C и D равнялась сумме противоположных углов C_1 и D_1, и отношение произведений длин противоположных сторон первого четырёхугольника равнялось отношению произведений длин противоположных сторон второго.*

В частности, всякий выпуклый четырёхугольник можно отобразить круговым преобразованием в параллелограмм, углы которого равны *полусуммам* противоположных углов четырёхугольника, а квадраты длин сторон равны произведениям длин противоположных сторон данного четырёхугольника.

Задачи

4.36. Пользуясь инверсией, докажите теорему Птолемея для вписанного в окружность четырёхугольника (§ 7).

4.37. Даны две неравные окружности. Докажите, что существует инверсия, переводящая одну из них в другую. Сколько существует таких инверсий?

4.38. Найдите образ пучка окружностей, касающихся мнимой оси в начальной точке, при преобразовании $z' = \frac{1}{z}$.

4.39. Найдите образ пучка прямых с центром в начальной точке при круговом преобразовании $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

4.40. Найдите формулу кругового преобразования первого рода, отображающего точки 0, 1, i в точки $-i$, 0, 1 соответственно. Каким будет образ круга, окружность которого содержит три первые данные точки?

4.41. Напишите формулы круговых преобразований первого и второго рода, отображающих точки i, 0, ∞ в точки ∞, 1, i соответственно.

4.42. Докажите, что любое круговое преобразование, отличное от подобия, представимо, причём единственным способом в виде композиции инверсии и движения (движения и инверсии).

4.43. Используя круговые преобразования, докажите, что двойное отношение четырёх точек, лежащих на одной окружности или одной прямой, вещественно. В каком случае оно положительно и в каком — отрицательно?

10—7685.—Я. П. Понарин.

ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО СОДЕРЖАНИЯ

5.1. В окружность вписана трапеция $ABCD$. Продолжения её боковых сторон AD и BC пересекаются в точке M, а касательные в вершинах B и D пересекаются в точке N. Докажите, что прямые AB и MN параллельны.

5.2. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 являются ортогональными проекциями произвольной точки M на прямые BC, CA, AB. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что центроид треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с серединой отрезка OM.

5.3. В окружности проведены параллельные сонаправленные хорды AB и CD. Постройте на хорде AD такую точку M, чтобы хорда окружности, делящаяся точкой M пополам, была параллельна данным хордам.

5.4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC как на диагоналях построены одинаково ориентированные квадраты BA_1CA_2, CB_1AB_2 и AC_1BC_2. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$, а прямые AA_2, BB_2, CC_2 — высоты треугольника $A_2B_2C_2$, причём $AA_1=B_1C_1$, $BB_1=C_1A_1$, $CC_1=A_1B_1$.

5.5. Даны три неколлинеарные точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Постройте точку $D(d)$ такую, чтобы

$$\frac{a-c}{b-c}+\frac{a-d}{b-d}=0.$$

5.6. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $BCMN$, $CAPQ$, $ABRS$. Точки X, Y, Z — ортогональные проекции центра O окружности, описанной около треугольника ABC, на прямые MN, PQ, RS. Докажите, что $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}=\overrightarrow{0}$.

5.7. Дан правильный семиугольник $A_0A_1\ldots A_6$. Докажите следующие равенства:

$$A_0A_2^2=A_0A_1^2+A_0A_1\cdot A_0A_3, \qquad A_0A_3^2=A_0A_1^2+A_0A_2\cdot A_0A_3.$$

5.8. Диаметр AB окружности ω разделён точками M и N на три равные части. Докажите, что для любой точки P окружности ω сумма PM^2+PN^2 одна и та же.

5.9. В окружность ω вписан треугольник ABC. Докажите, что $h_c^2 = mn$, где m и n — расстояния от вершин A и B до касательной к ω в точке C.

5.10. Докажите, что если сумма квадратов расстояний от любой точки плоскости до двух противоположных вершин четырёхугольника равна сумме квадратов расстояний до двух других его вершин, то этот четырёхугольник — прямоугольник.

5.11. На стороне AB правильного треугольника ABC выбрана точка C_1 так, что $AC_1 : C_1B = 3:2$, а на стороне AC — точка B_1 так, что $AB_1 : B_1C = 3:14$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Докажите перпендикулярность прямых PA и CC_1.

5.12. Комплексным числам 1, a, b и ab соответствуют точки P, A, B и C. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$.

5.13. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной около треугольника окружности относительно этого треугольника пересекаются на окружности девяти точек треугольника.

5.14 (*теорема Штейнера*). Через вершину A треугольника ABC проведены две прямые, образующие равные углы со сторонами AB и AC и пересекающие сторону BC в точках M и N. Докажите, что

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

5.15. В окружность $\omega(O, R)$ вписан треугольник ABC. Через центр O проведена прямая l, пересекающая AC и BC в точках M и N таких, что $OM = ON$. Выразите расстояние MN через R и углы треугольника.

5.16 (*обобщение теоремы Монжа*). На окружности даны пять точек. Через центроид треугольника с вершинами в трёх из них проводится прямая, перпендикулярная прямой, содержащей две оставшиеся точки. Докажите, что построенные таким образом десять прямых пересекаются в одной точке.

5.17. Через произвольную точку P окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, параллельные сторонам BC, CA, AB этого треугольника, и вторично пересекающие окружность ABC в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A, B, C относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Докажите, что

1) треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны и противоположно ориентированы;

2) $OO_2 = PH$, где O и O_2 — центры окружностей ABC и $A_2B_2C_2$, а H — ортоцентр треугольника ABC.

5.18. Углы треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины его сторон и основания высот являются шестью вершинами правильного семиугольника.

10*—7685.—Я. П. Понарин.

5.19. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Из точек A и B опущены перпендикуляры AA_2 и BB_2 на CD, из точек B и C — перпендикуляры BB_1 и CC_1 на DA, из точек C и D — перпендикуляры CC_2 и DD_2 на AB, наконец, из точек D и A опущены перпендикуляры DD_1 и AA_1 на BC. Докажите, что

1) отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 равны и содержащие их прямые пересекаются в одной точке, симметричной точке O относительно центроида четырёхугольника $ABCD$;

2) четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны четырёхугольнику $ABCD$ и вписаны в окружности с общим центром в точке пересечения указанных четырёх прямых.

5.20. На окружности даны шесть точек. Ортоцентр треугольника с вершинами в трёх из них соединён с центроидом треугольника с вершинами в трёх остальных. Докажите, что полученные таким способом двадцать отрезков пересекаются в одной точке, которая делит каждый из них в одном и том же отношении.

5.21. На сторонах четырёхугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны и перпендикулярны.

5.22. В окружность вписан четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что около четырёхугольника, образованного касательными к окружности в вершинах данного четырёхугольника, можно описать окружность.

5.23. Докажите, что в гармоническом четырёхугольнике (§ 15) расстояния от точки пересечения диагоналей до его сторон пропорциональны длинам этих сторон.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.5. $c=-ia+(1+i)b$, $d=(1-i)a+ib$. **1.6.** Для положительно ориентированного треугольника ABC: 1) $a(1+i\sqrt{3})/2$, 2) $a(-1+i\sqrt{3})/2$, 3) $ai\sqrt{3}/3$; для отрицательно ориентированного треугольника ABC: 1) $a(1-i\sqrt{3})/2$, 2) $-a(1+i\sqrt{3})/2$, 3) $-ai\sqrt{3}/3$. **1.14.** Если начальная точка совпадает с центром параллелограмма, то данное в условии равенство эквивалентно равенству $a\overline{a}=b\overline{b}$. **1.15.** Можно положить $a=1$, $b=-1$, $c\overline{c}=1$, $m=\overline{m}$. **1.16.** $MA^2+MB^2=2m\overline{m}+2a\overline{a}=2R^2+AB^2/2$. **1.22.** Можно принять $a=1$, $b=i$, $c=-1$, $d=-i$. По условию параллельности $b_1-a_1=\lambda(b-a)$ $(\lambda=\overline{\lambda})$. Отсюда $b_1=a_1+\lambda(i-1)$, аналогично $c_1=a_1-2\lambda$, $d_1=a_1-\lambda(i+1)$. **1.23.** $\lambda=2$. **1.24.** $\alpha\beta/(\alpha+\beta)$. **1.25.** Указанная сумма квадратов расстояний равна $2(OM^2+R^2)$, где R — радиус данной окружности. **1.26.** Если принять $m=0$, то точки пересечения будут иметь координаты: $\dfrac{a(b\overline{c}-\overline{b}c)}{a(\overline{c}-\overline{b})+\overline{a}(c-b)}$, $\dfrac{b(c\overline{a}-\overline{c}a)}{b(\overline{a}-\overline{c})+\overline{b}(a-c)}$, $\dfrac{c(a\overline{b}-\overline{a}b)}{c(\overline{b}-\overline{a})+\overline{c}(b-a)}$. **1.31.** Указанное расстояние равно $|a^2-b^2|/2$, где a — координата конца одного диаметра, b — координата конца другого диаметра. **1.34.** $(\alpha+1)/(\alpha-1)$. **1.35.** Для четырёхугольника $ABCD$ эта точка имеет координату $(a+b+c+d)/2$. **1.38.** Если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $z\overline{z}=1$, то центр окружности, содержащей ортоцентры указанных треугольников, имеет координату $a+b+c+d$. **1.39.** Центр окружности девяти точек треугольника находится в середине отрезка OH, а её радиус равен $R/2$. **1.40.** Так как векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AH}$ сонаправлены, то $AA_1 \cdot AH=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AH}$. Если угол B тупой, то $AA_1\cdot AH-BB_1\cdot BH=AB^2$. **1.41.** $\overline{d}=\dfrac{a+b-2c}{ab-c^2}$, $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}=\dfrac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{b}}=\dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}=\dfrac{CA^2}{CB^2}$. **1.42.** $AC\cdot BD=R^2$. **1.44.** Положим $a=1$, $b=-1$. Тогда $m=\overline{m}=2c/(1+c^2)=2/(c+\overline{c})$. **1.45—1.47.** См. п. 1.4 и задачу 1.5. **1.48.** Используйте задачу 1.28. Три прямые, симметричные данной, пересекают описанную окружность в точке $-abc/(mn)$, где m и n — точки пересечения данной прямой с окружностью. **1.54.** $\cos\alpha=4/5$. **1.55.** Если A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, то доказательство равенства $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1H}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{A_1H}, \overrightarrow{A_1C_1}}\right)$ сводится к тому, что число $\dfrac{h-a_1}{b_1-a_1}:\dfrac{c_1-a_1}{h-a_1}$ должно быть действительным. **1.56.** Равенство $\widehat{A}-\widehat{B}=\pi/2$ эквивалентно равенству $\arg\dfrac{(c-a)(c-b)}{(b-a)(a-b)}=\pi/2$. Пусть треугольник ABC вписан в окружность $z\overline{z}=1$. Предыдущее равенство сводится к $ab=-c^2$. Если D — основание высоты, E — середина AB, то $c=d-e$ и $DE^2=c\overline{c}=1$. **1.57.** 30°, 60°, 90°. **1.58.** $S(A_1B_1C_1)=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{16ia^2b^2c^2}$. **1.59.** $\arg\dfrac{b-a}{a+b+c}$, $\arg\dfrac{b-c}{a+b+c}$, $\arg\dfrac{c-a}{a+b+c}$. **1.60.** Если треугольник ABC ориентирован положительно и вписан в окружность $z\overline{z}=1$, то $\operatorname{ctg}\widehat{A}=\dfrac{c+b}{c-b}i$, $\operatorname{ctg}\widehat{B}=\dfrac{a+c}{a-c}i$, $\operatorname{ctg}\widehat{C}=\dfrac{b+a}{b-a}i$.

1.61. Если дан пятиугольник $ABCDE$, то площадь указанного треугольника равна $\frac{(a-c)(b-d)(c-e)(e-b)i}{8abcde}$. **1.62.** $S(A_1B_1C_1)=\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)i}{4a^2b^2c^2}$. **1.63.** 1/4. **1.64.** Пусть треугольник ABC вписан в окружность $z\overline{z}=1$, и продолжения высоты и медианы, содержащих вершину C, пересекают эту окружность в точках P и M. Тогда из равенства углов следует $b:m=m:p=p:a$. Но $p=-ab:c$, значит, $b:m=-(cm):(ab)=-b:c$, откуда $m=-c$ и $ab=-c^3$. Из принадлежности середины AB хорде CM получаем $(a+b)\times\times(ab-c^2)=0$. При $ab=c^2$ будет $a=b=-c$, т. е. треугольник ABC вырождается. При $a+b=0$ он прямоугольный. В этом случае $c:b=m:a$. Следовательно, $\widehat{A}=\widehat{ACM}=60^\circ$ и $\widehat{B}=30^\circ$. **1.65.** См. указание к задаче 1.56. **1.66.** См. решение задачи 1.64. **1.67.** См. задачу 1.60. **1.68.** Условие $\operatorname{tg}\widehat{A}\operatorname{tg}\widehat{B}=2$ приводит к равенству $\frac{b-c}{b+c}i\cdot\frac{c-a}{c+a}i=2$, или $3bc+3ca+ab+c^2=0$, откуда $-ab/c=3a+3b+c$. Если M — середина высоты CC_1, то $m=(c+c_1)/2=(a+b+3c-ab/c)/4=a+b+c=h$. **1.69.** См. решение задачи 1.68. **1.71.** Пусть треугольник вписан в окружность $z\overline{z}=1$. Тогда $a_1=bc/a$, $b_1=ca/b$, $c_1=ab/c$, и для точки D пересечения прямых AB_1 и A_1B выполнено $\overline{d}=\frac{(a+b_1)-(a_1+b)}{ab_1-a_1b}=\frac{ab+bc+ca}{c(a^2+ab+b^2)}$, откуда $d=\frac{a+b+c}{1+a\overline{b}+\overline{a}b}=\frac{1}{1+a\overline{b}+\overline{a}b}h$. Поскольку число $\frac{1}{1+a\overline{b}+\overline{a}b}$ действительное, то точки O, H, D коллинеарны. **1.73.** При обозначениях п. 6.3 (теорема Симсона) докажите, что точки A_1 и B_1 коллинеарны с серединой отрезка MH. **1.74.** Пусть M и N — ортогональные проекции точки D на прямые BC и AC. Тогда $m=(b+c+d-bc/d)/2$ и $n=(a+c+d-ac/d)/2$ и поэтому $m-n=(a-b)(c-d)/(2d)$. Поскольку $OH\perp MN$, то $(m-n)\overline{h}+(\overline{m}-\overline{n})h=0$, где $h=a+b+c$. Полученное равенство $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$ симметрично относительно a, b, c, d. Значит, для этого свойства вершины четырёхугольника $ABCD$ равноправны. **1.75.** Если хорды A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке M, то $a_2==\frac{a_1-m}{\overline{m}a_1-1}$. Пусть A — точка пересечения касательных в концах хорды A_1A_2. Тогда $\overline{a}==2/(a_1+a_2)=\frac{2(\overline{m}a_1-1)}{\overline{m}a_1^2-m}$. Аналогично находятся координаты b и c точек пересечения двух пар других касательных. Осталось проверить, что число $(\overline{a}-\overline{b})/(\overline{a}-\overline{c})$ действительное. **1.76.** Примените результат задачи 1.73. **1.78.** Центр окружности $A_1B_1C_1$ имеет координату $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. **1.80.** 1) $\widehat{A}=\widehat{C}$, 2) $\widehat{C}=60^\circ$ или $\widehat{C}=120^\circ$. **1.81.** Пусть окружность $z\overline{z}=1$ пересекает прямые BC, CA, AB, соответственно, в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, и точки A_1, B_1, C_1 служат проекциями точки M на эти прямые. Тогда согласно (4.6) $a_2-a_1+m-a_1a_2\overline{m}=0$, $b_2-b_1+m-b_1b_2\overline{m}=0$, $c_2-c_1+m-c_1c_2\overline{m}=0$. Поэтому система уравнений вторых перпендикуляров $a_1-a_2+z-a_1a_2\overline{z}=0$, $b_1-b_2+z-b_1b_2\overline{z}==0$, $c_1-c_2+z-c_1c_2\overline{z}=0$ с очевидностью имеет решение $z=-m$. Следовательно, они пересекаются в точке, симметричной точке M относительно центра окружности. **1.82.** Невозможность такого построения следует из *кубического* уравнения $abc=e^3$. **1.85.** Пусть прямые MA, MB, MC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Если прямая, симметричная прямой AA_1 относительно биссектрисы угла A, пересекает эту окружность в точке A_2, то $A_1A_2\parallel BC$. Точка пересечения второй тройки прямых имеет координату, сопряжённую числу $\frac{abc\overline{m}-(ab+bc+ca)+m(a+b+c)}{m\overline{m}-1}$.

Глава 2

2.2. $BB_1\cdot CA+CC_1\cdot AB=|(b_1-b)(a-c)|+|(c_1-c)(b-a)|\geqslant|ab_1-ab-cb_1+bc_1-ac_1+ac|$. На основании (8.1) $(a-b)/(b-c)=(a_1-b_1)/(b_1-c_1)$, откуда $ab_1-ac_1+bc_1-a_1b++a_1c+cb_1=0$ и поэтому $BB_1\cdot CA+CC_1\cdot AB\geqslant|ab_1-ab-cb_1+bc_1-ac_1+ac-(ab_1-ac_1++bc_1-a_1b+a_1c+cb_1)|=|a_1b-a_1c-ab+ac|=|a_1-a|\cdot|b-c|=AA_1\cdot BC$. **2.3.** По условию

$\dfrac{a_1-a}{b-a}=\dfrac{c_1-c}{d-c}=\dfrac{b_1-c}{b-c}=\dfrac{d_1-a}{d-a}=\sigma$, откуда $a_1+c_1=b_1+d_1$. **2.5.** Искомое множество — образ окружности ABC при гомотетии с коэффициентом $2k$ и центром в центре этой окружности. **2.6.** $A_1B_1=|bc/m-ca/m|=|c/m|\cdot|b-a|=AB$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно диаметра, перпендикулярного хордам AA_1, BB_1, CC_1. **2.7.** Пусть $f=0$. Из подобия треугольников ABC_1 и QPF имеем $\dfrac{a-c_1}{b-c_1}=\dfrac{q}{p}$, откуда $c_1=\dfrac{ap-bq}{p-q}$. Выразите аналогично a_1 и b_1 и проверьте, что $\dfrac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\dfrac{q-p}{r-p}$. **2.9.** Из равенств $a+\varepsilon b+\varepsilon^2c=0$ и $a_1+\varepsilon b_1+\varepsilon^2c_1=0$ получаем $a-a_1+\varepsilon(b-b_1)+\varepsilon^2(c-c_1)=0$. Тогда $AA_1=|a-a_1|=|\varepsilon(b-b_1)+\varepsilon^2(c-c_1)|=|(b-b_1)+\varepsilon(c-c_1)|\leqslant|b-b_1|+|c-c_1|=BB_1+CC_1$. Равенства имеют место лишь при совпадении треугольников. **2.11.** Если центр симметрии шестиугольника $ABCDEF$ принят за начальную точку, то $d=-a$, $e=-b$, $f=-c$. Согласно условию $a+\varepsilon b+\varepsilon^2p=0$, $c-\varepsilon a+\varepsilon^2q=0$, $-b-\varepsilon c+\varepsilon^2r=0$. Если эти равенства умножить, соответственно, на ε, 1, ε^2 и почленно сложить, то получим $p+\varepsilon r+\varepsilon^2q=0$, так как $\varepsilon^3=1$ и $\varepsilon^4=\varepsilon$. Точки P, Q, R могут совпадать. **2.12.** Пусть $a=1$, $b=\varepsilon$, $c=\varepsilon^2$. Тогда $m\overline{m}=1$, и $a+b+c=0$. Проверьте, что левая часть доказываемого равенства равна $3((m\overline{m})^2+4m\overline{m}+1)$. **2.13.** Пусть $b=0$, $c=1$, $a=\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Тогда $d=\overline{d}$ и $e-a=\alpha d$. Отсюда $ED^2=EC^2=1+d+d^2$. **2.14.** Пусть параллелограмм $ABCD$ ориентирован положительно и $a=0$. Тогда $c=b+d$, $m=-\varepsilon b$, $n=-\varepsilon^2d$ и поэтому $c+\varepsilon n+\varepsilon^2m=0$. **2.17.** Если $a=0$, $b=1$, $c=\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$, т. е. $\alpha^3=-1$ и $\alpha^2-\alpha+1=0$, то $a_1=(\alpha+2)/3$, $b_1=2\alpha/3$, $c_1=1/3$, $a_2=(1+4\alpha)/9$. Отсюда $a_2-a_1=\alpha^2(a_2-a)$. Значит, $A_2A_1=A_2A$ и $\widehat{AA_2A_1}=\arg\alpha^2=2\pi/3$. **2.20.** Если $n=8$, то $A_0A_1=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $A_0A_3=R\sqrt{2+\sqrt{2}}$. При $n=10$ будет $A_0A_1=(\sqrt{5}-1)\times R/2$, $A_0A_3=(\sqrt{5}+1)R/2$. **2.21.** Пусть точкам касания соответствуют числа 1, i, -1, $-i$. Тогда вершины квадрата $ABCD$ имеют координаты $a=1+i$, $b=-\overline{a}$, $c=-a$, $d=\overline{a}$. **2.22.** Эта сумма равна $24R^4$. **2.23.** Пусть $R=1$, $OM=d$, вершинам многоугольника соответствуют числа 1, z, z^2, ..., z^{n-1}. Искомая сумма равна $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(z^k-m)^2(\overline{z}^k-\overline{m})^2$. Преобразуйте её, учитывая, что $z^k\overline{z}^k=1$, $m\overline{m}=d^2$, $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=0$ и $1+z^2+z^4+\ldots+(z^2)^{n-1}=0$. **2.24.** Надо доказать, что $|z+1|=|z^4+1|+|z^2+1|$. Ср. с задачей 3 § 10. **2.25.** Примите во внимание, что для правильного 15-угольника $z^{10}+z^5+1=0$. **2.26.** См. решение задачи 5 § 10. **2.27.** Проекции вершин многоугольника на данную прямую находятся по формуле (4.3), при этом следует учесть, что $\overline{z}^k=z^{n-k}$. Указанная сумма равна $nR^2/2$. **2.28.** 60°. **2.29.** Центр симметрии шестиугольника примите за нулевую точку. Для нахождения координат третьих вершин построенных правильных треугольников используйте поворот на 60°, т. е. умножение на $\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Эту же идею можно использовать и для доказательства требуемого утверждения. **2.30.** Окружность ABC принимаем за единичную. Пусть $a=1$, $b=\gamma^3$, где $\gamma=\cos\pi/4+i\sin\pi/4$. Тогда $c=\gamma^5=-\gamma$, так как $\gamma^4=-1$. Если M_k ($k=0$, 1, 2, ..., 7) — вершины указанного восьмиугольника, то следует доказать, что $m_k-m_{k-1}=\gamma(m_{k-1}-m_{k-2})$. **2.31.** Пусть $a_k=z^k$, причём $z^{13}=-1$. Если P и Q — точки, симметричные центру O относительно хорд A_0A_{24} и A_1A_5, то $p=1+z^{24}=1-z^{11}$, $q=z+z^5$. Проверьте, что $(p-q)(\overline{p}-\overline{q})=3$. **2.32.** Пусть $a_k=z^k$, где $z=\cos\pi/21+i\sin\pi/21$. Следовательно, $z^{21}=-1$, $z^{14}-z^7+1=0$ и $z^{18}-z^{15}+z^{12}-z^9+z^6-z^3+1=0$. Находим $a'_k=(z^k+\overline{z}^k)/2=(z^k-z^{21-k})/2$ и проверяем заданное равенство. **2.33.** Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник и G_k ($k=1$, 2, 3, 4, 5, 6) — центры последних треугольников. Тогда $g_1=(2a+c+\alpha(a-e))/3$, $g_3=(2c+e+\alpha(e-c))/3$, $g_5=(2e+a+\alpha(a-e))/3$, где $\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Отсюда $g_3-g_1=\alpha(g_5-g_1)$. Это означает, что треугольник $G_1G_3G_5$ правильный. Аналогично показывается, что треугольник $G_2G_4G_6$ также правильный. **2.34.** Пусть $a=1$, $b=-1$, $c\overline{c}=1$. Если A_1, B_1, C_1 — проекции точки M на прямые BC, CA, AB, то $a_1=(m-1+c+c\overline{m})/2$, $b_1=(m+1+c-c\overline{m})/2$, $c_1=(m+\overline{m})/2$. По условию $m=(a_1+b_1+c_1)/3$, откуда $3m=2c+\overline{m}$ и $m=(3c+\overline{c})/4$. Если CD — высота треугольника ABC, то $c+\overline{c}=2d$, потому $m=(c+d)/2$, т. е. точка M совпадает с серединой отрезка CD. **2.35.** Пусть O — начальная точка. Тогда $b=\alpha a$, $c=\lambda a$, $d=\lambda c=\alpha\lambda a$, где

$\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$ и $\lambda=\overline{\lambda}$. Если M, N, K — середины отрезков OA, OD, BC, то $(k-m)\alpha=a(\alpha\lambda+\alpha^3)/2=a(\alpha\lambda-1)/2=n-m$. Значит, треугольник MNK правильный. **2.36.** Пусть $a=1$, $b=-1$. Тогда $d=1/3$ и $c=2\alpha-1$, где $\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Уравнение прямой CD имеет вид $z=\lambda c+(1-\lambda)d$, где $\lambda=\overline{\lambda}$. Докажите, что точка E имеет координату $\overline{\alpha}$. **2.37.** Пусть вершинам правильного вписанного $2n$-угольника $A_0A_1\ldots A_{2n-1}$ соответствуют комплексные числа z^k $(k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$, где $z=\cos\pi/n+i\sin\pi/n$. Тогда две соседние вершины соответствующего описанного $2n$-угольника имеют координаты $\dfrac{2z}{1+z}$ и $\dfrac{2z^2}{1+z}$, а две соседние вершины правильного описанного n-угольника — координаты $\dfrac{2z^2}{1+z^2}$ и $\dfrac{2z^4}{1+z^2}$. Следовательно, $a_n=|1-z^2|$, $b_n=2\left|\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right|$, $b_{2n}=2\left|\dfrac{1-z}{1+z^2}\right|$. Осталось проверить подстановкой доказываемое равенство, учитывая, что $d=2$. **2.38.** Пусть $a=0$ и $\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Тогда $a_1=c+\alpha(b-c)$, $b_1=\alpha c$, $c_1=\alpha b$. Поэтому $m=(b+c_1)/3=b(1+\alpha)/3$ и $a_1-m=b(2\alpha-1)/3+c(1-\alpha)$, $b_1-m=\alpha c-b\times\times(1+\alpha)/3$. Так как $\alpha^3=-1$ и $\alpha^2-\alpha+1=0$, обнаруживаем, что $(a_1-m)\alpha^2=b_1-m$, чем и заканчивается доказательство. **2.39.** Если $c=0$, то $n=\alpha b$, $m=\overline{\alpha}a=-\alpha^2a$, где $\alpha=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$. Используя это, находим, что углы указанного треугольника равны $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$. **2.40.** Очевидно, что $a-m=(b-m)i$, откуда $m=\dfrac{a-bi}{1-i}$ и, аналогично, $n=\dfrac{b-ci}{1-i}$, $p=\dfrac{c-di}{1-i}$, $q=\dfrac{d-ai}{1-i}$. Серединам R и S отрезков MP и NQ соответствуют числа $r=\dfrac{a+c-i(b+d)}{2(1-i)}$ и $s=\dfrac{b+d-i(a+c)}{2(1-i)}$. Если на отрезке RS как на диагонали построить квадрат $URVS$, то $v=\dfrac{r-is}{1-i}=(b+d)/2$, $u=\dfrac{s-ir}{1-i}=(a+c)/2$. Следовательно, точки U и V — середины диагоналей данного четырёхугольника. **2.41.** Из условия получаем: $m=b+(b-a)i$, $n=a+(b-a)i$, $l=c+(d-c)i$, $k=d+(d-c)i$ и, следовательно, $m+k-(b+d)=(a+c-(b+d))(-i)$, $n+l-(a+c)=(b+d-(a+c))i$. Если четырёхугольник $ABCD$ — не параллелограмм $(a+c\neq b+d)$, то из полученных равенств следует, что середины диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $MNKL$ являются вершинами квадрата. Если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм $(a+c=b+d)$, то середины совпадают $(m+k=b+d,\ n+l=a+c)$. **2.42.** Если $a_1-a_2=\alpha(a_2-a_3)$, то в силу подобия многоугольников $b_1-b_2=\alpha(b_2-b_3)$. **2.43.** Пусть треугольник ABC вписан в окружность $z\overline{z}=1$ и $a=1$, $b=\alpha^8$, $c=\alpha^{13}=-\alpha^4$, где $\alpha=\cos\pi/9+i\sin\pi/9$, т. е. $\alpha^{18}=1$, $\alpha^9=-1$, $\alpha^6-\alpha^3+1=0$. Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения прямых AE, BE, CE и AD, BD, CD с окружностью. Тогда $a_1=\alpha^{10}=-\alpha$, $b_1=\alpha^{17}=-\alpha^8$, $a_2=\alpha^9=-1$, $b_2=\alpha^{15}=-\alpha^6$. Для точки E пересечения прямых AA_1 и BB_1 имеем: $\overline{e}=\dfrac{(1-\alpha)-(\alpha^8-\alpha^8)}{-\alpha+\alpha^{16}}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha^4}$. Находим: $c_1=\dfrac{c-e}{c\overline{e}-1}=\alpha^2$. Следовательно, $\widehat{ACE}=20^\circ$. Аналогично получаем, что $\widehat{DCB}=10^\circ$.

Глава 3

3.1. 30°. **3.2.** $z+i\overline{z}=0$. **3.3.** $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-2=0$. **3.4.** $(-2+5i)z+(-2-5i)\overline{z}-14=0$. **3.5.** $(5+3i)z+(5-3i)\overline{z}-52=0$, $(3+5i)z+(3-5i)\overline{z}-52=0$, $(1-i)z+(1+i)\overline{z}=0$. Вершинам треугольника соответствуют числа $4-2i$, $2-4i$, $7-7i$. **3.6.** 90°. **3.7.** $\sqrt{2}/2$. **3.8.** Две прямые: $(3+i)z+(3-i)\overline{z}-28=0$ и $(1-3i)z+(1+3i)\overline{z}-16=0$. **3.9.** Пусть треугольник ABC вписан в окружность $z\overline{z}=1$ и данная прямая t имеет уравнение $\overline{u}(z-h)+u(\overline{z}-\overline{h})=0$, где $h=a+b+c$. Симметричная ей относительно AB прямая проходит через точку $-ab/c$ и образует с AB тот же угол, что и AB с прямой t. Это позволяет записать уравнение симметричной с t прямой и найти вторую точку пересечения её с окружностью. Она имеет координату $-\overline{u}abc/u$. В это выражение координаты a, b, c вершин треугольника входят симметрично. **3.10.** Пусть $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$, тогда $c_1=a+i(c-a)$, $c_2=b+i(b-c)$. Прямые AC_2, BC_1 и CH имеют уравнения $(\overline{a}-\overline{c}_2)z-(a-c_2)\overline{z}=\overline{a}c_2-a\overline{c}_2$,

$(\overline{b}-\overline{c}_1)z-(b-c_1)\overline{z}=\overline{b}c_1-b\overline{c}_1$, $(z-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{z}-\overline{c})(b-a)=0$. При выполнении подстановок и сложении первых двух уравнений получается третье. Это означает, что точка пересечения первых двух прямых принадлежит третьей. **3.11.** Решая системы уравнений соответствующих прямых, находим $p=\dfrac{2am}{a+b}$, $q=\dfrac{2bm}{a+b}$. Значит, $m=\dfrac{1}{2}(p+q)$. **3.12.** Положим $a=-1$, $b=1$. Если $|MA|^2-|MB|^2=s$, то искомое множество точек имеет уравнение $z+\overline{z}=s/2$. Это — прямая, перпендикулярная к AB и проходящая через точку $s/4$. **3.13.** Прямая, содержащая точку пересечения прямых AB и CD. **3.14.** Пусть $a=0$, $b=\overline{b}$. Тогда $m=\overline{m}$, $p=\lambda d$ при $\lambda=\overline{\lambda}$, $c=b+d$, $n=p+m=\lambda d+m$. Прямые DM, BP и CN имеют, соответственно, уравнения $(\overline{d}-m)z+(m-d)\overline{z}+m(d-\overline{d})=0$, $(b-\lambda\overline{d})z+(\lambda d-b)\overline{z}+\lambda b\times$ $\times(\overline{d}-d)=0$, $(\overline{d}-m+b-\lambda\overline{d})z+(m-d+\lambda d-b)\overline{z}+\lambda b(\overline{d}-d)+m(d-\overline{d})=0$. Очевидно, третье из них является следствием (суммой) первых двух. Это и доказывает утверждение задачи. **3.17.** $(1+i\sqrt{3})/2$ и $(1-i\sqrt{3})/2$. Доказываемое свойство четырёхугольника $ABCD$ следует из того, что $|(1+i\sqrt{3})/2|=|(1-i\sqrt{3})/2|=1$. **3.18.** Рассмотрите вторые точки пересечения прямых MP и NQ с окружностью. **3.20.** Пусть $\arg\left(\dfrac{b-m}{c-m}:\dfrac{b-a}{c-a}\right)=\varphi$ и $\arg\dfrac{b-a}{c-a}=\alpha=\widehat{CAB}$. Тогда $\widehat{CMB}=\arg\dfrac{b-m}{c-m}=\varphi+\alpha$. Искомое множество точек совпадает с множеством точек, из которых отрезок CB виден под постоянным углом $\varphi+\alpha$. **3.21.** Исключая параметр c из системы $z=\dfrac{c+i}{2c-i}$, $\overline{z}=\dfrac{c-i}{2c+i}$, получаем уравнение $4z\overline{z}+z+\overline{z}=2$, или $(z+1/4)(\overline{z}+1/4)=9/16$. Оно определяет окружность с центром $S(-1/4)$ и радиусом $R=$ $=3/4$. Из неё необходимо исключить точку $z=1/2$. **3.22.** Используйте уравнение (14.7); $s=bc(\overline{b}-\overline{c})/(\overline{b}c-b\overline{c})$. **3.23.** Точка M не существует, если $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. Воспользуйтесь теоремой Симсона (§ 7). Если $BC\cap AD=P$, то искомой точкой M является вторая точка пересечения окружностей PAB и PCD. Для нахождения координаты m примите точку P за начальную и используйте уравнение (14.7); $m=$ $=(ac-bd)/(a+c-(b+d))$. Покажите, что эта формула сохраняет силу при любом выборе начала. **3.24.** Если $c=0$, $a=1$, то $b=-\overline{b}$, $p=1+b-\lambda$. Руководствуясь (14.7), составьте уравнения окружностей PAC и PBC и проверьте выполнение условия ортогональности (14.9). **3.25.** Пусть $a=0$, $b=1$. Принадлежность точки B данным окружностям выражается равенствами $s+\overline{s}=1$ и $s_1+\overline{s}_1=1$. Так как точки A, C, S коллинеарны, то $c=\lambda s$ при $\lambda=\overline{\lambda}$. Из условия принадлежности точки C окружности S_1 находим $\lambda=s_1/s+\overline{s}_1/\overline{s}$ и проверяем, что двойное отношение точек B, C, S, S_1 — действительное число. Точка D равноправна с точкой C. **3.26.** В обоих случаях число $\dfrac{c_1-a}{d-a}\cdot\dfrac{c-b}{d_1-b}$ должно быть действительным. Для доказательства этого целесообразно положить $a=0$, $b=1$. **3.27.** Если описанная около данного правильного n-угольника окружность имеет уравнение $z\overline{z}=1$ и заданная сумма квадратов расстояний равна k^2, то искомое множество точек характеризуется уравнением $z\overline{z}=k^2/n-1$, т. е. при $k^2>n$ является окружностью, концентричной описанной окружности. **3.28.** Окружность $z\overline{z}=2k^2/n-1/2$ (в условиях предыдущего указания). **3.29.** Окружность, симметричная окружности ABC относительно прямой AB. **3.31.** Окружность, описанная около треугольника ABC. **3.32.** Окружность $(z-(a+b)/4)\times$ $\times(\overline{z}-(\overline{a}+\overline{b})/4)=(a+b)(\overline{a}+\overline{b})/16$. Она содержит центр O данной окружности $z\overline{z}=1$ и имеет центр в середине отрезка, соединяющего точку O с серединой отрезка AB. **3.37.** Прямая. **3.38.** Окружность, если заданное отношение $\lambda\neq 1$, и прямая (радикальная ось окружностей) при $\lambda=1$. **3.39.** Пусть дана точка A и окружность $z\overline{z}=1$. Если одна из окружностей заданного множества пересекает данную окружность в диаметрально противоположных точках B и C, то $c=-b$. Принимая $a=\overline{a}$, запишем уравнение этой окружности в виде (14.7). Точки пересечения её с действительной осью OA находятся при условии $z=\overline{z}$, что приводит к уравнению $az^2-a^2z+z-a=0$, или $(z-a)(az+1)=0$, откуда $z_1=a$ и $z_2=-1/a$. Точка $D(-1/a)$ не зависит от выбора диаметра BC. Значит, каждая из окружностей заданного множества проходит через точки $A(a)$ и D.

Глава 4

4.1. $4+3i$, $5i$. **4.2.** Если $A\mapsto C$ и $B\mapsto D$, то центру поворота соответствует комплексное число $\dfrac{ad-bc}{a+d-(b+c)}$. **4.3.** $2:\sqrt{3}:1$. **4.4.** Пусть $a=0$, $b=1$. Если S и S_1 — центры окружностей, то $s+\overline{s}=s_1+\overline{s}_1=1$ (см. указание к задаче 3.25). Пусть при указанном подобии точка M окружности S отображается в точку M_1 окружности S_1. Тогда $\dfrac{m-s}{a-s}=\dfrac{m_1-s_1}{a-s_1}=$ $=\alpha$, $|\alpha|=1$, откуда $m=s(1-\alpha)$, $m_1=s_1(1-\alpha)$. Докажите коллинеарность точек M, M_1, B. **4.5.** Коэффициент равен $-1/3$, центр находится в центроиде четырёхугольника $ABCM$. **4.6.** Пусть $l\cap t=O$ — начало координат, l — действительная ось, и прямая t имеет уравнение $\overline{u}z+u\overline{z}=0$. Если вершины A и B лежат на l, а вершина D — на t, то $\overline{d}=-\overline{u}d/u$, $a=(d+\overline{d})/2=d(1-\overline{u}/u)/2$, $c-d=i(a-d)$, откуда $c=d(1-i/2-\overline{u}i/(2u))$. Следовательно, преобразование $D\mapsto C$ есть подобие, и поэтому искомым множеством точек будет прямая — образ прямой t при этом подобии. **4.7.** Если окружность с центром S принята за единичную, а линия центров — за действительную ось, то окружность с центром S_1 имеет уравнение $z\overline{z}-s_1(z+\overline{z})=1-s_1(a+\overline{a})$. Решая его совместно с уравнением $z+ac\overline{z}=$ $=a+c$ прямой AC и учитывая известное уже решение $z=a$, по теореме Виета находим $d=c+s_1-acs_1$. Так как $p=(a+\overline{a})/2$, то $\overrightarrow{SP}:\overrightarrow{PS_1}=(a+\overline{a}):(2s_1-(a+\overline{a}))=\lambda$. Значит, $m=$ $=(c+\lambda d)/(1+\lambda)=(\overline{a}-a)c/(2a)+(\overline{a}+a)/2$. Преобразование $z'=(\overline{a}-a)z/(2a)+(a+\overline{a})/2$ есть подобие, поэтому искомое множество точек M является образом окружности S при этом подобии, т. е. окружностью. Если $z=0$, то $z'=(a+\overline{a})/2=p$. Если $z=a$, то $z'=a$. Следовательно, полученная окружность имеет центр P и проходит через A. **4.9.** Примем центр данного подобия за начальную точку. Тогда $m_1=\sigma m$. Условие коллинеарности точек M, M_1, S даёт: $(\overline{\sigma}-\sigma)m\overline{m}+\overline{s}(\sigma-1)m+s(1-\overline{\sigma})\overline{m}=0$. Следовательно, если данное подобие — не гомотетия, т. е. $\sigma\neq\overline{\sigma}$, то искомым множеством точек M является окружность, содержащая центр O подобия. Она проходит через точку S и прообраз точки S при этом подобии. **4.10.** Перенос на вектор $2\overrightarrow{AB}$. **4.11.** Если A, B, C — центры данных симметрий, то центр симметрии, являющейся их композицией, имеет координату $a-b+c$. **4.12.** Симметрия относительно перпендикуляра к AB в точке A. **4.13.** Точка лежит на прямой. **4.14.** Движение $z'=\sigma\overline{z}+\rho$, $\sigma\overline{\sigma}=1$, есть композиция осевой симметрии $z'=-\sigma\overline{z}-v\sqrt{\sigma}$ и центральной симметрии $z'=-z+\rho+v\sqrt{\sigma}$, где v — действительный параметр. **4.15.** Оси симметрий перпендикулярны или совпадают. **4.16.** Для четырёхугольника $ABCD$ согласно условию $c-a=i(d-b)$. Примените формулу (18.8) при $\sigma=i$. **4.17.** Если окружность единичная, то симметрия относительно прямой A_1A_2, содержащей сторону вписанного многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2k}$, записывается формулой $z'=-a_1a_2\overline{z}+$ $+a_1+a_2$. **4.18.** Используйте задачу 4.4 и рассмотрите композицию подобий. **4.19.** К цели приводит композиция гомотетий с центрами C, A, B. **4.20.** Пусть прямая BA_1 пересекает окружность ω вторично в точке M. Руководствуясь результатом задачи 4.4, рассмотрите две композиции подобий с центрами A и B, каждая из которых отображает ω в себя. Они являются центральными симметриями. Рассмотрите образы точки C при этих композициях. **4.21.** Задача решается с помощью композиции четырёх гомотетий с центрами в точках касания. **4.22.** Решив заданное уравнение относительно c, получим $c_{1,2}=(a+b)/2\pm i(a-b)/(2\sqrt{3})$. Если M — середина AB, то вектору $\overrightarrow{MA}$ соответствует комплексное число $a-(a+b)/2=(a-b)/2$. Подобие с центром M, углом $\pi/2$ и коэффициентом $1/\sqrt{3}$ отображает точку A в точку C_1. Точки C_1 и C_2 служат центрами двух правильных треугольников, построенных на отрезке AB как на стороне. **4.23.** Обратное преобразование: $z'=(2-i/2)z+(1-3i/2)\overline{z}+2i$, неподвижная точка $1+2i$, образ действительной оси: $(2+i)z+(2-i)\overline{z}-4=0$, её прообраз: $(-2+3i)z+(-2-3i)\overline{z}+12=$ $=0$. **4.24.** $(2+i)z+(2-i)\overline{z}+14=0$, $(3+i)z+(3-i)\overline{z}+20=0$. **4.25.** См. § 23. Ось сжатия: $(3-4i)z+(3+4i)\overline{z}+2=0$. Направление характеризуется вектором $\overrightarrow{OA}$ при $a=1+2i$, коэффициент равен 12. **4.26.** $(1+i)z+(1-i)\overline{z}+2=0$, направление характеризуется вектором $\overrightarrow{OA}=2+2i$, параллельным оси сдвига, коэффициент сдвига равен 4. **4.27.** Ось:

$(1-i)z+(1+i)\overline{z}-2=0$, направление $\overrightarrow{OA}=3-i$, коэффициент равен -1. **4.28.** $z'=3(1-i)z/2+(3+i)\overline{z}/2$. **4.29.** $z'=(1+2i)z+2\overline{z}+2+2i$. **4.31.** Пусть f и g — косые симметрии с параллельными осями l и m и различными направлениями. Рассмотрим косую симметрию f_1 с осью l и направлением симметрии g. Тогда $f_1 \circ f=\omega$ — сдвиг вдоль l, $g \circ f_1=\tau$ — перенос (не параллельно l) (задача 4.30). Поэтому $(g \circ f_1) \circ (f_1 \circ f)=\tau \circ \omega$, или $g \circ f=\tau \circ \omega$. **4.32.** Пусть подобия $z'=b_1\overline{z}+c_1$ и $z'=b_2\overline{z}+c_2$ имеют одни и те же инвариантные пучки параллельных прямых. Используя уравнение (22.4) и тот факт, что собственные числа аффинного преобразования второго рода всегда действительны и различны, находим формулу композиции заданных подобий: $z'=|b_1|\cdot|b_2|z+b_2\overline{c}_1+c_2$, из которой следует доказываемое утверждение. **4.36.** Используйте соотношение (24.7). **4.37.** Если окружности пересекаются, то существуют две инверсии с центрами в центрах гомотетий, каждая из которых отображает одну окружность в другую. Если окружности не пересекаются или касаются, то существует одна инверсия с центром в одном из центров этих гомотетий. **4.38.** Пучок прямых, параллельных мнимой оси. **4.39.** Пучок окружностей (и прямая), проходящих через точки 1 и -1. **4.40.** $z'=\dfrac{iz-i}{(2i-1)z+1}$, внешняя область относительно этого круга. **4.41.** $z'=\dfrac{iz-i}{z-i}$. **4.42.** Круговое преобразование $z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $c\neq 0$, является композицией движения $z'=\sigma\overline{z}+\rho$, $\sigma\overline{\sigma}=1$, и инверсии $(z'-s)(\overline{z}-\overline{s})=R^2$ при $s=\dfrac{a}{c}$, $R^2=\dfrac{|\delta|}{c\overline{c}}$, $\sigma=-\dfrac{\overline{c}\delta}{c|\delta|}$, $\rho=-\dfrac{\overline{d}\delta}{c|\delta|}+\dfrac{a}{c}$, где $\delta=ad-bc$.

Задачи смешанного содержания

5.3. $M=AD\cap BC$. **5.6.** $\overrightarrow{AX}=b-a-i(c-b)+(c-b)/2$, если O — нулевая точка. **5.8.** Эта сумма равна $20R^2/9$. **5.11.** Пусть $AP\cap BC=A_1$. Пользуясь теоремой Чевы, находим $\overrightarrow{BA_1}:\overrightarrow{A_1C}=1:7$. Положим $a=1$, $b=\alpha$, $c=\alpha^2$, где $\alpha=\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3$. Тогда $1+\alpha+\alpha^2=0$. Найдя координаты точек A_1 и C_1, проверьте, что $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{CC_1}$. **5.12.** $\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP})\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OP}$. **5.15.** $MN=\dfrac{2R}{\sin\widehat{C}}\sqrt{\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}-2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}$. Докажите сначала, что $MN=2DH\cdot R/AB$, где H — ортоцентр, D — точка, симметричная точке C относительно O, и что $DH=2R\sqrt{4\cos^2\widehat{A}\cos^2\widehat{B}-\sin^2(\widehat{B}-\widehat{A})}$. **5.17.** Если окружность ABC имеет уравнение $z\overline{z}=1$ и $p=1$, то $a_1=bc$, $b_1=ac$, $c_1=ab$, и на основании формулы (18.19) $a_2=a(b+c-bc)$, $b_2=b(c+a-ca)$, $c_2=c(a+b-ab)$. Центр окружности $A_2B_2C_2$ имеет координату $ab+bc+ca-abc$. **5.18.** Точки A, B, C являются тремя вершинами правильного семиугольника. Указанные шесть точек принадлежат окружности девяти точек треугольника ABC.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер и др. Алгебра: Учебное пособие для 9—10 кл. средних школ с математической специализацией. — М.: Просвещение, 1968. — С. 197—239.

[2] Э. Г. Готман, З. А. Скопец. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.

[3] Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс / Сост. С. И. Шварцбурд. — М.: Просвещение, 1980.

[4] Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. — М., Наука, 1966.

[5] Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.

[6] Э. А. Лаудыня. Применение комплексных чисел в задачах о правильных многоугольниках // Математика в школе. — 1968. — № 5. — С. 79—83.

[7] А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения. — М.: Наука, 1979.

[8] Отдел задач / Руководитель и редактор З. А. Скопец // Математика в школе. — 1967—1983.

[9] Я. П. Понарин. Геометрия. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.

[10] Я. П. Понарин, З. А. Скопец. Перемещения и подобия плоскости. — Киев: Радяньска школа, 1981.

[11] Я. П. Понарин. Метод комплексных чисел в геометрии // Математика в школе. — 1991. — № 2. — С. 46—54.

[12] З. А. Скопец, В. А. Жаров. Задачи и теоремы по геометрии. — М.: Учпедгиз, 1962.

[13] З. А. Скопец. Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии // Математика в школе. — 1967. — № 1. — С. 63—71.

[14] З. А. Скопец. Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990.

[15] Л. Р. Форд. Автоморфные функции. — М.—Л.: ОНТИ, 1936.

[16] О. П. Шарова. Применение комплексных чисел к изучению геометрических преобразований // Математика в школе. — 1970. — № 1. — С. 74—79.

[17] И. М. Яглом. Комплексные числа. — М.: Физматгиз, 1963.

Яков Петрович Понарин.

Алгебра комплексных чисел
в геометрических задачах.

* * *

Редактор *Р. О. Алексеев.*
Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 15/IV 2004 года. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Объём 10,00 физ. печ. л. = = 9,78 усл. печ. л. = 9,48 уч.-изд. л. Бумага офсетная № 1. Гарнитура обыкн. новая. Печать офсетная. Тираж 2000 экз. Заказ 7685.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 72 85.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат
ВИНИТИ». 140010, г. Люберцы Московской обл.,
Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.